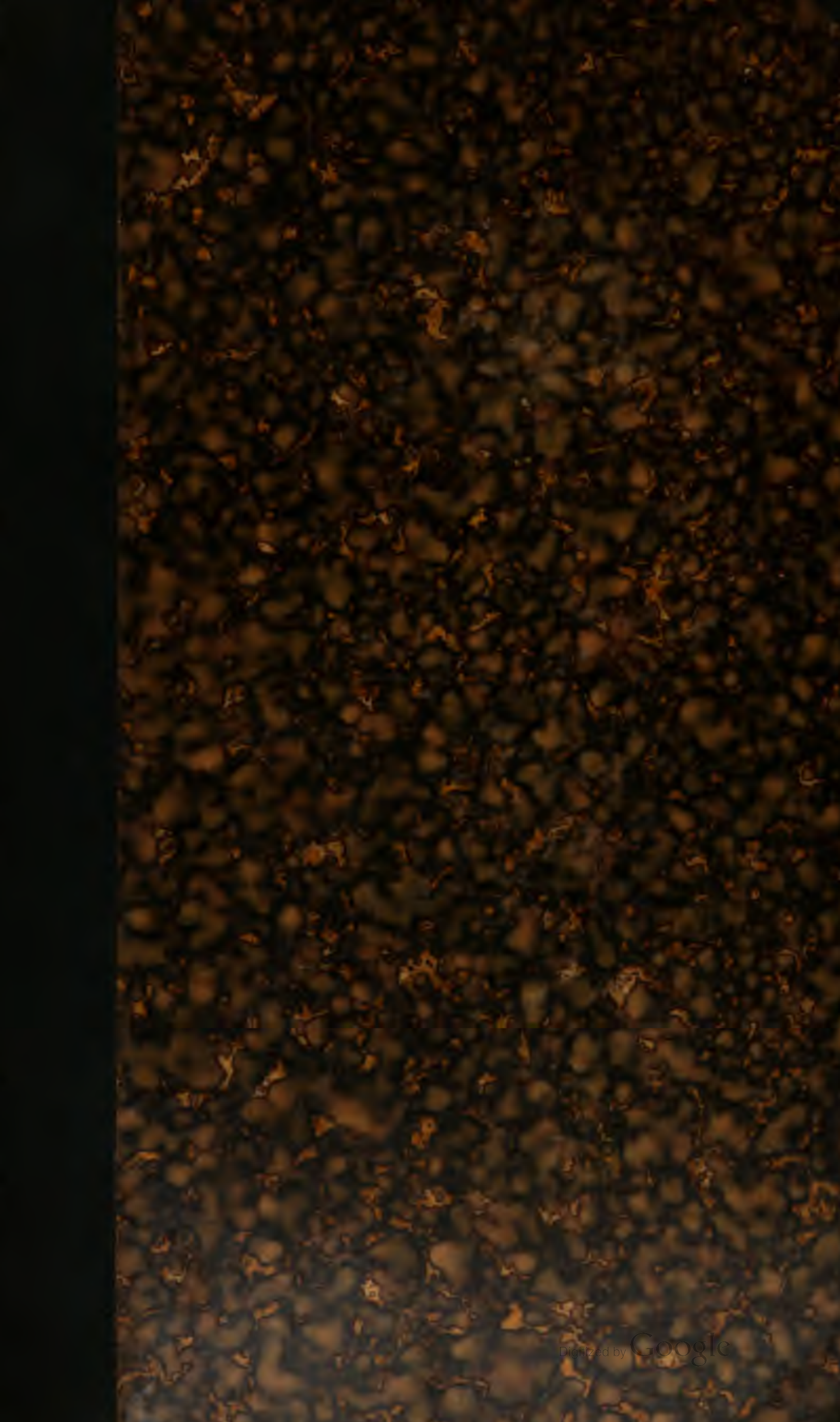




Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Einundvierzigster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1864.

1871, July 1.
Haven Fund.

Inhaltsverzeichniss des einundvierzigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

Mechanik.

Optik.

Astronomie.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber bestimmte Integrale.

(Fortsetzung und Schluss von Thl. XL. Nr. XXX.)

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

VI.

§. 67.

Eine besondere Classe von Integralen bilden die wiederholten Integrale. Verbindet man $\lg(1+x^m)$ mit $\frac{\partial x}{x}$ und integrirt, so erhält man:

$$\int_0^x \frac{\lg(1+x^m)\partial x}{x} = \int_0^x (x^{m-1} - \frac{x^{2m-1}}{2} + \frac{x^{3m-1}}{3} - \frac{x^{4m-1}}{4} + \ldots)\partial x$$

$$= \frac{1}{m}(x^m - \frac{x^{2m}}{2^2} + \frac{x^{3m}}{3^2} - \frac{x^{4m}}{4^2} + \ldots).$$

Wird diese Darstellung wiederholt mit $\int \frac{\partial x}{x}$ verbunden und integrirt, so entsteht:

$$\int_0^x \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x \lg(1+x^m)}{x}$$

$$= \int_0^x \frac{1}{m}(x^{m-1} - \frac{x^{2m-1}}{2^2} + \frac{x^{3m-1}}{3^2} - \frac{x^{4m-1}}{4^2} + \ldots)\partial x$$

$$= \frac{1}{m^2}(x^m - \frac{x^{2m}}{2^3} + \frac{x^{3m}}{3^3} - \frac{x^{4m}}{4^3} + \ldots).$$

Eben so erhält man

$$\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x \lg(1+x^m)}{x} = \frac{1}{m^3}(x^m - \frac{x^{2m}}{2^4} + \frac{x^{3m}}{3^4} - \frac{x^{4m}}{4^4} + \ldots).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens entsteht:

1)

$$\overset{r}{\int_0^x} \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x \lg(1+x^m)}{x}$$

$$= \frac{1}{m^r}(x^m - \frac{x^{2m}}{2^{r+1}} + \frac{x^{3m}}{3^{r+1}} - \frac{x^{4m}}{4^{r+1}} + \ldots).$$

Hier soll der links oben an das Integralzeichen angeschriebene Buchstabe r die $r$mal wiederholte Division mit x und Integration andeuten. Wird zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt, so geht Nr. 1. über in

2)

$$\overset{r}{\int_0^1} \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x}{x}\lg(1+x^m) = \frac{1}{m^r}S'(1,1)^{r+1}.$$

Da $\lg(1+x^m) = m\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m}$ ist, so erhält man aus Nr. 1) und 2) durch Einführung dieses Werthes:

3)

$$\overset{r+1}{\int_0^x} \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m}$$

$$= \frac{1}{m^{r+1}}(x^m - \frac{x^{2m}}{2^{r+1}} + \frac{x^{3m}}{3^{r+1}} - \ldots),$$

4)

$$\overset{r+1}{\int_0^1} \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m} = \frac{1}{m^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}.$$

Hieraus lassen sich eine Menge Integrale ableiten. Für $m=1$ ist:

5)

$$\int_0^1 \frac{\partial x \lg(1+x)}{x} = \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{1+x} = S'(1,1)^2 = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x \lg(1+x)}{x} = \int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1+x} = S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x \lg(1+x)}{x} = \int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1+x} = \frac{7\pi^4}{720},$$

. . . .

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \cdots \int \frac{\partial x}{x} \lg(1+x) = {}^{r+1}\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \cdots \int \frac{\partial x}{1+x}$$
$$= S'(1,1)^{r+1}.$$

Für $m = 2$ ist:

6)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \lg(1+x^2) = \int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{x \partial x}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x \lg(1+x^2)}{x} = \int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{x \partial x}{1+x^2} = \tfrac{1}{4} S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \lg(1+x^2) = \int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{x \partial x}{1+x^2}$$
$$= \frac{7 . \pi^4}{8 . 720},$$

u. s. w.

Behandelt man

$$\lg(1-x^m) = -\left(x^m + \frac{x^{2m}}{2} + \frac{x^{3m}}{3} + \ldots\right)$$

auf gleiche Weise, so erhält man durch wiederholte Verbindung dieser Gleichung mit $\int \frac{\partial x}{x}$ folgende Darstellung:

7)

$$^r\int_0^x \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \cdots \int \frac{\partial x}{x} \lg(1-x^m) = -\frac{1}{m^r}\left(x^m + \frac{x^{2m}}{2^{r+1}} + \frac{x^{3m}}{3^{r+1}} + \ldots\right),$$

8)

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \cdots \int \frac{\partial x}{x} \lg(1-x^m) = -\frac{1}{m^r} S(1,1)^{r+1}.$$

Ferner ist:

9)

$$\overset{r+1}{\int_0^x}\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\dots\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m}=\frac{1}{m^{r+1}}\left(x^m+\frac{x^{2m}}{2^{r+1}}+\frac{x^{3m}}{3^{r+1}}+\dots\right),$$

10)

$$\overset{r+1}{\int_0^1}\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\dots\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m}=\frac{1}{m^{r+1}}S(1,1)^{r+1}.$$

Auch hieraus lässt sich eine beliebige Menge von Integralen ableiten. Setzt man $r=1$, $m=1, 2, 3\dots$ so ergeben sich folgende Integrale:

11)

$$\int_0^1\frac{\lg(1-x)\partial x}{x}=-\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{1-x}=-\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^1\frac{\lg(1-x^2)\partial x}{x}=-2\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{x\partial x}{1-x^2}=-\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1\frac{\lg(1-x^3)\partial x}{x}=-3\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^2\partial x}{1-x^3}=-\frac{\pi^2}{18},$$

. . . .

$$\int_0^1\frac{\lg(1-x^m)\partial x}{x}=-m\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m}=-\frac{\pi^2}{6m}.$$

Aus Nr. 8) und 10) ergibt sich folgende Beziehung:

12)

$$\overset{r}{\int_0^1}\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\dots\int\frac{\partial x\lg(1-x^m)}{x}$$

$$=-m\overset{r+1}{\int_0^1}\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\dots\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m}=-\frac{1}{m^r}S(1,1)^{r+1}.$$

Ferner ergibt sich hieraus und aus Nr. 5) und 6) folgender Zusammenhang:

13)

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1+x)=-\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1-x^2)=\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1+x^2)=-\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1-x^4)=\frac{\pi^2}{24},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \lg(1+x^3) = -\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \lg(1-x^6) = \frac{\pi^2}{36},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \lg(1+x^m) = -\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \lg(1-x^{2m}) = \frac{\pi^2}{12m}.$$

Diess rechtfertigt sich leicht, wenn man $r=1$ in Nr. 2) und $r=1$, $2m$ statt m in Nr. 8) setzt.

§. 68.

Behandelt man

$$\lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = 2(x^m + \frac{x^{3m}}{3} + \frac{x^{5m}}{5} + \ldots)$$

auf dieselbe Weise, wie in §. 67. geschah, so entsteht:

$$\int_0^x \frac{\partial x}{x} \lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = \frac{2}{m}(x^m + \frac{x^{3m}}{3^2} + \frac{x^{5m}}{5^2} + \ldots).$$

Wird wiederholt mit $\int \frac{\partial x}{x}$ vervielfacht und integrirt, so erhält man

1)

$${}^r\!\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{\partial x}{x} \lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = \frac{2}{m^r}(x^m + \frac{x^{3m}}{3^{r+1}} + \frac{x^{5m}}{5^{r+1}} + \ldots),$$

2)

$${}^r\!\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{\partial x}{x} \lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = \frac{2}{m^r} S(1,2)^{r+1}.$$

Behandelt man die Gleichung

$$\int_0^x \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}} = \frac{1}{m}(x^m + \frac{x^{3m}}{3} + \frac{x^{5m}}{5} + \ldots)$$

wiederholt auf dieselbe Weise, so ergeben sich hieraus folgende Integralformen:

3)

$${}^{r+1}\!\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}} = \frac{1}{m^{r+1}}(x^m + \frac{x^{3m}}{3^{r+1}} + \frac{x^{5m}}{5^{r+1}} + \ldots),$$

4)

$$^{r+1}\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}} = \frac{1}{m^{r+1}}S(1,2)^{r+1}.$$

Diese Darstellungen stehen in folgendem Zusammenhang:

5)

$$^{r}\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = 2m\,^{r+1}\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}}.$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab, wenn man $r=1$ und $m=1, 2, 3\ldots.$ setzt:

6)

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{1-x^2} = 2S(1,2)^2 = \frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^2}{1-x^2} = 4\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{x\partial x}{1-x^4} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^3}{1-x^3} = 6\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^2\partial x}{1-x^6} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^4}{1-x^4} = 8\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int_0^1\frac{x^3\partial x}{1-x^8} = \frac{\pi^2}{16},$$

. . . .

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = 2m\int_0^1\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}}{1-x^{2m}} = \frac{\pi^2}{4m}.$$

Diese Ableitungen lassen sich beliebig fortsetzen. Aus den Gleichungen Nr. 6) und denen in Nr. 13) §. 67. angegebenen erhält man folgende bemerkenswerthe Beziehungen:

7)

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1+x) = -\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1-x^2) = \int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^3}{1-x^3} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1+x^2) = -\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1-x^4) = \int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^6}{1-x^6} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1+x^3) = -\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1-x^6) = \int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^9}{1-x^9} = \frac{\pi^2}{36},$$

. . . .

$$\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1+x^m) = -\int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg(1-x^{2m}) = \int_0^1\frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^{3m}}{1-x^{3m}} = \frac{\pi^2}{12m}.$$

Diese Methode lässt sich noch auf andere und mehrgliedrige Functionen von x anwenden. Diess soll an folgenden Fällen gezeigt werden.

Entwickelt man $\frac{x^{m-1}}{1+x^m+x^{2m}}$ in Reihen nach den steigenden Potenzen von x, so erhält man:

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^m+x^{2m}} = x^{m-1} + x^{4m-1} + x^{7m-1} + x^{10m-1}$$
$$-(x^{2m-1} + x^{5m-1} + x^{8m-1} + \ldots).$$

Wird die Darstellung mit $\int \partial x$ verbunden und integrirt, so entsteht:

$$\int_0^x \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m}\left(x^m + \frac{x^{4m}}{4} + \frac{x^{7m}}{7} + \frac{x^{10m}}{10} + \ldots\right)$$
$$-\frac{1}{m}\left(\frac{x^{2m}}{2} + \frac{x^{5m}}{5} + \frac{x^{8m}}{8} + \frac{x^{11m}}{11} + \ldots\right).$$

Wird diess Verfahren wiederholt angewendet, so erhält man folgende Integralformen:

8)

$$^r\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r}\left(x^m + \frac{x^{4m}}{4^r} + \frac{x^{7m}}{7^r} + \frac{x^{10m}}{10^r} + \ldots\right)$$
$$-\frac{1}{m^r}\left(\frac{x^{2m}}{2^r} + \frac{x^{4m}}{5^r} + \frac{x^{8m}}{8^r} + \ldots\right),$$

9)

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r} S(1,3)^r - \frac{1}{m^r} S(2,3)^r.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man auch folgende hierher gehörige Integralformen:

10)

$$^r\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r}\left(x^m - \frac{x^{4m}}{4^r} + \frac{x^{7m}}{7^r} - \frac{x^{10m}}{10^r} + \ldots\right)$$
$$+\frac{1}{m^r}\left(\frac{x^{2m}}{2^r} - \frac{x^{5m}}{5^r} + \frac{x^{8m}}{8^r} - \frac{x^{11m}}{11^r} + \ldots\right),$$

11)

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \ldots \int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r} S'(1,3)^r + \frac{1}{m^r} S'(2,3)^r.$$

4)

$$ {}^{r+1}\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\cdots\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}} = \frac{1}{m^{r+1}}\,S(1,\,2)^{r+1}. $$

Diese Darstellungen stehen in folgendem Zusammenhang:

5)

$$ {}^{r}\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\cdots\int \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = 2m\;{}^{r+1}\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\cdots\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}}. $$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab, wenn man $r=1$ und $m=1,\,2,\,3\ldots.$ setzt:

6)

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{1-x^2} = 2S(1,\,2)^2 = \frac{\pi^2}{4}, $$

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^2}{1-x^2} = 4\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1-x^4} = \frac{\pi^2}{8}, $$

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^3}{1-x^3} = 6\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{x^2\partial x}{1-x^6} = \frac{\pi^2}{12}, $$

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^4}{1-x^4} = 8\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1-x^8} = \frac{\pi^2}{16}, $$

. . . .

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^m}{1-x^m} = 2m\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{x^{m-1}}{1-x^{2m}} = \frac{\pi^2}{4m}. $$

Diese Ableitungen lassen sich beliebig fortsetzen. Aus den Gleichungen Nr. 6) und denen in Nr. 13) §. 67. angegebenen erhält man folgende bemerkenswerthe Beziehungen:

7)

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1+x) = -\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1-x^2) = \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^3}{1-x^3} = \frac{\pi^2}{12}, $$

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1+x^2) = -\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1-x^4) = \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^6}{1-x^6} = \frac{\pi^2}{24}, $$

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1+x^3) = -\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1-x^6) = \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^9}{1-x^9} = \frac{\pi^2}{36}, $$

. . . .

$$ \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1+x^m) = -\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg(1-x^{2m}) = \int_0^1 \frac{\partial x}{x}\lg\frac{1+x^{3m}}{1-x^{3m}} = \frac{\pi^2}{12m}. $$

Diese Methode lässt sich noch auf andere und mehrgliedrige Functionen von x anwenden. Diess soll an folgenden Fällen gezeigt werden.

Entwickelt man $\frac{x^{m-1}}{1+x^m+x^{2m}}$ in Reihen nach den steigenden Potenzen von x, so erhält man:

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^m+x^{2m}} = x^{m-1}+x^{4m-1}+x^{7m-1}+x^{10m-1}$$
$$-(x^{2m-1}+x^{5m-1}+x^{8m-1}+\ldots).$$

Wird die Darstellung mit $\int\partial x$ verbunden und integrirt, so entsteht:

$$\int_0^x \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m}\left(x^m+\frac{x^{4m}}{4}+\frac{x^{7m}}{7}+\frac{x^{10m}}{10}+\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{m}\left(\frac{x^{2m}}{2}+\frac{x^{5m}}{5}+\frac{x^{8m}}{8}+\frac{x^{11m}}{11}+\ldots\right).$$

Wird diess Verfahren wiederholt angewendet, so erhält man folgende Integralformen:

8)

$$^r\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r}\left(x^m+\frac{x^{4m}}{4^r}+\frac{x^{7m}}{7^r}+\frac{x^{10m}}{10^r}+\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{m^r}\left(\frac{x^{2m}}{2^r}+\frac{x^{4m}}{5^r}+\frac{x^{8m}}{8^r}+\ldots\right),$$

9)

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r}S(1,3)^r - \frac{1}{m^r}S(2,3)^r.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man auch folgende hierher gehörige Integralformen:

10)

$$^r\int_0^x \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r}\left(x^m-\frac{x^{4m}}{4^r}+\frac{x^{7m}}{7^r}-\frac{x^{10m}}{10^r}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{m^r}\left(\frac{x^{2m}}{2^r}-\frac{x^{5m}}{5^r}+\frac{x^{8m}}{8^r}-\frac{x^{11m}}{11^r}+\ldots\right),$$

11)

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\ldots\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^m+x^{2m}} = \frac{1}{m^r}S'(1,3)^r + \frac{1}{m^r}S'(2,3)^r.$$

Setzt man $m = 1$ und $r = 1, 2, 3 \ldots.$, so leiten sich aus Nr. 9) folgende Integrale ab, wenn man die Gleichungen in §. 25. benutzt:

12)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x+x^2} = S(1, 3)^1 - S(2, 3)^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1+x+x^2} = S(1, 3)^2 - S(2, 3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1+x+x^2} = S(1, 3)^3 - S(2, 3)^3 = \frac{4 . \pi^3 \sqrt{3}}{3^5},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1+x+x^2} = S(1, 3)^4 - S(2, 3)^4,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1+x+x^2} = S(1, 3)^5 - S(2, 3)^5 = \frac{4 . \pi^5 \sqrt{3}}{3^7},$$

u. s. w.

Aus Nr. 11) leiten sich folgende ab, wenn die Gleichungen in §. 27. benutzt werden:

13)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = S'(1, 3)^1 + S'(2, 3)^1,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1-x+x^2} = S'(1, 3)^2 + S'(2, 3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1-x+x^2} = S'(1, 3)^3 + S'(2, 3)^3 = \frac{5\pi^3 \sqrt{3}}{3^5},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1-x+x^2} = S'(1, 3)^4 + S'(2, 3)^4,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{1-x+x^2} S' = (1, 3)^5 + S'(2, 3)^5$$

$$= \frac{17 . \pi^5 \sqrt{3}}{4 . 3^7},$$

u. s. w.

Setzt man $m = 2$, $r = 1, 2, 3 \ldots.$ in Nr. 9) und 11), so ergeben sich folgende Integrale:

14)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{2}(S(1,3)^1 - S(2,3)^1) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}(S(1,3)^2 - S(2,3)^2),$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{8}(S(1,3)^3 - S(2,3)^3) = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{2.3^5},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{16}(S(1,3)^4 - S(2,3)^4),$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{32}(S(1,3)^5 - S(2,3)^5)$$

$$= \frac{\pi^5\sqrt{3}}{2^3.3^7},$$

u. s. w.

15)

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1-x^2+x^4} = = \tfrac{1}{2}(S'(1,3)^1 + S'(2,3)^1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1-x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}(S'(1,3)^2 + S'(2,3)^2),$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1-x^2+x^4} = \tfrac{1}{8}(S'(1,3)^3 + S'(2,3)^3) = \frac{5\pi^3\sqrt{3}}{8.3^5},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1-x^2+x^4} = \tfrac{1}{16}(S'(1,3)^4 + S'(2,3)^4),$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x}\int \frac{x\partial x}{1-x^2+x^4} = \tfrac{1}{32}(S'(1,3)^5 + S'(2,3)^5)$$

$$= \frac{17.\pi^5\sqrt{3}}{6^7},$$

u. s. w.

Diese Darstellungen lassen sich nach der gezeigten Methode leicht weiter verfolgen. Auf demselben Wege erhält man:

16)

$$^r\!\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int \frac{\partial x}{x} \cdots \int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^{2m}+x^{4m}} = \frac{1}{m^r}(S(1,6)^r - S(3,6)^r),$$

17)

$$ {}^{r}\!\int_0^1 \frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\cdots\int\frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^{2m}+x^{4m}} = (S^1(1,6)^r + S'(3,6)^r), $$

u. s. w.

§. 69.

Nicht so einfach lassen sich die Ausdrücke mit wiederholten Integralen darstellen, wenn sie mit Factoren in Verbindung gebracht werden. Es ergeben sich jedoch auch Fälle, welche sich nach der angegebenen Methode behandeln lassen.

Verbindet man den Ausdruck

$$ \lg(1-x) = -(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots) $$

mit $\int x^{m-1}\partial x$ und integrirt, so entsteht:

$$ \int_0^x x^{m-1}\lg(1-x)\partial x = -\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{x^{m+2}}{2(m+2)}+\frac{x^{m+3}}{3(m+3)}+\ldots\right). $$

Durch wiederholte Integration erhält man:

$$ \int_0^x x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\lg(1-x)\partial x $$

$$ = -\left(\frac{x^{2m+2}}{1(m+1)(2m+1)}+\frac{x^{2m+2}}{2(m+2)(2m+2)}+\ldots\right). $$

Wird dieses Verfahren r mal wiederholt, so entsteht:

1)

$$ {}^{r}\!\int_0^x x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\partial x\ldots\int x^{m-1}\lg(1-x)\partial x $$

$$ = -\left(\frac{x^{rm+1}}{1^{r+1|m}}+\frac{x^{rm+2}}{2^{r+1|m}}+\frac{x^{rm+3}}{3^{r+1|m}}+\ldots\right), $$

2)

$$ {}^{r}\!\int_0^1 x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\partial x\ldots\int x^{m-1}\lg(1-x)\partial x $$

$$ = -\left(\frac{1}{1^{r+1|m}}+\frac{1}{2^{r+1|m}}+\frac{1}{3^{r+1|m}}+\ldots\right). $$

Hieraus erhält man auch, da $\lg(1-x) = -\int \frac{\partial x}{1-x}$ ist:

3)

$$^{r+1}\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \ldots \int x^{m-1}\partial x \int \frac{\partial x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1^{r+1|m}} + \frac{1}{2^{r+1|m}} + \frac{1}{3^{r+1|m}} + \ldots$$

Die Integrale in Nr. 2) und 3) führen auf eine reciproke Facultäten-Reihe von $(r+1)$ Factoren, deren Grundfactoren die natürlichen Zahlen sind und deren Zunahme m ist. Die Reihen lassen sich summiren, wenn sie folgendem bekannten Gesetze unterliegen:

4)

$$\frac{1}{x^{p|d}} + \frac{1}{(x+d)^{p|d}} + \frac{1}{(x+2d)^{p|d}} + \ldots = \frac{1}{(p-1)d \cdot x^{p-1|d}}.$$

Diesem Gesetze kann man die in Nr. 2) und 3) auftretende Reihe unterwerfen, wenn man sie nach der Zunahme m in m verschiedene, ins Unendliche fortlaufende Reihen zerlegt, welche dem in Nr. 4) aufgestellten Gesetze gehorchen. Diess geschieht, wenn man $r+1$ statt p, m statt d und statt x allmälig die Werthe 1, 2, 3....m nach Nr. 4) setzt. Diese Bemerkungen führen zu folgender Darstellung:

5)

$$\frac{1}{1^{r+1|m}} + \frac{1}{2^{r+1|m}} + \frac{1}{3^{r+1|m}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1^{r+1|m}} + \frac{1}{(1+m)^{r+1|m}} + \frac{1}{(1+2m)^{r+1|m}} + \ldots = \frac{1}{r.m.1^{r|m}}$$

$$+ \frac{1}{2^{r+1|m}} + \frac{1}{(2+m)^{r+1|m}} + \frac{1}{(2+2m)^{r+1|m}} + \ldots = \frac{1}{r.m.2^{r|m}}$$

$$+ \frac{1}{3^{r+1|m}} + \frac{1}{(3+m)^{r+1|m}} + \frac{1}{(3+2m)^{r+1|m}} + \ldots = \frac{1}{r.m.3^{r|m}}$$

. . . .

$$+ \frac{1}{m^{r+1|m}} + \frac{1}{(2m)^{r+1|m}} + \frac{1}{(3m)^{r+1|m}} + \ldots = \frac{1}{r.m.m^{r|m}}.$$

Zählt man nämlich die Glieder dieser m Reihen in vertikaler Richtung durch, so fallen sie mit den Gliedern der Reihe in Nr. 2)

und 3) zusammen. Auf der rechten Seite finden sich nach dem Gesetze von Nr. 4) die Glieder der horizontalen Reihen summirt. Hiernach gehen die Integrale in Nr. 2) und 3) in folgende über:

6)

$$^{r}\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \ldots \int x^{m-1} \lg(1-x)\partial x$$

$$= -\frac{1}{rm}\left(\frac{1}{1^{r|m}} + \frac{1}{2^{r|m}} + \frac{1}{3^{r+m}} + \ldots \frac{1}{m^{r|m}}\right) = -\frac{1}{rm}\,\Sigma_1^m \frac{1}{u^{r|m}},$$

7)

$$^{r+1}\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \ldots \int x^{m-1}\partial x \int \frac{\partial x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{rm}\left(\frac{1}{1^{r|m}} + \frac{1}{2^{r|m}} + \frac{1}{3^{r|m}} + \ldots \frac{1}{m^{r|m}}\right).$$

Die Richtigkeit dieser Darstellungen bestätigt sich, wenn man auf den Fall zurückgeht, wo $r=1$ ist. Man erhält dann:

8)

$$\int_0^1 x^{m-1}\lg(1-x)\partial x = -\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int \frac{\partial x}{1-x}$$

$$= -\frac{1}{m}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots\frac{1}{m}),$$

wie schon früher auf anderem Wege, §. 4. Nr. 3), gefunden wurde.

§. 70.

Die in §. 69. gefundenen Gleichungen lassen mancherlei Anwendungen zu. So ist, wenn $m=2$, $r=1, 2, 3\ldots$ gesetzt wird:

1)

$$\int_0^1 x\lg(1-x)\partial x = -\frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x\partial x \int x\lg(1-x)\partial x = -\frac{11}{96},$$

$$\int_0^1 x\partial x \int x\partial x \int x \lg(1-x)\partial x = -\frac{7}{480},$$

. . . .

$$^r\!\int_0^1 x\partial x \int x\partial x \ldots \int x \lg(1-x)\partial x = -\frac{1}{2r}\,\frac{1^{r|2}+2^{r|2}}{1^{2r|1}}.$$

Setzt man $m=3$, so entsteht:

2)

$$^r\!\int_0^1 x^2\partial x \int x^2\partial x \ldots \int x^2 \lg(1-x)\partial x = -\frac{1^{r|3}+2^{r|3}+3^{r|3}}{3r.1.2.3\ldots 3r},$$

u. s. w.

Doch verweilen wir hierbei nicht länger, sondern machen eine Anwendung auf Integrale mit höheren und gebrochenen Exponenten. Setzt man $m=1$, so verschwindet x in der Gleichung Nr. 6) und 7) §. 69 und es tritt nur die $r$mal wiederholte Integration, also das $r$te Integral zwischen den Grenzen 0 und 1 auf. Bezeichnet man nun das $r$te Integral zwischen den Grenzen 0 und 1 durch das Zeichen $\int_{0,1}^r$, was ganz im Einklange mit der eingeführten Bezeichnungsweise steht, so erhält man aus Nr. 6) und 7) §. 69.:

3)

$$\int_{0,1}^r \lg(1-x)(\partial x)^r = -\frac{1}{r.1^{r|1}} = -\frac{1}{r.1.2.3\ldots r}$$

$$= -\int_{0,1}^r (\partial x)\; ^r\!\!\int \frac{\partial x}{1-x}.$$

Hierin kann r eine ganze oder gebrochene Zahl bedeuten. Setzt man $r+\frac{n}{m}$ statt r, so leitet sich hieraus folgendes Integral ab:

4)

$$\int_{0,1}^{r+\frac{n}{m}} \lg(1-x)(\partial x)^{r+\frac{n}{m}} = -\frac{m}{(rm+n).1^{r+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= -\frac{m^{r+1}}{(mr+n)(m+n)^{r|m}.1^{\frac{n}{m}|1}}$$

$$= -\frac{m^{r+1}}{(mr+n)(m+n)(2m+n)\ldots(rm+n).1^{\frac{n}{m}|1}}.$$

Setzt man nun $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, so ist $1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Hieraus ergeben sich für $r = 0, 1, 2, \ldots.$ folgende Integrale:

5)

$$\int_{0,1}^{\frac{1}{2}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{2^2}{\sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{3}{2}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2^3}{9.\sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{5}{2}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{5}{2}} = -\frac{2^4}{5.3.5.\sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{7}{2}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{7}{2}} = -\frac{2^5}{7.3.5.7.\sqrt{\pi}},$$

. . . .

$$\int_{0,1}^{r+\frac{1}{2}} \lg(1-x)(\partial x)^{r+\frac{1}{2}} = -\frac{2^{r+2}}{(2r+1).3.5.7\ldots.(2r+1)\sqrt{\pi}}.$$

Wird $\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$ gesetzt, so erhält man folgende Integrale:

6)

$$\int_{0,1}^{\frac{1}{3}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{1^{\frac{1}{3}|1}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{4}{3}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{4}{3}} = -\frac{3^2}{4.4.1^{\frac{1}{3}|1}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{7}{3}} \lg(1-x)(\partial x)^{\frac{7}{3}} = -\frac{3^3}{7.4.7.1^{\frac{1}{3}|1}},$$

. . . .

$$\int_{0,1}^{r+\frac{1}{3}} \lg(1-x)(\partial x)^{r+\frac{1}{3}} = -\frac{3^{r+1}}{(3r+1).4.7.10\ldots.(3r+1).1^{\frac{1}{3}|1}}.$$

u. s. w.

$1^{\frac{1}{3}|1} = 0,8929795116\ldots.,\quad \lg 1^{\frac{1}{3}|1} = 0,9508414945945\ldots.$

§. 71.

Behandelt man den Ausdruck:

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

auf die angegebene Weise, so wird man nach dem Vorgange von §. 69. auf folgende Integrale durch wiederholte Integration geführt:

1)

$$ {}^{r}\!\int_0^x x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \dots \int x^{m-1}\lg(1+x)\partial x$$
$$= \frac{x^{rm+1}}{1^{r+1|m}} - \frac{x^{rm+2}}{2^{r+1|m}} + \frac{x^{rm+3}}{3^{r+1|m}} - \dots,$$

2)

$$ {}^{r}\!\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \dots \int x^{m-1}\lg(1+x)\partial x$$
$$= \frac{1}{1^{r+1|m}} - \frac{1}{2^{r+1|m}} + \frac{1}{3^{r+1|m}} - \frac{1}{4^{r+1|m}} + \dots,$$

3)

$$ {}^{r+1}\!\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \dots \int x^{m-1}\partial x \int \frac{\partial x}{1+x}$$
$$= \frac{1}{1^{r+1|m}} - \frac{1}{2^{r+1|m}} + \frac{1}{3^{r+1|m}} - \dots$$

Diese Integrale führen auf reciproke Facultäten-Reihen mit abwechselnden Zeichen. Man kann nun diese Reihen nach der in §. 69. angegebenen Weise zerlegen, um sie summirbar zu machen. Geschieht diess, so hat man zwischen einem geraden und ungeraden m zu unterscheiden. Für ein gerades m, also für $2m$, erhält man Reihen, die sich nach Nr. 6) §. 69. behandeln lassen, für ein ungerades ist diess nicht der Fall. Hiernach erhält man für eine gerade Zahl folgende Zerlegung, da alle Glieder der Reihe, die mit einem geraden Grundfactor beginnen, negativ sind:

4)

$$\frac{1}{1^{r+1|2m}} - \frac{1}{2^{r+1|2m}} + \frac{1}{3^{r+1|2m}} - \frac{1}{4^{r+1|2m}} + \dots$$
$$= \frac{1}{1^{r+1|2m}} + \frac{1}{(1+2m)^{r+1|2m}} + \frac{1}{(1+4m)^{r+1|2m}} \dots = \frac{1}{r.2m.1^{r|2m}}$$
$$-\left(\frac{1}{2^{r+1|2m}} + \frac{1}{(2+2m)^{r+1|2m}} + \frac{1}{(2+4m)^{r+1|2m}} \dots\right) = -\frac{1}{r.2m.2^{r|2m}}$$

$$+\frac{1}{3^{r+1|2m}}+\frac{1}{(3+2m)^{r+1|2m}}+\frac{1}{(3+4m)^{r+1|2m}}\dots=\frac{1}{r.2m.3^{r|2m}}$$

. . . .

$$-\left(\frac{1}{(2m)^{r+1|2m}}+\frac{1}{(4m)^{r+1|2m}}+\frac{1}{(6m)^{r+1|2m}}+\dots\right)=-\frac{1}{r.2m.(2m)^{r|2m}}.$$

Für eine ungerade Zahl, also wenn $2m+1$ statt m gesetzt wird, erhält man folgende Zerlegung:

5)

$$\frac{1}{1^{r+1|2m+1}}-\frac{1}{2^{r+1|2m+1}}+\frac{1}{3^{r+1|2m+1}}-\dots$$

$$=\frac{1}{1^{r+1|2m+1}}-\frac{1}{(2+2m)^{r+1|2m+1}}+\frac{1}{(3+4m)^{r+1|2m+1}}\dots$$

$$-\left(\frac{1}{2^{r+1|2m+1}}-\frac{1}{(3+2m)^{r+1|2m+1}}+\frac{1}{(4+4m)^{r+1|2m+1}}\dots\right)$$

$$+\frac{1}{3^{r+1|2m+1}}-\frac{1}{(4+2m)^{r+1|2m+1}}+\frac{1}{(5+4m)^{r+1|2m+1}}\dots$$

. . . .

$$+\frac{1}{(2m+1)^{r+1|2m+1}}-\frac{1}{(4m+2)^{r+1|2m+1}}+\frac{1}{(6m+3)^{r+1|2m+1}}\dots$$

Diese Reihen unterliegen dem in Nr. 4) §. 69. aufgestellten Gesetze nicht, und müssen daher nach den Vorschriften behandelt werden, welche in der Abhandlung des 26. Bandes dieses Archivs angegeben sind. Wendet man nun die Darstellung Nr. 4) auf die Gleichungen Nr. 2) und 3) an, so gehen dieselben in folgende über:

6)

$${}^{r}\int_0^1 x^{2m-1}\partial x\int x^{2m-1}\partial x\dots\int x^{2m-1}\lg(1+x)\partial x$$

$$=\frac{1}{2rm}\left(\frac{1}{1^{r|2m}}-\frac{1}{2^{r|2m}}+\frac{1}{3^{r|2m}}-\frac{1}{4^{r|2m}}+\dots-\frac{1}{(2m)^{r|2m}}\right),$$

7)

$${}^{r+1}\int_0^1 x^{2m+1}\partial x\int x^{2m-1}\partial x\dots\int_0^1 x^{2m-1}\partial x\int\frac{\partial x}{1+x}$$

$$=\frac{1}{2rm}\left(\frac{1}{r^{2m}}-\frac{1}{2^{r|2m}}+\frac{1}{3^{r|2m}}-\dots-\frac{1}{(2m)^{r|2m}}\right).$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen bestätigt sich, wenn man auf den speciellen Fall zurückgeht, worin $r = 1$ ist. Man erhält aus Nr. 6):

8)

$$\int_0^1 x^{2m-1} \lg(1+x)\partial x = \frac{1}{2m}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots - \frac{1}{2m}),$$

wie auch in §. 3. Nr. 4) auf anderm Wege gefunden wurde.

Auch diese Gleichungen lassen leicht Anwendungen zu. Setzt man $m = 1$ und $r = 1, 2, 3, \ldots$, so ergeben sich folgende Integrale:

9)

$$\int_0^1 x \lg(1+x)\partial x = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x\partial x \int x \lg(1+x)\partial x = \frac{5}{96},$$

$$\int_0^1 x\partial x \int x\partial x \int x \lg(1+x)\partial x = \frac{11}{1440},$$

. . . .

$$\overset{r}{\int_0^1} x\partial x \int x\partial x \ldots \int x \lg(1+x)\partial x = \frac{2^{r|2} - 1^{r|2}}{2r \,.\, 1^{2r|1}}.$$

Für $m = 2$, $r = 1, 2, \ldots$ entsteht:

10)

$$\int_0^1 x^3\partial x \lg(1+x) = \frac{7}{48},$$

$$\int_0^1 x^3\partial x \int x^3 \lg(1+x)\partial x = \frac{149}{8960},$$

. . . .

$$\overset{r}{\int_0^1} x^3\partial x \int x^3\partial x \ldots \int x^3 \lg(1+x)\partial x = \frac{1}{4r}\left(\frac{1}{1^{r|4}} - \frac{1}{2^{r|4}} + \frac{1}{3^{r|4}} - \frac{1}{4^{r|4}}\right),$$

u. s. w.

§. 72.

Durch Verbindung der bisher aufgefundenen Resultate unter-

einander lassen sich noch viele Integrale gewinnen. Setzt man $2m$ statt m in Nr. 6) §. 69. und zieht das erhaltene Resultat von Nr. 6) §. 71. ab, so erhält man:

1)

$$^{r}\int_0^1 x^{2m-1}\partial x\int x^{2m-1}\ldots\int x^{2m-1}\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x$$

$$=\frac{1}{rm}\left(\frac{1}{1^{r|2m}}+\frac{1}{3^{r|2m}}+\frac{1}{5^{r|2m}}+\ldots\frac{1}{(2m-1)^{r|2m}}\right).$$

Werden beide Darstellungen zusammengezählt, so entsteht:

2)

$$^{r}\int_0^1 x^{2m-1}\partial x\int x^{2m-1}\partial x\ldots\int x^{2m-1}\lg(1-x^2)\partial x$$

$$=-\frac{1}{rm.2^r}\left(\frac{1}{1^{r|m}}+\frac{1}{2^{r|m}}+\ldots\frac{1}{m^{r|m}}\right),$$

wenn der allen Gliedern gemeinschaftliche Factor 2^r ausgeschieden wird. Eben so erhält man aus Nr. 6) §. 71. und Nr. 7) §. 69., da

$$\int\frac{\partial x}{1+x}+\int\frac{\partial x}{1-x}=2\int\frac{\partial x}{1-x^2}\text{ und }\int\frac{\partial x}{1+x}-\int\frac{\partial x}{1-x}=-2\int\frac{x\partial x}{1-x^2}$$

ist:

3)

$$^{r+1}\int_0^1 x^{2m-1}\partial x\int x^{2m-1}\partial x\ldots\int x^{2m-1}\partial x\int\frac{\partial x}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{2rm}\left(\frac{1}{1^{r|2m}}+\frac{1}{3^{r|2m}}+\ldots\frac{1}{(2m-1)^{r|2m}}\right),$$

4)

$$^{r+1}\int_0^1 x^{2m-1}\partial x\int x^{2m-1}\partial x\ldots\int x^{2m-1}\partial x\int\frac{x\partial x}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{rm.2^r}\left(\frac{1}{1^{r|m}}+\frac{1}{2^{r|m}}+\frac{1}{3^{r|m}}+\ldots\frac{1}{m^{r|m}}\right).$$

Hieraus lassen sich eine Reihe specieller Fälle ableiten. Der einfachste ist, wenn $m=1$ und $r=1, 2, 3\ldots.$ gesetzt wird. Aus Nr. 1) ergibt sich dann:

5)

$$\int_0^1 x\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 1,$$

$$\int_0^1 x\partial x\int x\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{1}{2.1.3},$$

$$\int_0^1 x\partial x\int x\partial x\int x\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{1}{3.1.3.5},$$

$$\int_0^1 x\partial x\int x\partial x\int x\partial x\int x\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{1}{5.1.3.5.7},$$

. . . .

$${}^r\!\int_0^1 x\partial x\int x\partial x\dots\int x\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{1}{r.1^{r|2}} = \frac{1}{r.1.3.5\dots(2r-1)}.$$

Aus Nr. 2) ergeben sich folgende Integrale für $m=1$:

6)

$$\int_0^1 x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x\partial x\int x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{2.2^2.1.2},$$

$$\int_0^1 x\partial x\int x\partial x\int x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{3.2^3.1.2.3},$$

$$\int_0^1 x\partial x\int x\partial x\int x\partial x\int x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{4.2^4.1^{4|1}},$$

. . . .

$${}^r\!\int_0^1 x\partial x\int x\partial x\dots\int x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{r.2^r.1^{r|1}} = -\frac{1}{r.2.4.6\dots 2r}.$$

u. s. w.

Die Richtigkeit der oben angegebenen Integralformen bestätigt sich dadurch, dass man sie auf einen schon bekannten Fall zurückbringt. Setzt man zu dem Ende $r=1$ in Nr. 1) und 2), so erhält man:

7)

$$\int_0^1 x^{2m-1}\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots\frac{1}{2m-1}\right),$$

8)

$$\int_0^1 x^{2m-1}\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{2m}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots\frac{1}{m}).$$

Beide Integrale wurden schon §. 7. Nr. 3) und §. 8. Nr. 3) auf anderem Wege gefunden.

§. 73.

Ausser diesen Darstellungen theilen wir noch folgende mit. Verbindet man

$$\lg(1-x^m) = -\left(x^m+\frac{x^{2m}}{2}+\frac{x^{3m}}{3}+\frac{x^{4m}}{4}+\dots\right)$$

mit $\int x^{m-1}\partial x$ und integrirt, so entsteht:

$$\int_0^x x^{m-1}\lg(1-x^m)\partial x = -\frac{1}{m}\left(\frac{x^{2m}}{1.2}+\frac{x^{3m}}{2.3}+\frac{x^{4m}}{3.4}+\dots\right).$$

Wird dieses Verfahren wiederholt, so ergibt sich:

$$\int_0^x x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\lg(1-x^m)\partial x - \frac{1}{m^2}\left(\frac{x^{3m}}{1.2.3}+\frac{x^{4m}}{2.3.4}+\frac{x^{5m}}{3.4.5}+\dots\right).$$

Bei r maliger Wiederholung erhält man:

1)

$$\;^{r}\!\!\int_0^x x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\partial x\dots\int x^{m-1}\lg(1-x^m)\partial x$$

$$= -\frac{1}{m^r}\left(\frac{x^{(r+1)m}}{1^{r+1|1}}+\frac{x^{(r+2)m}}{2^{r+1|1}}+\frac{x^{(r+3)m}}{3^{r+1|1}}+\dots\right),$$

2)

$$\;^{r}\!\!\int_0^1 x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\partial x\dots\int x^{m-1}\lg(1-x^m)\partial x$$

$$= -\frac{1}{m^r}\left(\frac{1}{1^{r+1|1}}+\frac{1}{2^{r+1|1}}+\frac{1}{3^{r+1|1}}+\dots\right) = -\frac{1}{m^r}\cdot\frac{1}{r.1^{r|1}},$$

wie aus Nr. 4) §. 69 folgt. Setzt man $m=1, 2, 3\dots$ in Nr. 2), so erhält man folgende Integralformen:

3)

$$\int_{0,1}^{r} \lg(1-x)(\partial x)^r = -\frac{1}{r.1^{r|1}},$$

$$^r\int_0^1 x\partial x\int x\partial x \ldots \int x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{2^r.r.1^{r|1}} = -\frac{1}{r.2.4.6\ldots 2r},$$

$$^r\int_0^1 x^2\partial x\int x^2\partial x \ldots \int x^2\lg(1-x^3)\partial x = -\frac{1}{3^r.r.1^{r|1}} = -\frac{1}{r.3.6.9\ldots 3r}.$$

u. s. w.

Setzt man für m eine gebrochene Zahl, so wird an der Gültigkeit dieses Verfahrens nichts geändert. Man erhält daher, wenn $m=\frac{1}{2}$ in Nr. 2) geschrieben wird, folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1-\sqrt{x})\partial x}{\sqrt{x}} = -2,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\lg(1-\sqrt{x})\partial x}{\sqrt{x}} = -\frac{2^2}{2.1.2},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\lg(1-\sqrt{x})\partial x}{\sqrt{x}} = -\frac{2^3}{3.1.2.3},$$

. . . .

$$^r\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} \ldots \int \frac{\lg(1-\sqrt{x})\partial x}{\sqrt{x}} = -\frac{2^r}{r.1^{r|1}}.$$

Behandelt man den Ausdruck

$$\lg(1+x^m) = x^m - \frac{x^{2m}}{2} + \frac{x^{3m}}{3} - \frac{x^{4m}}{4} + \ldots$$

auf die nämliche Weise, wie oben, so erhält man:

5)

$$^r\int_0^1 x^{m-1}\partial x\int x^{m-1}\partial x \ldots \int x^{m-1}\lg(1+x^m)\partial x$$

$$= \frac{1}{m^r}\left(\frac{1}{1^{r+1|1}} - \frac{1}{2^{r+1|1}} + \frac{1}{3^{r+1|1}} - \ldots\right).$$

Die Auswerthung dieser Integrale beruht auf der Darstellung des

Summen-Ausdrucks der reciproken Facultäten-Reihen mit abwechselnden Zeichen. Dieser Ausdruck findet sich in der oben angeführten Abhandlung (s. d. Archiv 26. Bd. S. 31) angegeben. Er ist in entwickelter Darstellung folgender:

6)

$$K_{r+1}=\frac{1}{1^{r+1|1}}-\frac{1}{2^{r+1|1}}+\frac{1}{3^{r+1|1}}-\frac{1}{4^{r+1|1}}+\ldots.$$

$$=\frac{2^r \lg 2}{1^{r|1}}-\frac{2^r}{1^{r|1}}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.\tfrac{1}{r})+\frac{1}{1^{r-1|1}}+\frac{1}{1^{r-2|1}}\cdot\frac{1}{1.2}(1+\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{1}{1^{r-3|1}}\cdot\frac{1}{1.2.3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})+\frac{1}{1^{r-4|1}}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+\ldots.$$

$$+\frac{1}{1.2.1^{r-2|1}}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.\frac{1}{r-2})+\frac{1}{1^{r-1|1}}(1+\tfrac{1}{2}+\ldots.\frac{1}{r-1})$$

$$+\frac{1}{1^{r|1}}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.\frac{1}{r}).$$

Die hieraus sich ergebenden Zahlen-Werthe sind folgende:

7)

$$K_2=0,386294361119890618834,$$
$$K_3=0,136294361119890618834,$$
$$K_4=0,035307351857704857001,$$
$$K_5=0,007237009262185761833,$$
$$K_6=0,001228137038207638066,$$
$$K_7=0,000177897531254397874,$$
$$K_8=0,000022483194870871047.$$

u. s. w.

In den früher angegebenen Werthen haben sich einige Fehler eingeschlichen, welche hiernach zu berichtigen sind. Führt man nun die Werthe aus Nr. 6) in die Gleichung Nr. 5) ein, so leiten sich hieraus für $m=1$ und $r=1$, 2, 3 folgende Integrale ab:

8)

$$\int_{0,1}^{1}\lg(1+x)\partial x\quad=K_2=2\lg 2-1,$$

$$\int_{0,1}^{2}\lg(1+x)(\partial x)^2=K_3=2\lg 2-\frac{5}{4},$$

$$\int_{0,1}^{3} \lg(1+x)(\partial x)^3 = K_4 = \frac{4\lg 2}{3} - \frac{8}{9},$$

$$\int_{0,1}^{4} \lg(1+x)(\partial x)^4 = K_5 = \frac{2\lg 2}{3} - \frac{131}{288},$$

$$\int_{0,1}^{5} \lg(1+x)(\partial x)^5 = K_6 = \frac{4\lg 2}{15} - \frac{661}{3600},$$

$$\int_{0,1}^{6} \lg(1+x)(\partial x)^6 = K_7 = \frac{4\lg 2}{45} - \frac{1327}{21600},$$

u. s. w.

Für $m=2$, $r=1, 2, 3....$ ergeben sich folgende Integrale:

9)

$$\int_0^1 x\lg(1+x^2)\partial x = \tfrac{1}{2}K_2 = \lg 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x\partial x \int x\lg(1+x^2)\partial x = \tfrac{1}{4}K_3 = \tfrac{1}{4}\lg 2 - \frac{5}{16},$$

$$\int_0^1 x\partial x \int x\partial x \int x\lg(1+x^2)\partial x = \tfrac{1}{8}K_4 = \frac{\lg 2}{6} - \frac{1}{9},$$

u. s. w.

Die ersten Integrale in Nr. 8) und 9) wurden schon oben §. 3. Nr. 6) und §. 10. Nr. 7) auf anderm Wege gefunden.

§. 74.

Verbindet man die Integrale in Nr. 2) und 5) §. 73. mit einander, so erhält man durch Subtraction und Addition folgende:

1)

$$^r\!\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \ldots \int x^{m-1}\lg\frac{1+x^m}{1-x^m}\partial x = \frac{1}{m^r}(K_{r+1} + \frac{1}{r.1^{r|1}}),$$

2)

$$^r\!\int_0^1 x^{m-1}\partial x \int x^{m-1}\partial x \ldots \int x^{m-1}\lg(1-x^{2m}) = \frac{1}{m^r}(K_{r+1} - \frac{1}{r.1^{r|1}}).$$

Setzt man hierin $m=1$, so lassen sich die hierher gehörigen

höheren Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 ableiten. Hiernach entsteht aus Nr. 1), wenn $m=1$ gesetzt wird:

3)

$$\int_{0,1}^{1} \lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 2\lg 2,$$

$$\int_{0,1}^{2} \lg\frac{1+x}{1-x}(\partial x)^2 = 2\lg 2-1,$$

$$\int_{0,1}^{3} \lg\frac{1+x}{1-x}(\partial x)^3 = \frac{4}{3}\lg 2-\frac{5}{6},$$

$$\int_{0,1}^{4} \lg\frac{1+x}{1-x}(\partial x)^4 = \frac{2}{3}\lg 2-\frac{4}{9},$$

$$\int_{0,1}^{5} \lg\frac{1+x}{1-x}(\partial x)^5 = \frac{4}{15}\lg 2-\frac{131}{720},$$

$$\int_{0,1}^{6} \lg\frac{1+x}{1-x}(\partial x)^6 = \frac{4}{45}\lg 2-\frac{661}{10800},$$

u. s. w.

Aus Nr. 2) erhält man für $m=1$:

4)

$$\int_{0,0}^{1} \lg(1-x^2)\partial x = 2\lg 2-2,$$

$$\int_{0,1}^{2} \lg(1-x^2)(\partial x)^2 = 2\lg 2-\frac{3}{2},$$

$$\int_{0,1}^{3} \lg(1-x^2)(\partial x)^3 = \frac{4}{3}\lg 2-\frac{17}{18},$$

$$\int_{0,1}^{4} \lg(1-x^2)(\partial x)^4 = \frac{2}{3}\lg 2-\frac{67}{144},$$

$$\int_{0,1}^{5} \lg(1-x^2)(\partial x)^5 = \frac{4}{15}\lg 2-\frac{667}{3600},$$

$$\int_{0,1}^{6} \lg(1-x^2)(\partial x)^6 = \frac{4}{45}\lg 2-\frac{37}{600},$$

$$\int_{0,1}^{7} \lg(1-x^2)(\partial x)^7 = \frac{8\lg 2}{315}-\frac{1553}{8820},$$

u. s. w.

Eben so lässt sich eine Menge Integrale von anderer Form ableiten. Setzt man eine gebrochene Zahl für m in Nr. 2), so erhält man für den Werth $m=\frac{1}{2}$ aus Nr. 2) folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1-x)\partial x}{\sqrt{x}} = 4\lg 2 - 4,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\lg(1-x)\partial x}{\sqrt{x}} = 8\lg 2 - 6,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\lg(1-x)\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{69}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\lg(1-x)\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{67}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\int \frac{\lg(1-x)\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{128\lg 2}{15} - \frac{5336}{900},$$

u. s. w.

Für $m=\frac{2}{3}$ entstehen folgende Integrale:

6)

$$\int_0^1 \sqrt{x}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{4\lg 2}{3} - \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\partial x\int \sqrt{x}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{8\lg 2}{9} - \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\partial x\int \sqrt{x}\partial x\int \sqrt{x}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{32\lg 2}{81} - \frac{68}{243},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\partial x\int \sqrt{x}\partial x\int \sqrt{x}\partial x\int \sqrt{x}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{32}{243}\lg 2 - \frac{67}{729},$$

u. s. w.

Die Darstellungen lassen sich, wie man sieht, beliebig fortsetzen und durch andere vermehren.

II.

Bemerkungen über Curvenreihen von beliebigem Index.

Von
Herrn *G. Battaglini*,
Professor der Mathematik in Neapel.

[Nach dem „Rendiconto della R. Accademia delle Science Fisiche e Matematiche di Napoli, Fascicolo 6. — Giugno 1863“ deutsch von Herrn Maximilian Curtze aus Bernburg.]

Nachdem der berühmte Geometer Herr E. de Jonquières darauf aufmerksam gemacht hat, dass einige seiner Lehrsätze in Bezug auf Curvenreihen von beliebigem Index in gewisser Weise zu modificiren seien*), sind wir, um von diesen Veränderungen Rechenschaft zu geben, auf die folgenden Betrachtungen geführt worden.

Es sei $U=0$ die in x, y, z homogene Gleichung einer Curve C_n des n-ten Grades, und es seien ferner die Coefficienten der in beliebiger Ordnung geschriebenen Glieder dieser Gleichung durch

$$H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, H_m, H_{m+1}$$

gegeben, wobei der Kürze wegen $\frac{1}{2}n(n+3)=m$ gesetzt ist.

Die Curve C_n setzen wir als $m-1$ Bedingungen unterworfen voraus, die, in die Sprache der Algebra übertragen, zwischen den Coefficienten H_i folgende homogene Gleichungen:

$$(1) \qquad U_1=0,\ U_2=0, \ldots,\ U_i=0, \ldots,\ U_{m-1}=0$$

bezüglich vom Grade $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_{m-1}$ ergeben mögen.

---

*) Giornale di Matematiche ad uso etc. Napoli 1863, pag. 128.

Indem wir jetzt durch ξ_i und η_i und durch α_i und β_i beliebige Coefficienten bezeichnen, durch $\frac{\xi}{\eta}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ aber unbestimmte Parameter, stellen wir die beiden Gleichungen

(2)

$$U_m = (\xi_1\eta - \eta_1\xi)H_1 + \ldots + (\xi_i\eta - \eta_i\xi)H_i + \ldots + (\xi_{m+1}\eta - \eta_{m+1}\xi)H_{m+1} = 0$$

$$U_{m+1} = (\alpha_1\beta - \beta_1\alpha)H_1 + \ldots + (\alpha_i\beta - \beta_i\alpha)H_i + \ldots + (\alpha_{m+1}\beta - \beta_{m+1}\alpha)H_{m+1} = 0$$

auf, und, nach Elimination der $m+1$ Coefficienten H_i zwischen den $m+1$ homogenen Gleichungen (1) und (2), bezeichnen wir die dadurch entstehende Endgleichung in ξ, η und α, β auf folgende Weise:

$$(3) \qquad \varphi[(\xi_i\eta - \eta_i\xi), (\alpha_i\beta - \beta_i\alpha)] = \varphi(\xi, \eta; \alpha, \beta) = 0.$$

Dieselbe wird in Bezug auf die Grössen ξ, η und α, β homogen sein, und der Grad, in welchem sie dieselben enthält, ist $N = n_1 . n_2 \ldots . n_{m-1}$.

Die Gleichung (3) kann man benutzen, um die Endgleichung zwischen zwei beliebigen H_i darzustellen, welche durch Elimination aller anderen H_i zwischen den m Gleichungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0, \ldots, U_m = 0$ entsteht, indem man in angemessener Weise alle α_i und β_i mit Ausnahme je eines von ihnen der Null gleich setzt, so dass dann offenbar $\frac{\alpha}{\beta}$ das Verhältniss zwischen zwei der Coefficienten H_i vorstellt. Auf diese Weise lassen sich die Coefficienten H_i mittelst des Parameters $\frac{\xi}{\eta}$ ausdrücken, und damit hat man die Gleichung der Curve C_n, welche den $m-1$ gegebenen Bedingungen genügt, und der Zahl dieser Bedingungen gemäss einen beliebigen Parameter haben muss.

In der soeben nachgewiesenen Gleichung ist im Allgemeinen der Parameter $\frac{\xi}{\eta}$ nicht rational enthalten. Um die Gleichung von C_n in Bezug auf ξ und η rational zu bekommen, genügt es, in der Gleichung (3) den Coefficienten $\alpha_i\beta - \beta_i\alpha$ von H_i in der Gleichung $U_{m+1} = 0$ in das Monom vom n-ten Grade zwischen x, y, z zu verwandeln, das in der Gleichung $U = 0$ den Coefficienten H_i hat. Die hierdurch entstehende Gleichung, die wir durch $\Theta(x, y, z; \xi, \eta) = 0$ bezeichnen wollen, ist in ξ, η vom Grade N, in x, y, z aber vom Grade $N.n$. Dadurch hat man folgenden Satz:

Ist eine Curve C_n des n-ten Grades $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Be-

dingungen unterworfen, und bezeichnet N das Product der Grade der Gleichungen zwischen den Coefficienten der Gleichung von C_n, die algebraisch diese Bedingungen ausdrücken, so erhebt sich der Grad der Gleichung von C_n zwischen den Coordinaten, die einen unbestimmten Parameter enthalten muss, sobald sie in Bezug auf diesen Parameter rational ist und ihn im Grade N enthält, auf $N.n$.

Die Gleichung der Curve C_n wird eine von $\Theta = 0$ verschiedene Gestalt annehmen, wenn man für $\frac{\xi}{\eta}$ einen anderen Parameter $\frac{\xi'}{\eta'}$ einführt. Es sei $V'(\xi, \eta; \xi', \eta') = 0$ eine Relation zwischen den beiden Parametern und zwar für ξ und η vom k-ten, für ξ' und η' vom k'-ten Grade; eliminirt man dann $\frac{\xi}{\eta}$ zwischen $\Theta = 0$ und $V' = 0$, so nimmt die Gleichung für C_n die Form $\Theta' = 0$ an, die in ξ' und η' vom Grade $N.k'$ in x, y, z aber vom Grade $N.n.k$ ist.

Augenblicklich ist nun klar, dass unter den Curven C_n, welche den gegebenen Bedingungen unterworfen sind, und allgemein durch die Gleichung $\Theta = 0$ repräsentirt werden, immer N sein werden, die durch einen bestimmten Punkt gehen. Die Curven C_n bilden daher, wie man zu sagen pflegt, eine Reihe S vom Index N. Nimmt man an Stelle von $\Theta = 0$ als Gleichung von C_n die zweite Gleichung $\Theta' = 0$, so erscheint die Reihe S' von Curven C_n mit dem Index $N.k'$; aber eine solche Reihe muss als aus k' Reihen gebildet betrachtet werden, die auf einander fallen. Denn der Relation $V' = 0$ gemäss gibt es k' Werthe von $\frac{\xi'}{\eta'}$, welche einem und demselben Werthe von $\frac{\xi}{\eta}$ entsprechen, und demgemäss gibt es auch k' Curven der Reihe S', die mit ein und derselben Curve der Reihe S zusammenfallen.

Eine Curvenreihe, die nicht aus Theilreihen zusammengesetzt ist, die auf einander fallen, heisst eine irreducible Reihe. Der wahre Index der Reihe von Curven C_n, welche den gegebenen Bedingungen Genüge leisten, ist durch den niedrigsten Grad N des Parameters $\frac{\xi}{\eta}$ gegeben, der in die Gleichung dieser Curven eintritt, das heisst, der wahre Index ist der Index der irreducibleu Reihe von Curven C_n.

In dem speciellen Falle, dass die Wurzeln $\frac{\alpha}{\beta}$ der Gleichung (3)

sich rational durch $\frac{\xi}{\eta}$ ausdrücken lassen, gilt dasselbe auch für die Coefficienten H_i; und die Gleichung von C_n lässt sich dann durch $\Theta_i = 0$ darstellen, die in x, y, z vom n-ten Grade, in ξ und η aber von einem gewissen Grade N_i sein wird; die Note i bezieht sich hierbei auf die verschiedenen Wurzeln $\frac{\alpha}{\beta}$ der Gleichung (3). Die Reihe S nennt man in diesem Falle rational. Man kann dieselbe als aus mehreren einfachen Reihen S_i vom Index N_i zusammengesetzt betrachten, so dass dann der Index von S die Summe der Indices der Partialreihen S_i ist. Jede der Reihen S_i kann nun irreducibel oder nicht sein. Sind alle Reihen S_i irreducibel, so heisst auch die Reihe S irreducibel.

Wir betrachten jetzt zwei Reihen S' und S'' von Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ bezüglich vom Grade n' und n'' und vom Index N' und N''. Die Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ seien im Allgemeinen durch die Gleichungen

$$\Theta'(x, y, z;\ \xi', \eta') = 0, \qquad \Theta''(x, y, z;\ \xi'', \eta'') = 0$$

gegeben, die in x, y, z bezüglich vom Grade $N'n'$ und $N''n''$, für ξ', η' und ξ'', η'' aber bezüglich vom Grade N' und N'' seien. Stehen die Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ unter sich in einem Verhältniss der Abhängigkeit erster Ordnung, das heisst, entsprechen sie sich in der Art, dass zu jeder Curve der ersten Reihe eine einzige Curve der zweiten Reihe gehört, und umgekehrt, so muss zwischen den Parametern $\frac{\xi'}{\eta'}$ und $\frac{\xi''}{\eta''}$ eine Relation bestehen, die für beide vom ersten Grade ist, und die wir durch $W(\xi', \eta';\ \xi'', \eta'') = 0$ bezeichnen wollen.

Den Ort Γ der Durchnittspunkte der entsprechenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ erhält man, indem man $\frac{\xi'}{\eta'}$ und $\frac{\xi''}{\eta''}$ zwischen den drei Gleichungen $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$, $W = 0$ eliminirt. Es entsteht hierdurch zwischen den Coordinaten eine Gleichung vom Grade

$$N'n'.N'' + N''n''.N' = N'.N''(n' + n'').$$

Hieraus folgt:

Sind zwei Reihen S' und S'' von Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ bezüglich vom Grade n' und n'' und vom Index N' und N'' gegeben, die unter sich in einem Abhängigkeitsverhältniss erster Ordnung stehen, so ist der Ort Γ

der Durchschnittspunkte der entsprechenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ vom Grade $N'.N''(n'+n'')$.

Sind die Reihen S' und S'' rational und zusammengesetzt, so ist die Curve Γ ebenfalls aus mehreren Curven Γ_i zusammengesetzt, welche die Orte der Durchschnittspunkte der correspondirenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ sind, die den einfachen entsprechenden Reihen S_i' und S_i'' angehören, welche Theile der vorgelegten Reihen bilden. Sind diese einfachen Reihen vom Index N_i' und N_i'', so ist der Grad von Γ_i gleich $N_i'n''+N_i''n'$. Da nun die Indices N' und N'' der Reihen S' und S'' die Summe der Indices der Partialreihen S_i' und S_i'' sind, so wird die Curve Γ eine Curven-Gruppe des $(N'n''+N''n')$-ten Grades bilden, die aus Partialcurven Γ_i vom Grade $N_i'n''+N_i''n'$ zusammengesetzt ist. Daher entsteht:

Der Ort der Durchnittspunkte der entsprechenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ bezüglich vom n'-ten und n''-ten Grade zweier rationaler Curvenreihen S' und S'' vom Index N' und N'', die unter sich in einem Abhängigkeitsverhältniss erster Ordnung stehen, ist vom Grade $N'n''+N''n'$. Die Curve Γ zerfällt in Partialcurven Γ_i vom Grade $N_i'n''+N_i''n'$, wenn die Reihen S' und S'' aus einfachen Partialreihen S_i' und S_i'' bezüglich vom Index N_i' und N_i'' zusammengesetzt sind.

Die Gleichungen $\Theta'=0$ und $\Theta''=0$ der Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ kann man in der Art reduciren, dass sie nur einen einzigen der beiden Parameter $\frac{\xi'}{\eta'}$ und $\frac{\xi''}{\eta''}$ enthalten, indem man den anderen mittelst der Gleichung $W=0$ eliminirt, ohne dass dadurch die Indices der Reihen S' und S'' irgendwie verändert werden. Wir dürfen also für das Folgende voraussetzen, dass die Gleichungen $\Theta'=0$ und $\Theta''=0$ einen und denselben Parameter $\frac{\xi}{\eta}$ enthalten.

Transformiren wir die Reihen S' und S'' in zwei andere $(S')^k$ und $(S'')^k$, indem wir eine Relation $V(\xi,\eta;\xi_k,\eta_k)=0$ zwischen dem Parameter $\frac{\xi}{\eta}$ und einem andern Parameter $\frac{\xi_k}{\eta_k}$ voraussetzen, die für ξ und η vom ersten Grade, für ξ_k und η_k aber vom k-ten Grade ist, so erscheint der Ort $(\Gamma)^k$ der Durchschnittspunkte der entsprechenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ vom Grade $N'N''(n'+n'')k$. Es ist aber leicht ersichtlich, dass die Curve $(\Gamma)^k$ nichts weiter ist, als die k-mal aufeinandergelegte, durch die Reihen S' und S'' gegebene Curve Γ, da in den Reihen $(S')^k$ und $(S'')^k$ k ein-

ander entsprechende Curvenpaare $C_{n'}$ und $C_{n''}$ existiren, die bezüglich mit ein und demselben Paar entsprechender Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ der Reihen S' und S'' zusammenfallen.

Sind die Reihen S' und S'' rational, und man transformirt in ähnlicher Weise die Partialreihen S_i' und S_i'' derselben in $(S_i')^k$ und $(S_i'')^k$ mittelst der Relation $V=0$, so ist der Ort $(\Gamma_i)^k$ der Durchschnittspunkte der entsprechenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ in diesen Reihen, obwol sie scheinbar vom Grade $(N_i'n''+N_i''n')k$ ist, die nämliche Curve Γ_i, die durch die Reihe S_i' und S_i'' gegeben ist, nur k-mal aufeinandergelegt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass, um den wahren Grad der Curve Γ zu erhalten, man zunächst untersuchen muss, ob die gegebenen Reihen auf andere Reihen von niederem Index reducirbar sind. Der gesuchte Grad von Γ wird dann der sein, der den irreducibleu Reihen entspricht. Sind die Reihen rational, so kann die Reduction sowol für eine als für mehrere Paare von entsprechenden Partialreihen eintreten, entweder indem sie sich auf einen niederen Index reduciren, oder weil mehrere Partialreihen auf einander fallen. In jedem dieser Fälle ist leicht zu sehen, um wieviel der Grad von Γ zu erniedrigen sein wird.

Endlich gibt es noch eine weitere Reduction des Grades von Γ, sobald nämlich die entsprechenden Curven $C_{n'}$ und $C_{n''}$ aus Partialcurven zusammengesetzt sind, von denen einige unter einander zusammenfallen, sei es, dass dieses in allen beiden Reihen S' und S'' Statt hat, oder nur in einer derselben, ebenso wenn dieser Umstand für zwei rationale Reihen, sei es in ihrem ganzen Verlaufe oder nur für einige Partialreihen derselben, eintritt. In einem solchen Falle muss der Grad von Γ in angemessener Weise erniedrigt werden, da dann diese Curve aus Partialcurven zusammengesetzt ist, von denen einige ein- oder mehrmal unter sich zusammenfallen.

Anmerkung des Herausgebers.

Die Uebersetzung des vorstehenden schönen Aufsatzes von Herrn Battaglini in Neapel ist ausser seines eigenen Interesses wegen auch mit besonderer Rücksicht auf den im Literar. Ber. Nr. CLXI. S. 6—S. 9. abgedruckten Brief des Herrn Jonquières aus Vera Cruz 6. Fevrier 1863 und zugleich mit Bezug auf die bei'm Verleger des Archivs nächstens erscheinende deutsche Uebersetzung der trefflichen Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane von Herrn Cremona in Bologna hier abgedruckt.

III.

Ueber die Krümmung der Flächen.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Die Untersuchungen über die Krümmung der Flächen beruhen auf der Betrachtung derjenigen Differentialcoefficienten, welche sich aus der Differenziation der allgemeinen Gleichung mit drei Veränderlichen ergeben. Die Differentialcoefficienten erster Ordnung führen zu den Eigenschaften der Tangential-Ebenen und Normalen, der Berührungcylinder, Berührungskegel, Pole, Polaren und Polar-Ebenen. Die Sätze von Euler und Meunier über die Krümmungshalbmesser der Normal- und schiefen Schnitte, von Bertrand und Joachimsthal über die unendlich nahen Normalen in einem Punkt einer Fläche, und Anderen, sind aus den Eigenschaften der Differentialcoefficienten zweiter Ordnung abgeleitet. Um weitere Aufschlüsse über die Krümmung der Flächen zu bekommen, muss man zur dritten Ordnung übergehen. Das Folgende ist ein Versuch, Einiges zur Ausführung dieses Gedankens beizutragen.

§. 1. Allgemeine Formeln. Der Halbmesser der geodätischen Krümmung.

Aus der allgemeinen Gleichung einer Fläche $z=f(x,y)$ entstehen durch partielle Differenziation folgende Differenzialcoefficienten:

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q;\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dxdy}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=u,\quad \frac{d^3z}{dx^2dy}=u,\quad \frac{d^3z}{dxdy^2}=v,\quad \frac{d^3z}{dy^3}=w;$$

Diese Ausdrücke beruhen darauf, dass man von dem gegebenen Punkte M der Fläche zu anderen unendlich nahen M', M''... übergeht, die so liegen, dass die Projection von $MM'M''$ auf der xy-Ebene entweder parallel der x-Axe oder der y-Axe ist. Will man dagegen von M zu einem beliebigen, unendlich nahen Punkte der Fläche übergehen, so bedient man sich folgender Gleichungen:

1)

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy;$$

und will man von M' zu einem weiteren Punkte M'' übergehen, so ist zu setzen:

$$d^2p = drdx + dsdy + rd^2x + sd^2y, \quad d^2q = dsdx + dtdy + sd^2x + td^2y;$$

$$dr = udx + u_1dy, \quad ds = u_1dx + vdy, \quad dt = vdx + wdy;$$

somit:

$$2) \quad \begin{cases} d^2p = udx^2 + 2u_1dxdy + vdy^2 + rd^2x + sd^2y, \\ d^2q = u_1dx^2 + 2vdxdy + wdy^2 + sd^2x + td^2y. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise bediene ich mich noch folgender Buchstaben:

$$k = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \mu = dpdx + dqdy = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2.$$

Das Linienelement auf der Fläche wird mit $d\sigma$ bezeichnet und als constant angesehen, also ist:

$$d^2\sigma = 0.$$

Wir nehmen auf der Fläche ein weiteres Linien-Element $M'M'''$ an, welches senkrecht ist auf MM' und mit $M'M''$ einen unendlich wenig von 90^0 abweichenden Winkel bildet, dessen Ergänzung zu 90^0 wir ω nennen. Die Projectionen der Elemente MM' und $M'M'''$ auf den Axen sind beziehungsweise dx, dy, dz und dx', dy', dz'; α, β, γ sind die Winkel, welche $M'M'''$ mit den Axen bildet. Da $M'M'''$ in der Tangential-Ebene von M liegt, so ist:

$$dz' = pdx' + qdy',$$

und da der Winkel $MM'M''' = 90^0$ ist, so hat man:

$$dxdx' + dydy' + dzdz' = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$dx' + \frac{qdz + dy}{qdx - pdy} dz' = 0, \quad dy' - \frac{pdz + dx}{qdx - pdy} dz' = 0;$$

$$\cos\alpha = \frac{qdz + dy}{kd\sigma}, \quad \cos\beta = -\frac{pdz + dx}{kd\sigma}, \quad \cos\gamma = \frac{pdy - qdx}{kd\sigma};$$

indem man bemerkt, dass der Ausdruck:

$$(qdz + dy)^2 + (pdz + dx)^2 + (pdy - qdx)^2 = k^2 d\sigma^2$$

ist, weil

$$dz = pdx + qdy.$$

Die Cosinus der Winkel, welche MM' mit den Axen bildet, sind:

$$\frac{dx}{d\sigma}, \quad \frac{dy}{d\sigma}, \quad \frac{dz}{d\sigma};$$

die Cosinus der Winkel, welche das nächstfolgende Element $M'M''$ mit den Axen bildet, sind:

$$\frac{dx}{d\sigma} + d\frac{dx}{d\sigma}, \quad \frac{dy}{d\sigma} + d\frac{dy}{d\sigma}, \quad \frac{dz}{d\sigma} + d\frac{dz}{d\sigma};$$

oder, da

$$d\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\sigma d^2x - dx d^2\sigma}{d\sigma^2} = \frac{d^2x}{d\sigma}, \quad \text{weil} \quad d^2\sigma = 0;$$

und ebenso

$$d\frac{dy}{d\sigma} = \frac{d^2y}{d\sigma} \quad \text{und} \quad d\frac{dz}{d\sigma} = \frac{d^2z}{d\sigma}$$

ist:

$$\frac{dx}{d\sigma} + \frac{d^2x}{d\sigma}, \quad \frac{dy}{d\sigma} + \frac{d^2y}{d\sigma}, \quad \frac{dz}{d\sigma} + \frac{d^2z}{d\sigma}.$$

Somit ist nach der allgemeinen Cosinusformel der Cosinus zwischen den Elementen $M'M''$ und $M''M'''$ oder

$$\sin\omega = \left(\frac{dx}{d\sigma} + \frac{d^2x}{d\sigma}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dy}{d\sigma} + \frac{d^2y}{d\sigma}\right)\cos\beta + \left(\frac{dz}{d\sigma} + \frac{d^2z}{d\sigma}\right)\cos\gamma,$$

3)

$$\sin\omega = \frac{1}{k.d\sigma^2}\{d^2x(qdz + dy) - d^2y(pdz + dx) + d^2z(pdy - qdx)\}.$$

Die Grösse $\sin\omega = \omega$ ist die geodätische Krümmung (courbure géodésique nach Liouville) der Linie $MM'M''$; und der Halbmesser der geodätischen Krümmung, welchen wir mit ϱ_g bezeichnen, ist:

$$\varrho_g = \frac{d\sigma}{\omega}.$$

Wir verlängern das Element MM' nach A, so dass die drei Punkte M, M', A in Einer Normal-Ebene der Fläche liegen, oder, was Dasselbe ist, einer geodätischen Linie angehören; dann ist nach unserer Erklärung:

$$\omega = M''M'A.$$

Die geodätische Krümmung einer Linie auf einer Fläche gibt also ihre Abweichung von der sie berührenden geodätischen Linie an, wie die Krümmung einer ebenen Kurve ihre Abweichung von der sie berührenden Geraden angibt. Letztere Krümmung ist eine absolute, während die geodätische Krümmung eine relative ist; unter relativer Krümmung ist die Abweichung einer Kurve von einer sie berührenden zweiten Kurve zu verstehen.

Wir verlängern das Element MM' in gerader Richtung nach B, so dass also MB Eine gerade Linie ist, und nehmen

$$MM' = M'M'' = M'A = M'B = 1$$

an; so bilden die drei Punkte $M''AB$ ein unendlich kleines Dreieck, welches bei A rechtwinklig ist. Nun ist $M''B$ die absolute Krümmung der gegebenen Linie $MM'M''$; den Krümmungshalbmesser derselben nennen wir ϱ'; AM'' ist die geodätische Krümmung der gegebenen Linie, und AB ist die (absolute) Krümmung der berührenden geodätischen Linie oder des Normalschnitts der Fläche, dessen Krümmungshalbmesser wir ϱ nennen; ferner ist der Winkel $M''BA = \Omega$ der Winkel zwischen der Oskulations-Ebene $MM'M''$ der gegebenen Linie und der Normal-Ebene der Fläche. Das Dreieck $M''AB$ liefert nun folgende Relationen:

$$M''B^2 = AB^2 + AM''^2,$$

oder, da

$$M''B = \frac{d\sigma}{\varrho'}, \quad AB = \frac{d\sigma}{\varrho} \quad \text{und} \quad AM = \frac{d\sigma}{\varrho_g}$$

ist:

$$4) \qquad \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho_g^2}.$$

Das Quadrat der absoluten Krümmung einer Linie auf einer Fläche ist gleich dem Quadrat der Krümmung der tangirenden geodätischen Linie, vermehrt um das Quadrat der geodätischen Krümmung.

Ferner ist:

$$AB = M''B . \cos ABM'',$$

oder nach unserer Bezeichnung:

$$5) \qquad \varrho' = \varrho \cos \Omega.$$

Diess ist der bekannte Satz von **Meunier**.

Weiter ist:

$$AM'' = AB . \operatorname{tg} ABM'',$$

oder:

$$6) \qquad \frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\varrho} \operatorname{tg} \Omega.$$

Die geodätische Krümmung einer Linie auf einer Fläche ist gleich der Krümmung des berührenden Normalschnitts mal der Tangente des Winkels zwischen diesem Normalschnitt und der Oskulations-Ebene der gegebenen Linie.

Wie bekannt, ist

$$\varrho = \frac{kd\sigma^2}{\mu}.$$

Nach dem Obigen ist $\varrho_g = \frac{d\sigma}{\omega}$, oder, da $\omega = \sin \omega$ ist:

$$7) \qquad \varrho_g = \frac{kd\sigma^3}{d^2x(qdz + dy) - d^2y(pdz + dx) + d^2z(pdy - qdx)}.$$

Hieraus folgt, weil $\varrho = \varrho_g \operatorname{tg} \Omega$ ist:

$$8) \qquad \operatorname{tg} \Omega = \frac{1}{\mu d\sigma} \{d^2x(qdz + dy) - d^2y(pdz + dx) + d^2z(pdy - qdx)\}.$$

Um die Werthe von d^2x, d^2y, d^2z zu bestimmen, haben wir folgende Gleichungen:

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0,$$

$$pd^2x + qd^2y - d^2z = -\mu,$$

$$(qdz + dy)d^2x - (pdz + dx)d^2y + (pdy - qdx)d^2z = \mu d\sigma \operatorname{tg} \Omega.$$

Die erste dieser Formeln ergibt sich durch Differenziation von $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, da $d^2\sigma = 0$; die zweite folgt aus der Differenziation der Gleichung der Tangential-Ebene:

$$dz = pdx + qdy.$$

Die Elimination von d^2x, d^2y, d^2z, welche sich durch Determinanten sehr leicht bewerkstelligen lässt, liefert nachstehende Werthe:

$$9)\quad \begin{cases} d^2x = -\frac{p}{k^2}\mu + \frac{\operatorname{tg}\Omega}{k^2 d\sigma}\mu(qdz + dy), \\ d^2y = -\frac{q}{k^2}\mu - \frac{\operatorname{tg}\Omega}{k^2 d\sigma}\mu(pdz + dx), \\ d^2z = \quad \frac{1}{k^2}\mu + \frac{\operatorname{tg}\Omega}{k^2 d\sigma}\mu(pdy - qdx). \end{cases}$$

Bei dieser Elimination ist, wie oben, zu bemerken, dass

$$(qdz + dy)^2 + (pdz + dx)^2 + (pdy - qdx)^2 = k^2 d\sigma^2$$

ist.

§. 2. Die Poldistanz.

Auf einer Fläche liegt eine Linie, von welcher M, M', M'' drei auf einander folgende Punkte sind. Die Tangential-Ebenen von M und M' schneiden sich in einer Geraden, der konjugirten Tangente des Elements MM'; ebenso schneiden sich die Tangential-Ebenen von M' und M'' in der konjugirten Tangente von $M'M''$. Die beiden konjugirten Tangenten schneiden sich in einem Punkte P, welchen ich den Pol der Oskulations-Ebene $MM'M''$ nenne, oder auch bloss des Punktes M, da im Allgemeinen jedem Punkte einer Linie auf einer Fläche eine besondere Oskulations-Ebene entspricht. Die Entfernung MP ist die Poldistanz.

Die konjugirte Tangente des Elements MM', welche auf den Tangential-Ebenen von M und M' zugleich liegt, muss folgenden Gleichungen entsprechen:

$$dz = pdx + qdy,$$
$$dz = (p + dp)dx + (q + dq)dy$$

oder:

$$\mu = 0,$$

woraus man findet:

$$dx + \frac{dq}{m}dz = 0 \quad \text{und} \quad dy - \frac{dp}{m}dz = 0,$$

indem man zur Abkürzung $m = qdp - pdq$ setzt.

Die Gleichungen einer durch den Ursprung parallel gezogenen Geraden sind:

$$x+\frac{dq}{m}z=0,\quad y-\frac{dp}{m}z=0.$$

Also sind die Gleichungen einer durch den Ursprung mit der unendlich nahen konjugirten Tangente des Elements $M'M''$ parallel gezogenen Geraden:

$$x+\left(\frac{dq}{m}+d\frac{dq}{m}\right)z=0,\quad y-\left(\frac{dp}{m}+d\frac{dp}{m}\right)z=0.$$

Den Winkel zwischen diesen beiden unendlich nahen konjugirten Tangenten nennen wir τ und erhalten:

$$\operatorname{tg}\tau=\frac{1}{A}\sqrt{\left\{\left(d\frac{dq}{m}\right)^2+\left(d\frac{dp}{m}\right)^2+\frac{1}{m^2}\left(dp\,d\frac{dq}{m}-dq\,d\frac{dp}{m}\right)^2\right\}},$$

wo
$$A=\frac{dq}{m}\left(\frac{dq}{m}+d\frac{dq}{m}\right)+\frac{dp}{m}\left(\frac{dp}{m}+d\frac{dp}{m}\right)+1.$$

Man findet durch Differenziation:

$$d\frac{dp}{m}=p\frac{dp\,d^2q-dq\,d^2p}{m^2},\quad d\frac{dq}{m}=q\frac{dp\,d^2q-dq\,d^2p}{m^2};$$

also:

$$\operatorname{tg}\tau=\frac{k}{m^2}\cdot\frac{dp\,d^2q-dq\,d^2p}{A}.$$

Da in dem Ausdruck von A die Grössen $d\frac{dq}{m}$ und $d\frac{dp}{m}$ neben $\frac{dq}{m}$ und $\frac{dp}{m}$ verschwinden, so ist

$$A=\left(\frac{dq}{m}\right)^2+\left(\frac{dp}{m}\right)^2+1;$$

also, wenn wir für m seinen Werth setzen:

$$10)\qquad \operatorname{tg}\tau=k\frac{dp\,d^2q-dq\,d^2p}{dp^2+dq^2+(q\,dp-p\,dq)^2}.$$

Die konjugirten Tangenten von MM' und $M'M''$ schneiden sich im Pol P, somit ist:

$$MP=\frac{MM'.\sin MM'P}{\operatorname{tg}\tau}.$$

Für $\sin MM'P$ erhalten wir aber aus den Gleichungen der Durchschnittslinie der Tangential-Ebenen von M und M', und weil $\frac{dx}{MM'}, \frac{dy}{MM'}, \frac{dz}{MM'}$ die Cosinus der Winkel sind, welche MM' mit den Axen bildet:

$$\sin MM'P = \frac{k\mu}{MM'.\sqrt{dp^2+dq^2+(qdp-pdq)^2}}.$$

Hiernach ist:

$$11)\qquad MP = \frac{\mu\sqrt{dp^2+dq^2+(qdp-pdq)^2}}{dp\,d^2q-dq\,d^2p}.$$

Um diesen Ausdruck zu entwickeln, substituiren wir die Werthe von dp, dq, d^2p, d^2q aus 1) und 2), und erhalten:

12)

$$\sqrt{dp^2+dq^2+(qdp-pdq)^2} = \sqrt{[\{(1+q^2)r^2+(1+p^2)s^2-2pqrs\}dx^2 + \{(1+q^2)s^2+(1+p^2)t^2-2pqst\}dy^2 + 2\{(1+q^2)rs+(1+p^2)st-pq(rt+s^2)\}dxdy]},$$

13)

$$dp\,d^2q-dq\,d^2p = (ur-us)dx^3+(2vr-ut-us)dx^2dy + (vs+wr-2wt)dx\,dy^2+(ws-vt)dy^3 + \frac{s^2-rt}{k^2}\{qrdx^3+(2qs-pr)dx^2dy+(qt-2ps)dxdy^2+ptdy^3+\mu d\sigma \operatorname{tg}\Omega\}.$$

Bei der Entwicklung dieses Ausdrucks hat man in den Werthen von d^2p und d^2q nach 2) diejenigen von d^2x und d^2y nach 9) zu substituiren; und dann ist bei der Entwicklung des Faktors von $\operatorname{tg}\Omega$ zu bemerken, dass

$$\{s(qdz+dy)-t(pdz+dx)\}(rdx+sdy) - \{r(qdz+dy)-s(pdz+dx)\}(sdx+tdy) = (s^2-rt)d\sigma^2$$

wird, wenn man die Gleichungen

$$dz^2 = (pdx+qdy)^2 \quad \text{und} \quad d\sigma^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$

berücksichtigt.

Somit wäre der allgemeine Ausdruck der Poldistanz eines Punktes einer Linie auf einer Fläche gefunden, und durch die Differenzialcoefficienten der drei ersten Ordnungen gegeben. Ω ist der Winkel zwischen der Oskulations-Ebene der Linie und der durch ihre Tangente gehenden Normal-Ebene der Fläche. $\frac{dx}{d\sigma}$ und $\frac{dy}{d\sigma}$ sind die Cosinus der Winkel, welche diese Tangente mit den x- und y-Axen macht.

Sämmtliche Differenzial-Quotienten sind für einen bestimmten Punkt der Fläche konstant; ihr Werth verändert sich nur bei'm

Uebergang zu einem anderen Punkte der Fläche. Für alle Linien der Fläche, welche sich in diesem Punkte berühren, haben auch $\frac{dx}{d\sigma}$ und $\frac{dy}{d\sigma}$ denselben Werth. Veränderlich sind dann in der Gleichung 11) (mit 12) und 13)) nur die Poldistanz MP und der Winkel Ω; dividiren wir Zähler und Nenner des Bruchs mit dem Faktor von $\operatorname{tg}\Omega$ und bezeichnen mit C und C' zwei konstante Grössen, so nimmt die Gleichung 11) folgende Form an:

$$14)\qquad MP = \frac{C}{C' + \operatorname{tg}\Omega}.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

Bei allen Linien auf einer Fläche, welche sich in einem Punkte berühren, sind für diesen Punkt die Pole und die Oskulations-Ebenen zwei involutorische Gebilde.

Dieser Satz, welcher bei den Flächen zweiten Grades längst bekannt ist, bedarf seiner vorliegenden Fassung nach einer näheren Erläuterung: Ein Ebenenbüschel (Ebenen mit gemeinschaftlicher Schnittlinie) ist in Involution, wenn er von irgend einer Geraden in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird, oder in einer solchen Reihe von Punkten, welche die Gleichung

$$(x \pm C')(y \pm C'') = C$$

befriedigen; C, C', C'' sind Konstanten, und x, y die Abstände zweier zusammengehörigen Punkte der Punktreihe von zwei festen Punkten der Geraden. Man sagt auch, ein Ebenenbüschel ist in Involution mit einer Punktreihe, wenn diess für irgend zwei entsprechende Punkte der letzteren, und einer den Ebenenbüschel schneidenden Geraden der Fall ist. Die Oskulations-Ebenen aller sich in Einem Punkte A berührenden Linien auf einer Fläche bilden einen Ebenenbüschel; wir ziehen durch A die Normale der Fläche, nehmen auf derselben den Punkt B an, so dass $AB = 1$ ist, ziehen durch B eine Linie senkrecht auf der durch AB und die gemeinschaftliche Tangente der Linien gehenden Ebene; letztere bildet mit einer der Oskulations-Ebenen, welche von der durch B gehenden Geraden in D geschnitten wird, den Winkel Ω, so ist $BD = \operatorname{tg}\Omega$. Wir verlängern BD über B hinaus nach E, so dass $BE = C'$ wird, so ist:

$$BE = C' + \operatorname{tg}\Omega.$$

Die Poldistanz, welche der durch A und D gehenden Oskulations-Ebene entspricht, sei MP, also:

$$MP.(C' + \operatorname{tg}\Omega) = C.$$

Diess ist eine besondere Form der oben aufgestellten, etwas allgemeineren Gleichung, woraus die Richtigkeit unseres Satzes folgt, d. h. die Gerade BD schneidet den Büschel der Oskulations-Ebenen in einer Reihe von Punkten D...., welche mit der Punktreihe der entsprechenden Pole P.... in Involution sind.

Soll die Poldistanz $= 0$ werden, so setzen wir in 11), da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, als die Summe von drei Quadraten, nicht $= 0$ werden kann,

$$\mu = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

woraus man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Dieser Ausdruck ist nur bei den ungleichartig gekrümmten Flächen (z. B. bei'm einmantligen Hyperboloid) reell, wo $s^2 - rt > 0$ ist, und liefert dann zwei Werthe welche bei den Flächen zweiten Grades den geradlinigen Erzeugenden entsprechen.

Soll dagegen die Poldistanz unendlich gross werden, so setzt man $dpd^2q - dqd^2p = 0$, für welchen Fall die Gleichung 13), da sie in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ vom dritten Grade ist, mindestens Einen reellen Werth für $\frac{dy}{dx}$ liefert, bei jedem Werthe von Ω. Hieraus folgt nachstehender Satz:

Unter allen Linien, welche durch einen Punkt einer Fläche gehen, und deren Oskulations-Ebenen denselben Winkel mit der Flächen-Normale (oder Tangential-Ebene) bilden, ist mindestens Eine, deren Poldistanz unendlich gross ist. In dem speciellen Fall, wo $\Omega = 0$, lautet der Satz: Unter allen Normalschnitten, welche durch einen Punkt einer Fläche gehen, ist wenigstens Einer, dessen Poldistanz unendlich gross ist.

Bei den Flächen zweiten Grades lässt sich diese Richtung leicht finden; man darf nur für einen bestimmten Werth Ω diejenige Oskulations-Ebene suchen, welche zugleich durch den Mittelpunkt der Fläche geht.

Wir nehmen nun dasjenige Coordinatensystem an, dessen z-Axe die Flächen-Normale, und dessen x- und y-Axen die

Tangenten der Krümmungslinien sind, so ist in den Gleichungen 11), 12) und 13)

$$p = q = s = 0$$

zu setzen, wodurch man erhält:

$$MP = \frac{(rdx^2 + tdy^2)\sqrt{r^2dx^2 + t^2dy^2}}{\left\{\begin{array}{c} urdx^3 - (ut - 2vr)dx^2dy + (vr - 2ut)dxdy^2 \\ - vtdy^3 - rtd\sigma(rdx^2 + tdy^2)\operatorname{tg}\Omega \end{array}\right\}}. \tag{15}$$

Um die Poldistanzen der durch die Krümmungslinien gehenden Normalschnitte, die wir $\mathfrak{p}$ und $-\mathfrak{p}'$ nennen, zu bekommen, setzen wir $\Omega = 0$, und zugleich entweder $dy = 0$ oder $dx = 0$, und erhalten:

$$\mathfrak{p} = \frac{r}{u}, \quad \mathfrak{p}' = \frac{t}{v}. \tag{16}$$

Bezeichnen wir die den Krümmungslinien $dy = 0$ und $dx = 0$ entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche mit R und R', so ist

$$R = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad R' = \frac{1}{t},$$

also:

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{Ru} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}' = \frac{1}{R'v}. \tag{17}$$

Somit wäre die geometrische Bedeutung der beiden Differenzialcoefficienten

$$u = \frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{1}{\mathfrak{p}R}$$

und

$$v = \frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{1}{\mathfrak{p}'R'}$$

für das angegebene Coordinatensystem gefunden.

§. 3. Die Krümmungshalbmesser von den Evoluten der Flächenschnitte.

Durch einen Punkt einer Fläche geht eine Ebene, welche mit der Tangential-Ebene den Winkel $90^0 - \Omega$ bildet. Diese Ebene

schneidet die Fläche in einer Kurve, deren Krümmungshalbmesser wir ϱ' nennen; r' ist der Krümmungshalbmesser der Evolute dieser Kurve, also, wenn das Linien-Element $= d\sigma$ gesetzt und als constant angesehen wird:

$$r' = \varrho' \frac{d\varrho'}{d\sigma}.$$

Diese Formel beruht darauf, dass die gegebene Kurve und ihre Evolute gleiche Contingenzwinkel haben, und dass das Element der letzteren $= d\varrho'$ ist. Nach dem Satze von Meunier ist

$$\varrho = \varrho \cos \Omega.$$

ϱ ist der Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnitts, welcher durch den Durchschnitt des schiefen Schnitts mit der Tangential-Ebene geht und der mit letzterem den Winkel Ω bildet. Allgemein ist:

$$\varrho = \frac{kd\sigma^2}{\mu},$$

also:

$$\varrho' = \frac{kd\sigma^2}{\mu} \cos\Omega, \qquad d\varrho' = d\sigma^2 \cos \Omega \frac{\mu dk - kd\mu}{\mu^2}$$

oder, weil

$$k = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

also

$$dk = \frac{pdp + qdq}{k}$$

ist:

$$d\varrho' = d\sigma^2 \cos \Omega \frac{\mu(pdp + qdq) - k^2 d\mu}{\mu^2 k}.$$

Ferner ist:

$$\mu = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2,$$

also:

$$d\mu = drdx^2 + 2dsdxdy + dtdy^2 + 2(rdx + sdy)d^2x + 2(sdx + tdy)d^2y.$$

Nun ist:

$$dr = udx + wdy, \quad ds = wdx + vdy, \quad dt = vdx + wdy$$

und nach 9):

$$d^2x = -\frac{p}{k^2}\mu + \frac{\operatorname{tg}\Omega}{k^2 d\sigma}\mu(qdz + dy),$$

$$d^2y = -\frac{q}{k^2}\mu - \frac{\operatorname{tg}\Omega}{k^2 d\sigma}\mu(pdz + dx);$$

also:

$$d\mu = udx^3 + 3\mathfrak{w}dx^2dy + 3\mathfrak{v}dxdy^2 + wdy^3$$
$$- \frac{2}{k^2}\mu\{(pr + qs)dx + (ps + qt)dy$$
$$+ \frac{3\,\mathrm{tg}\,\Omega}{k^2d\sigma}\mu\{(rdx + sdy)(qdz + dy) - (sdx + tdy)(pdz + dx)\}.$$

Ferner ist:

$$pdp + qdq = (pr + qs)dx + (ps + qt)dy,$$

also:

$$d\varrho' = \frac{d\sigma^2}{k\mu^3}\cos\Omega\{-k^2(udx^3 + 3\mathfrak{w}dx^2dy + 3\mathfrak{v}dxdy^2 + wdy^3)$$
$$+ 3\mu((pr + qs)dx + (ps + qt)dy)$$
$$- \frac{3\mu\,\mathrm{tg}\Omega}{d\sigma}((rdx + sdy)(qdz + dy) - (sdx + tdy)(pdz + dx))\}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

finden wir:

$$(rdx + sdy)(qdz + dy) - (sdx + tdy)(pdz + dx)$$
$$= (pqr - p^2s - s)dx^2 + (q^2r - p^2t + r - t)dxdy + (q^2s - pqt + s)dy^2,$$

mithin:

18)

$$r' = \frac{d\sigma^3}{\mu^3}\cos^2\Omega\{-k^2(udx^3 + 3\mathfrak{w}dx^2dy + 3\mathfrak{v}dxdy^2 + wdy^3)$$
$$+ 3\mu((pr + qs)dx + (ps + qt)dy)\}$$
$$- 3\frac{d\sigma^2}{\mu^2}\sin\Omega\cos\Omega\{(pqr - p^2s - s)dx^2 + (q^2r - p^2t + r - t)dxdy$$
$$+ (q^2s - pqt + s)dy^2\}.$$

Diess ist der allgemeine Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der Evolute eines schiefen Flächenschnitts, dessen Ebene die Tangential-Ebene in einer Linie schneidet, welche mit den x- und y-Axen Winkel bildet, deren Cosinus $\frac{dx}{d\sigma}$ und $\frac{dy}{d\sigma}$ sind. Der Winkel zwischen der durch diese Schnittlinie gehenden Normal-Ebene der Fläche und der Ebene des schiefen Flächenschnitts ist $=\Omega$. Auf eine nähere Entwicklung dieses Ausdrucks in seiner vorliegenden Allgemeinheit behalte ich mir vor zurückzukommen, und gebe einstweilen zu speziellen Anwendungen über.

Wir setzen in 18) die Coefficienten von $\cos^2\Omega$ und $\sin\Omega\cos\Omega$ gleich A und $-B$, und erhalten:

$$\mathfrak{r}' = A\cos^2\Omega + B\sin\Omega\cos\Omega.$$

Setzen wir hier zuerst $\mathfrak{r}' = 0$, so finden wir, wenn der betreffende Werth von Ω gleich Ω' ist:

$$\operatorname{tg}\Omega' = -\frac{A}{B}.$$

Suchen wir aber die Ableitung $\frac{d\mathfrak{r}'}{d\Omega}$, so finden wir:

$$\frac{d\mathfrak{r}'}{d\Omega} = -A\sin 2\Omega + B\cos 2\Omega.$$

Den speciellen Werth von Ω für $\frac{d\mathfrak{r}'}{d\Omega} = 0$, oder $\mathfrak{r}' =$ Maximum, nennen wir Ω'', so ist:

$$\operatorname{tg} 2\Omega'' = \frac{B}{A},$$

$$\text{19)} \qquad \operatorname{tg}\Omega' . \operatorname{tg} 2\Omega'' = -1.$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Legt man durch eine Flächentangente zwei Ebenen, so dass der Krümmungshalbmesser des ersten Schnitts $= 0$, und der des zweiten ein Maximum ist, so steht die erste Ebene senkrecht auf derjenigen, welche mit der Normal-Ebene einen doppelt so grossen Winkel bildet als die zweite Ebene; oder auch: die Ebene des grössten Evolutenhalbmessers halbirt den Winkel zwischen der Tangential-Ebene und der Ebene des kleinsten Evolutenhalbmessers.

Der Ausdruck für $\mathfrak{r}'$ vereinfacht sich merklich, wenn man dasjenige Coordinatensystem wählt, dessen z-Axe die Flächen-Normale, und dessen x- und y-Axen die Tangenten der Krümmungslinien sind. Die Gleichung 18) verwandelt sich dann in folgende:

$$\text{20)} \qquad \mathfrak{r}' = -\frac{u\,dx^3 + 3w\,dx^2dy + 3v\,dx\,dy^2 + w\,dy^3}{(r\,dx^2 + t\,dy^2)^3}\,d\sigma^3\cos^2\Omega$$
$$-3\frac{(r-t)dx\,dy}{(r\,dx^2 + t\,dy^2)^2}\,d\sigma^2\cos\Omega\sin\Omega.$$

Um die Krümmungshalbmesser $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ der Evoluten von den durch die Tangenten der Krümmungslinien gehenden Normalschnitten zu erhalten, setzen wir $\Omega = 0$ und zugleich entweder $dy = 0$, $d\sigma = dx$, oder $dx = 0$, $d\sigma = dy$, und finden:

$$21)\qquad \mathfrak{M} = -\frac{u}{r^3},\quad \mathfrak{M}' = -\frac{w}{t^3};$$

oder, weil

$$R = \frac{1}{r},\quad R' = \frac{1}{t}$$

ist:

$$22)\qquad \mathfrak{M} = -uR^3,\quad \mathfrak{M}' = -wR'^3.$$

Somit wäre die geometrische Bedeutung der beiden Differenzialcoefficienten

$$u = \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{R^3},$$

$$w = \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{\mathfrak{M}'}{R'^3}$$

für das angegebene Coordinatensystem gefunden.

Aus 20) und 22) erhalten wir für die Krümmungshalbmesser der Evoluten von den durch die Tangenten der Krümmungslinien gehenden schiefen Schnitte:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{M}\cos^2\Omega,\quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{M}'\cos^2\Omega.$$

Hierin liegt der Satz:

Legt man durch die Tangenten einer Krümmungslinie eine schiefe Ebene und eine Normal-Ebene, so ist der Krümmungshalbmesser der Evolute des schiefen Schnittes gleich demjenigen der Evolute des Normalschnitts multiplicirt mit dem Quadrat des Cosinus des Winkels beider Ebenen. Dieser Satz ist ein Analogon desjenigen von **Meunier** über die Krümmungshalbmesser der schiefen Schnitte.

Zusammenstellung der Formeln für die Poldistanzen und die Krümmungshalbmesser der Evoluten:

Durch den gegebenen Punkt auf der Fläche ziehen wir eine Flächentangente, die mit der Einen Krümmungslinie, welcher der Hauptkrümmungshalbmesser R entspricht, den Winkel a bildet, so ist:

$$\cos a = \frac{dx}{d\sigma} \quad \text{und} \quad \sin a = \frac{dy}{d\sigma}.$$

Durch diese Flächentangente geht eine Normal-Ebene und eine schiefe Ebene; beide bilden mit einander den Winkel Ω; der schiefen Ebene entspricht die Poldistanz $\mathfrak{p}'$ und der Evoluten-Krümmungshalbmesser $\mathfrak{r}'$; so ist nach 15) und 20), indem wir

23)

$$r=\frac{1}{R},\quad t=\frac{1}{R'},\quad u=-\frac{\mathfrak{M}}{R^3},\quad w=\frac{1}{\mathfrak{p}R},\quad v=\frac{1}{\mathfrak{p}'R'},$$
$$w=-\frac{\mathfrak{M}'}{R'^3}$$

setzen:

24)

$$\mathfrak{p}'=\frac{\left(\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}\right)\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}}{\left\{\begin{array}{c}\frac{\cos^3 a}{\mathfrak{p}R^2}+\left(\frac{\mathfrak{M}}{R^3}+\frac{2}{\mathfrak{p}'}\right)\frac{\cos^2 a\sin a}{RR'}-\left(\frac{\mathfrak{M}'}{R'^2}+\frac{2}{\mathfrak{p}}\right)\frac{\cos a\sin^2 a}{RR'}\\ -\frac{\sin^3 a}{\mathfrak{p}'R'^2}-\left(\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}\right)\frac{\operatorname{tg}\Omega}{RR'}\end{array}\right\}},$$

25)

$$r'=\frac{\frac{\mathfrak{M}}{R^3}\cos^3 a-3\frac{\cos^2 a\sin a}{\mathfrak{p}R}-3\frac{\cos a\sin^2 a}{\mathfrak{p}'R'}+\frac{\mathfrak{M}'}{R'^3}\sin^3 a}{\left(\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}\right)^3}\cos^2\Omega$$
$$-3\frac{\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\cos a\sin a}{\left(\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2}\sin\Omega\cos\Omega.$$

§. 4. Konjugirte Ebenen.

In einem Mémoire über die Krümmung der Flächen im Journal von **Liouville** (tome VI, p. 191. erste Serie) führt **Abel Transon** die Abweichungsaxe und den Abweichungswinkel (angle de déviation) ein. Dieser Winkel δ gibt in einem Punkt einer (ebenen) Kurve ihre Abweichung von der Kreiskrümmung an, und ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{1}{3}\frac{r}{\varrho}.$$

ϱ ist der Krümmungshalbmesser der Kurve und r derjenige ihrer Evolute. Zieht man in einem Punkte m einer Kurve die Normale mn und eine mit der Tangente parallele Sehne, deren Halbirungspunkt h ist, so ist die Grenze des Winkels nmh für den Fall einer unendlichen Annäherung der sich stets parallel bleibenden Sehne an die Tangente $=\delta$. Die Grenzlage der Verbindungslinie

mh ist die Abweichungsaxe. Bei den Kegelschnitten ist der Winkel *nmh* unabhängig von der Entfernung der Tangente von der ihr parallelen Sehne, denn *mh* ist die Richtung eines Durchmessers, welcher für jeden Punkt die Abweichungsaxe ist. Der obige Werth von $\operatorname{tg}\delta$ lässt sich für Kegelschnitte ganz leicht nachweisen. Da sich nun in jedem Punkt einer beliebigen ebenen Kurve ein Kegelschnitt konstruiren lässt, der vier auf einander folgende Punkte, also auch die Grössen ϱ und $\mathfrak{r}$, mit ihr gemein hat, so ist die Formel in ihrer Allgemeinheit bewiesen.

Wir können nun den Abweichungswinkel δ' eines beliebigen schiefen Flächenschnitts, für welchen der Krümmungshalbmesser

$$\varrho' = \varrho \cos \Omega = \frac{kd\sigma^2}{\mu} \cos \Omega,$$

und der Krümmungshalbmesser der Evolute $\mathfrak{r}'$ durch 18) bestimmt ist, angeben, und finden aus $\operatorname{tg}\delta' = \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{r}'}{\varrho'}$:

26)

$$\operatorname{tg}\delta' = \Big\{ -\frac{kd\sigma}{3\mu^2}(udx^3 + 3wdx^2dy + 3vdxdy^2 + wdy^3) + \frac{d\sigma}{\mu k}((pr+qs)\,dx + (ps+qt)\,dy) \Big\} \cos\Omega$$
$$-\frac{1}{\mu k}\big\{(pqr-p^2s-s)dx^2 + (q^2r-p^2t+r-t)dxdy + (q^2s-pqt+s)\,dy^2\big\} \sin\Omega.$$

Wir bezeichnen den Winkel zwischen zwei konjugirten Flächen-Tangenten mit α, so ist:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{(qdz+dy)\,dp - (pdz+dx)\,dq}{k(dpdx+dqdy)}.$$

Setzen wir hier die bekannten Werthe:

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy;$$

so finden wir, dass der Coefficient von $\sin\Omega$ in 26) gleich $\operatorname{cotg}\alpha$ ist; somit ist, wenn wir den Coefficienten von $\cos\Omega = A$ setzen, statt 26) die Gleichung:

$$\text{27)} \qquad \operatorname{tg}\delta' = A\cos\Omega - \operatorname{cotg}\alpha \sin\Omega.$$

Setzen wir hier zuerst $\Omega = 0$ und dann $\Omega = 90^0$, so finden wir:

$$\operatorname{tg}\delta = A, \quad \operatorname{tg}\delta_0' = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

δ ist der Abweichungswinkel des Normalschnitts und δ_0' ist die

Grenze des Abweichungswinkels, wenn sich die Schnitt-Ebene unendlich der Tangential-Ebene nähert. Statt 27) können wir auch schreiben:

28) $$\operatorname{tg}\delta' = \operatorname{tg}\delta\cos\Omega - \operatorname{cotg}\alpha\sin\Omega.$$

Hieraus findet man (nach Abel Transon) zunächst für $\operatorname{tg}\delta' = 0$ und $\operatorname{tg}\delta' = \text{Max.}$:

$$\operatorname{tg}\Omega_{,} = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{cotg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}\Omega = -\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\delta};$$

d. h. diejenigen beiden durch eine Flächentangente gehenden Schnitt-Ebenen, welchen der kleinste und der grösste Abweichungswinkel entspricht, stehen auf einander senkrecht.

Aus der Gleichung 28) und aus $\operatorname{tg}\delta'_0 = -\operatorname{cotg}\alpha$ folgt ferner der Satz:

Die Abweichungsaxen sämmtlicher durch eine Flächentangente gehender Flächenschnitte liegen in einer Ebene, welche durch die konjugirte Flächentangente geht. Die Abweichungsaxen der durch letztere gehenden Flächenschnitte liegen also in einer durch die gegebene Flächentangente gehenden Ebene.

Zwei Ebenen nun, welche durch zwei konjugirte Flächentangenten gehen, und wovon die Eine die Abweichungsaxen aller durch die konjugirte Tangente gehenden Flächenschnitte enthält, nenne ich konjugirte Ebenen.

Wir nehmen wieder dasjenige Coordinatensystem, dessen z-Axe die Flächen-Normale, und dessen x- und y-Axen die Tangenten der Krümmungslinien sind, und finden aus 26), indem wir setzen:

$$p = q = s = 0; \quad r = \frac{1}{R}, \quad t = \frac{1}{R'}, \quad u = -\frac{\mathfrak{K}}{R^3} = -3\frac{\operatorname{tg}\Delta}{R^2};$$

$$w = -\frac{\mathfrak{K}'}{R'^3} = -3\frac{\operatorname{tg}\Delta'}{R'^2}$$

(Δ und Δ' sind die Abweichungswinkel der durch die Tangenten der Krümmungslinien gehenden Normalschnitte);

$$u = \frac{1}{\sqrt{R}}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{R'}}; \quad \frac{dx}{d\sigma} = \cos a, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \sin a:$$

30)

$$\operatorname{tg}\delta' = \left(\frac{\operatorname{tg}\varDelta}{R^2}\cos^3 a - \frac{\cos^2 a \sin a}{\mathfrak{p}R} - \frac{\cos a \sin^2 a}{\mathfrak{p}'R'} + \frac{\operatorname{tg}\varDelta'}{R'^2}\sin^3 a\right)$$
$$\times \frac{\cos\Omega}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2} - \frac{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\cos a \sin a}{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}} \sin\Omega.$$

Die konjugirte Flächentangente mache mit der x-Axe den Winkel $\alpha + a$, so dass also wie oben α der Winkel zwischen beiden konjugirten Flächentangenten ist, so hat man zur Bestimmung von $\alpha + a$ die Gleichungen:

$$\sin(\alpha + a) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\cos a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}},$$

$$\cos(\alpha + a) = -\frac{1}{R'} \cdot \frac{\sin a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}}.$$

Die Abweichungswinkel der durch die konjugirte Flächentangente gebenden schiefen Schnitte nennen wir δ'', so haben wir, indem wir in 29) $\alpha + a$ statt a setzen, und die Werthe von $\sin(\alpha + a)$ und $\cos(\alpha + a)$ substituiren:

$$30)\quad \operatorname{tg}\delta'' = \left(\frac{\operatorname{tg}\varDelta'}{R}\cos^3 a + \frac{\cos^2 a \sin a}{\mathfrak{p}'} - \frac{\cos a \sin^2 a}{\mathfrak{p}} - \frac{\operatorname{tg}\varDelta}{R'}\sin^3 a\right)$$
$$\times \frac{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2}\cos\Omega + \frac{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\cos a \sin a}{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}}\sin\Omega.$$

Die konjugirten Flächen-Tangenten bilden mit der x-Axe die Winkel a und $\alpha + a$; durch sie geben zwei konjugirte Ebenen, die wir (a) und $(\alpha + a)$ nennen wollen, und wovon die Eine die Abweichungsaxen sämmtlicher durch die Flächentangente der Anderen gelegten Schnitte enthält. Die Ebene (a) bildet mit der Flächen-Normale einen Winkel, den wir Θ nennen, und die konjugirte Ebene $(\alpha + a)$ bildet mit der Flächen-Normale den Winkel Θ'. Der Winkel Θ wird aus 30) gefunden, indem $\Omega = 0$ gesetzt wird, und Θ' aus 29), indem hier $\Omega = 0$ gesetzt wird. Die so erhaltenen Werthe von $\operatorname{tg}\delta''$ und $\operatorname{tg}\delta'$ müssen noch mit

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}}$$

multiplicirt werden. Man erhält auf diese Art:

31)

$$\operatorname{tg}\Theta=\left(\frac{\operatorname{tg}\Delta'}{R}\cos^3 a+\frac{\cos^2 a\sin a}{\mathfrak{p}'}-\frac{\cos a\sin^2 a}{\mathfrak{p}}-\frac{\operatorname{tg}\Delta}{R'}\sin^3 a\right)\frac{1}{\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}},$$

32)

$$\operatorname{tg}\Theta'=\left(\frac{\operatorname{tg}\Delta}{R^2}\cos^3 a-\frac{\cos^2 a\sin a}{\mathfrak{p}R}-\frac{\cos a\sin^2 a}{\mathfrak{p}'R'}+\frac{\operatorname{tg}\Delta'}{R'^2}\sin^3 a\right)$$
$$\times\frac{1}{\left(\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}\right)\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}}.$$

Der Winkel zwischen dem Durchschnitt der beiden konjugirten Ebenen und der Flächen-Normale ist gegeben durch die Formel:

$$33)\qquad \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}^2\Theta+\operatorname{tg}^2\Theta'-2\operatorname{tg}\Theta\operatorname{tg}\Theta'\cos\alpha}.$$

§. 5. Anwendung auf besondere Flächen.

A. Flächen, welche durch eine Gerade erzeugt werden.

Diese Flächen genügen nach **Monge** folgenden Gleichungen:

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0,$$
$$udx^3+3u'dx^2dy+3v dxdy^2+wdy^3=0.$$

Aus der ersten Gleichung findet man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-s\pm\sqrt{s^2-rt}}{t},$$

welchen Werth wir $=v$ setzen und in die zweite Gleichung substituiren:

$$u+3u'v+3vv^2+wv^3=0.$$

Diess ist die allgemeine Differenzialgleichung der durch eine Gerade erzeugten Flächen.

Wir nehmen dasjenige Coordinatensystem, dessen Axen die Normale und die Tangente der Krümmungslinien sind, und erhalten

$$v=\pm\sqrt{-\frac{r}{t}}=\pm\sqrt{-\frac{R'}{R}},$$

und mit Benutzung der Ausdrücke in 23):

$$34) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{R^2}+\frac{3}{\mathfrak{p}'}=\mp\left(\frac{\mathfrak{A}'}{R'^2}+\frac{3}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt{-\frac{R'}{R}}.$$

B. Die Flächen zweiten Grades.

Diese Flächen haben zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden, welche bei dem einmantlichen Hyperboloid und bei dem hyperbolischen Paraboloid reell sind, bei den anderen Flächen imaginär. Die beiden Gleichungen:

$$wv^3+3vv^2+3uv+u=0,$$
$$tv^2+2sv+r=0$$

haben zwei Faktoren gemeinschaftlich, oder die beiden Faktoren der zweiten Gleichung, welche die (reellen oder imaginären) Erzeugenden vorstellen, müssen auch Faktoren der ersten Gleichung sein. Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so entsteht der Rest:

$$\left\{3u-\frac{wr}{t}-2s\left(\frac{3v}{t}-\frac{2sw}{t^2}\right)\right\}v+u-r\left(\frac{3v}{t}-\frac{2sw}{t^2}\right).$$

Hier muss sowohl der Faktor von v, als auch der Ausdruck ohne v gleich 0 sein, mithin:

$$35) \qquad \begin{cases} ut^2-3vrt+2wrs=0, \\ wr^2-3urt+2ust=0. \end{cases}$$

Diess sind die beiden Differenzialgleichungen, welche die Flächen zweiten Grades charakterisiren. Der Quotient, welcher sich bei der Division ergibt, ist:

$$36) \qquad \frac{w}{t}v+\frac{u}{r}.$$

Für dasjenige Coordinatensystem, bei welchem $p=q=s=0$ ist, erhält man aus 35):

$$ut=3vr, \qquad wr=3ut;$$

oder nach 23):

$$37) \qquad 3R^2=-\mathfrak{A}\mathfrak{p}', \qquad 3R'^2=-\mathfrak{A}\mathfrak{p}.$$

Die Gleichung 20) verwandelt sich, wenn wir

$$\frac{dx}{d\sigma}=\cos a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{d\sigma}=\sin a$$

setzen, in folgende:

$$\mathfrak{r}' = -\frac{\frac{u}{r}\cos a + \frac{w}{t}\sin a}{(r\cos^2 a + t\sin^2 a)^2}\cos^2\Omega - 3\,\frac{(r-t)\cos a\sin a}{(r\cos^2 a + t\sin^2 a)^2}\cos\Omega\sin\Omega,$$

oder nach 23):

38)

$$\mathfrak{r}' = \frac{\frac{\mathfrak{M}}{R^2}\cos a + \frac{\mathfrak{M}'}{R'^2}\sin a}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2}\cos^2\Omega - 3\,\frac{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\cos a\sin a}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2}\cos\Omega\sin\Omega.$$

Für $\Omega = 0$ erhalten wir die Gleichung für den Krümmungshalbmesser $\mathfrak{r}$ der Evoluten der Normalschnitte:

$$\text{39)}\qquad \mathfrak{r} = \frac{\frac{\mathfrak{M}}{R^2}\cos a + \frac{\mathfrak{M}'}{R'^2}\sin a}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2};$$

und wenn wir nach 37) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ durch $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$ ersetzen:

$$\text{40)}\qquad \mathfrak{r} = -3\,\frac{\frac{\cos a}{\mathfrak{p}'} + \frac{\sin a}{\mathfrak{p}}}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)^2}.$$

Die Tangente $\operatorname{tg}\delta'$ des Abweichungswinkels der schiefen Flächenschnitte ist $= \frac{\mathfrak{r}'}{3\varrho\cos\Omega}$, also nach 38), weil

$$\operatorname{tg}\varDelta = \frac{\mathfrak{M}}{3R},\quad \operatorname{tg}\varDelta' = \frac{\mathfrak{M}'}{3R'}\quad \text{und}\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$$

ist:

41)

$$\operatorname{tg}\delta' = \frac{\frac{\operatorname{tg}\varDelta}{R}\cos a + \frac{\operatorname{tg}\varDelta'}{R'}\sin a}{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}}\cos\Omega - \frac{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\cos a\sin a}{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}}\sin\Omega.$$

Für den Abweichungswinkel δ der Normalschnitte ergibt sich sonach:

$$\text{42)}\qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\frac{\operatorname{tg}\varDelta}{R}\cos a + \frac{\operatorname{tg}\varDelta'}{R'}\sin a,}{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}},$$

oder, weil nach 37)

$$\operatorname{tg}\varDelta = -\frac{R}{\mathfrak{p}'},\quad \operatorname{tg}\varDelta' = -\frac{R'}{\mathfrak{p}}$$

ist:

$$43)\qquad \operatorname{tg}\delta = -\frac{\frac{\cos a}{\mathfrak{p}'} + \frac{\sin a}{\mathfrak{p}}}{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}}.$$

Um den Ausdruck für die Poldistanzen der Normal-Schnitte zu erhalten, setzen wir in 24):

$$\Omega = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = -\frac{3R^2}{\mathfrak{p}'}, \qquad \mathfrak{N}' = -\frac{3R'^2}{\mathfrak{p}};$$

und erhalten:

$$\frac{1}{p} = \frac{\frac{\cos^3 a}{\mathfrak{p}R^2} - \left(\frac{\cos a}{\mathfrak{p}'} - \frac{\sin a}{\mathfrak{p}}\right)\frac{\cos a \sin a}{RR'} - \frac{\sin^3 a}{\mathfrak{p}'R'^2}}{\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}}.$$

Der Zähler der Bruches ist $= \left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right)\left(\frac{\cos a}{\mathfrak{p}R} - \frac{\sin a}{\mathfrak{p}'R'}\right)$, somit:

$$44)\qquad \frac{1}{p} = \frac{\frac{\cos a}{\mathfrak{p}R} - \frac{\sin a}{\mathfrak{p}'R'}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}}.$$

Der Winkel zwischen der Tangente des Normalschnitts, dem die Poldistanz p entspricht, und der konjugirten Tangente, auf welcher der Pol liegt, und auf der also auch die Poldistanz gemessen wird, sei wieder, wie oben, α, so haben wir:

$$\sin(\alpha + a) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\cos a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}},$$

$$\cos(\alpha + a) = -\frac{1}{R'} \cdot \frac{\sin a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R'^2}}};$$

mithin aus 44):

$$45)\qquad \frac{1}{p} = \frac{\sin(\alpha + a)}{\mathfrak{p}} + \frac{\cos(\alpha + a)}{\mathfrak{p}'}.$$

Hierin liegt folgender längst bekannter Satz:

Die Pole sämmtlicher Normalschnitte in einem Punkte einer centrischen Fläche zweiten Grades liegen in einer Geraden.

In jedem Punkte einer Fläche zweiten Grades gibt es einen Normalschnitt, für welchen $\mathfrak{r} = \mathrm{tg}\,\delta = 0$ ist, oder wo eine Kreiskrümmung statt findet, oder auch dessen Axe die Flächen-Normale ist. Aus 40) erhalten wir für den Winkel a, welchen die Tangente dieses Normalschnitts mit der Tangente der Krümmungslinie (welcher der Hauptkrümmungshalbmesser R entspricht) bildet:

$$\mathrm{tg}\,a = -\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}.$$

In jedem Punkte einer Fläche zweiten Grades gibt es ferner einen Normalschnitt, für welchen die Poldistanz $\mathfrak{P} = \infty$ ist. Aus 45) erhalten wir, wenn wir $p = 0$ setzen, für die Tangente des Winkels, welchen die nach diesem unendlich entfernten Pol gezogene Flächentangente mit der genannten Krümmungslinie bildet:

$$\mathrm{tg}(\alpha + a) = -\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}.$$

In diesen beiden Gleichungen ist folgender Satz enthalten:

Bei den Flächen zweiten Grades geht die Tangente desjenigen Normalschnitts, dessen Axe die Normale ist, durch den unendlich entfernten Pol.

Die Formel für die Poldistanzen schiefer Flächenschnitte erhält man aus 24) und 44):

$$46) \qquad \frac{1}{\mathfrak{P}} = \frac{\dfrac{\cos a}{\mathfrak{p}R} - \dfrac{\sin a}{\mathfrak{p}'R'} - \dfrac{\mathrm{tg}\,\Omega}{RR'}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R'^2}}}.$$

Wir führen nun die elliptischen Coordinaten ϱ, μ, ν ein, d. h. die grossen Halbaxen von drei homofokalen Flächen (Ellipsoid, beide Hyperboloide); b und c sind die Distanzen der gemeinschaftlichen Brennpunkte von den in der xy- und xz-Ebene gelegenen Hauptschnitten vom Mittelpunkte. Man hat, wenn zur Abkürzung $\lambda = \varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ gesetzt wird:

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}(\varrho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda},$$

hieraus:

$$\frac{dR}{d\sigma} = -\frac{3\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\lambda}\nu\frac{d\nu}{d\sigma}.$$

Bei dieser Differenziation ist μ als konstant anzusehen, weil

der Normalschnitt die Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ berührt, mithin auf demselben die Zunahme von μ unendlich klein ist, gegenüber derjenigen von ν. Wir haben ferner:

$$\frac{d\nu}{d\sigma} = \sqrt{\frac{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}},$$

also:

$$47)\qquad \mathfrak{N} = -3\,\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}{\lambda^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}\,\nu,$$

$$48)\qquad \operatorname{tg}\varDelta = -\frac{\sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}{\lambda\sqrt{\mu^2-\nu^2}}\,\nu.$$

Ebenso findet man aus $R' = \frac{(\varrho^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(\varrho^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda}$, indem man ν als konstant ansieht:

$$\frac{dR'}{d\sigma} = -\,3\,\frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\lambda}\,\mu\,\frac{d\mu}{d\sigma},$$

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \sqrt{\frac{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}};$$

somit:

$$49)\qquad \mathfrak{N}' = -3\,\frac{(\varrho^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(\varrho^2-\nu^2)\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}{\lambda^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}\,\mu,$$

$$50)\qquad \operatorname{tg}\varDelta' = -\frac{\sqrt{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}{\lambda\sqrt{\mu^2-\nu^2}}\,\mu.$$

Aus 37), 47) und 49) erhalten wir:

$$51)\qquad \mathfrak{p} = \frac{(\varrho^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\mu\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}},$$

$$52)\qquad \mathfrak{p}' = \frac{(\varrho^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Die Betrachtung der letzten sechs Gleichungen führt zu folgenden Relationen:

$$\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}'} = \left(\frac{\varrho^2-\nu^2}{\varrho^2-\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varDelta}{\operatorname{tg}\varDelta'} = \left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{\varrho^2-\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'} = \left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{\varrho^2-\nu^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}.$$

Bildet man in den anderen drei Ecken eines aus den Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$; $\mu' = \text{const.}$, $\nu' = \text{const.}$ gebildeten Vierecks ähnliche Quotienten, so erhält man folgenden Satz:

Die vier Quotienten aus den Evoluten-Krümmungshalbmessern, aus den Abweichungswinkeln, aus den Poldistanzen der Normalschnitte in einem Krümmungslinien-Viereck auf einer centrischen Fläche zweiten Grades sind in Proportion.

Wir bezeichnen die drei Perpendikel, welche vom Mittelpunkte auf die Tangential-Ebene der Fläche und auf diejenigen zwei Normalschnitt-Ebenen gefällt werden, welche durch die Tangenten der Krümmungslinien gehen, denen die Hauptkrümmungshalbmesser R und R' entsprechen, der Reihe nach mit P, P', P'', so ist:

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}, \quad P' = \frac{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}},$$

$$P'' = \frac{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}.$$

Die Axen des mit der Tangential-Ebene parallelen Centralschnittes sind:

$$D = \sqrt{\varrho^2-\nu^2}, \quad D' = \sqrt{\varrho^2-\mu^2}.$$

Diese Formeln, in Verbindung mit den Gleichungen von 47) an, liefern nachstehende Relationen:

$$\text{53)} \qquad \operatorname{tg}\varDelta = -\frac{P''}{P}, \quad \operatorname{tg}\varDelta' = -\frac{P'}{P}, \quad \frac{\operatorname{tg}\varDelta'}{\operatorname{tg}\varDelta} = \frac{P'}{P''}.$$

In diesen Gleichungen ist folgender Lehrsatz enthalten:

Der Durchmesser eines durch die Tangenten einer Krümmungslinie gehenden Normalschnitts ist parallel dem vom Mittelpunkte der Fläche auf die Tangente der anderen Krümmungslinie gefällten Perpendikel; denn bei den Kegelschnitten ist der Abweichungswinkel δ gleich dem Winkel zwischen der Normale und dem durch den gleichen Punkt gehenden Durchmesser, da letzterer die Abweichungsaxe ist. Also ist $\varDelta$ der Winkel zwischen der Flächen-Normale und dem durch ihren Fusspunkt gezogenen Durchmesser des Normalschnitts.

Weitere Gleichungen sind:

$$54)\qquad D^2 = \mathfrak{P}P', \quad D'^2 = \mathfrak{P}'P'', \quad \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{P''}{P'} \cdot \frac{D^2}{D'^2}.$$

Die Durchmesser sämmtlicher Normalschnitte in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades bilden einen Kegel, dessen Gleichung wir aus 42) erhalten, indem wir setzen:

$$\cos a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin a = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z};$$

dadurch verwandelt sich 42) in:

$$55)\qquad \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} - \frac{\operatorname{tg}\Delta}{R}xz - \frac{\operatorname{tg}\Delta'}{R'}yz = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z = 1$, so erhalten wir die Gleichung desjenigen Kegelschnitts, dessen Ebene parallel der Tangential-Ebene ist. Die Axen desselben sind parallel den Tangenten der Krümmungslinien, durch deren Durchschnittspunkt er geht, und die Gleichung des Kegelschnitts, auf seine Axen bezogen, finden wir, indem wir $x = x' + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\Delta$, $y = y' + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\Delta'$ setzen:

$$56)\qquad \frac{x'^2}{R} + \frac{y'^2}{R'} = \frac{\operatorname{tg}^2\Delta}{4R} + \frac{\operatorname{tg}^2\Delta'}{4R'}.$$

Die Gleichung der indicatrice des Dupin, d. h. desjenigen Kegelschnitts, dessen Axen die Tangenten der Krümmungslinien sind, und von welchen je zwei konjugirte Durchmesser mit zwei konjugirten Tangenten der Fläche zusammenfallen, ist:

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} = 1.$$

Hieraus folgt, dass die indicatrice und der Kegelschnitt 56) ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind, woraus sich sofort, in Verbindung mit 53), folgender Satz ergibt:

Man ziehe in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades zwei konjugirte Tangenten. Die Richtung des Durchmessers von einem Normalschnitt, welcher durch eine dieser Tangenten geht, wird erhalten, wenn man durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene legt, parallel mit dem Normalschnitt, und den Durchschnittspunkt dieser Ebene und der konjugirten Tangente mit dem Mittelpunkte der Fläche verbindet.

Durch zwei konjugirte Tangenten, welche mit der x-Axe die

Winkel a und $\alpha+a$ machen, geben zwei konjugirte Ebenen (a) und $(\alpha+a)$, deren Winkel mit der Flächen-Normale Θ und Θ' sind; wir finden nach 32), 31), 42), weil

$$\operatorname{tg}\Theta=\operatorname{tg}\delta\sin\alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\Theta'=\operatorname{tg}\delta'\sin\alpha$$

ist:

$$57)\qquad \operatorname{tg}\Theta=\frac{\frac{\operatorname{tg}\Delta}{R}\cos a+\frac{\operatorname{tg}\Delta'}{R'}\sin a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}},$$

$$58)\qquad \operatorname{tg}\Theta'=\operatorname{tg}\Delta'\cos a-\operatorname{tg}\Delta\sin a.$$

Der Werth von $\operatorname{tg}\Theta'$ lässt sich aus 57) finden, indem man $\alpha+a$ statt a setzt, und die Gleichungen berücksichtigt:

$$\sin(\alpha+a)=\frac{\frac{\cos a}{R}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}},\qquad \cos(\alpha+a)=-\frac{\frac{\sin a}{R}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}}.$$

Der Durchschnitt der beiden konjugirten Ebenen (a) und $(\alpha+a)$ mache mit der Flächen-Normale den Winkel Θ_0; nach (33) ist:

$$\operatorname{tg}\Theta_0=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}^2\Theta+\operatorname{tg}^2\Theta'-2\operatorname{tg}\Theta\operatorname{tg}\Theta'\cos\alpha}.$$

Mit Hülfe von 57) und 58), und der Gleichungen

$$\sin\alpha=\frac{\frac{\cos^2 a}{R}+\frac{\sin^2 a}{R'}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}},\qquad \cos\alpha=\cos a\sin a\,\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2}+\frac{\sin^2 a}{R'^2}}}$$

ergibt sich:

$$59)\qquad \operatorname{tg}\Theta_0=\sqrt{\operatorname{tg}^2\Theta+\operatorname{tg}^2\Theta'}.$$

Setzt man hier statt $\operatorname{tg}\Theta$ und $\operatorname{tg}\Theta'$ ihre Werthe aus 48) und 50), so erhält man zur Bestimmung des Winkels Θ_0, oder des Winkels zwischen der Flächen-Normale und dem Durchmesser, folgenden Ausdruck in elliptischen Coordinaten:

$$60)\qquad \operatorname{tg}\Theta_0$$
$$=\frac{1}{\lambda\sqrt{\mu^2-\nu^2}}\sqrt{\{(\varrho^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)\nu^2+(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)\mu^2\}}.$$

IV.

Ueber die trigonometrische Einrichtung der Cardanschen Formel in dem sogenannten irreducibeln Falle.

Von

Herrn Dr. *J. Zampieri*,

Lehrer an der k. k. Ober-Realschule in Wien (Landstrasse).

Bei der Behandlung der Gleichungen des dritten Grades pflegt man gewöhnlich die Cardan'sche Formel nur für jene zwei Fälle trigonometrisch einzurichten, bei welchen in der allgemeinen Gleichung

$$x^3 + Px + Q = 0$$

das P positiv, oder das P negativ und zugleich $\frac{4P^3}{27Q^2} < 1$ ist, und unterzieht den Fall, wo P negativ und $\frac{4P^3}{27Q^2} > 1$ ist, einer besonderen eigenthümlichen Behandlung.

Dies ist nun nicht nothwendig, sondern es lässt sich in ähnlicher Weise, wie in den zwei anderen Fällen, die Cardan'sche Formel unmittelbar brauchbar trigonometrisch einrichten, auch wenn P negativ und dabei $\frac{4P^3}{27Q^2} > 1$ ist, wo bekanntlich alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung reell und von einander verschieden sind, wie wir dies hier ausführen wollen.

Das Vorzeichen von P in Evidenz gestellt, seien x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - Px + Q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und setzt man im Sinne der Cardan'schen Formel:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{4P^3}{27Q^2}}\right]}, \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}\left[1+\sqrt{1-\frac{4P^3}{27Q^2}}\right]}; \end{aligned}\right\} \dots\dots (2)$$

so ist bekanntlich:

$$x_1 = u + v,$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}(u+v) + \tfrac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3},$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}(u+v) - \tfrac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3}.$$

Ist nun $\frac{4P^3}{27Q^2} > 1$, so können wir immerhin

$$\frac{4P^3}{27Q^2} = \overline{\sec\varphi}^2 \dots\dots\dots\dots (3)$$

setzen, wodurch wir erhalten:

$$1 - \frac{4P^3}{27Q^2} = 1 - \overline{\sec\varphi}^2 = -\overline{\operatorname{tg}\varphi}^2,$$

folglich:

$$\sqrt{1-\frac{4P^3}{27Q^2}} = \operatorname{tg}\varphi . \sqrt{-1},$$

somit aus den Gleichungen (2):

$$u = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}\left[1-\operatorname{tg}\varphi . \sqrt{-1}\right]},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}\left[1+\operatorname{tg}\varphi . \sqrt{-1}\right]}.$$

Aber aus (3) folgt:

$$\frac{Q}{2} = \frac{1}{\sec\varphi}\sqrt{\frac{P^3}{27}} = \cos\varphi\sqrt{\frac{P^3}{27}}, \dots\dots (4)$$

und durch Substitution in die letzten zwei Gleichungen erhält man mit Rücksicht, dass $\operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \sin\varphi$ ist:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\sqrt{\frac{P}{3}}\left[\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}}, \\ v &= -\sqrt{\frac{P}{3}}\left[\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}\right\} \dots (\alpha)$$

Durch Anwendung der Moivre'schen Formel ergibt sich:

$$u = -\sqrt{\frac{P}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3} - \sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{-1}\right],$$

$$v = -\sqrt{\frac{P}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{-1}\right];$$

somit

$$u + v = -2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$$

und

$$u - v = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{-1}.$$

Demgemäss gehen obige Ausdrücke für x_1, x_2, x_3 in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= \sqrt{\frac{P}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{3}\right], \\ x_3 &= \sqrt{\frac{P}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3} - \sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{3}\right]; \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

und alle drei Wurzeln erscheinen in reeller Form, wie die Natur der Sache es erfordert.

Um jedoch weiter die Formeln für x_2 und x_3 auch logarithmisch brauchbar zu machen, berücksichtige man, dass $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ ist, unter π 180° verstanden, und man hat:

$$\cos\frac{\varphi}{3} \pm \sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{3} = \cos\frac{\varphi}{3} \pm \sin\frac{\varphi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\cos\frac{1}{3}(\pi \mp \varphi)}{\cos\frac{\pi}{3}},$$

oder, da $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ist:

$$\cos\frac{\varphi}{3} \pm \sin\frac{\varphi}{3}.\sqrt{3} = 2\cos\tfrac{1}{3}(\pi \mp \varphi),$$

sonach:

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi - \varphi), \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi + \varphi). \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Nachdem man sich den Winkel φ mittelst der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}},$$

welche sich aus (4) ergibt, verschafft hat, ergeben sich sofort aus den Formeln (5), (6) und (7) die Wurzeln der Gleichung (1).

Da bekanntlich

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1} = \cos(2r\pi + \varphi) \pm \sin(2r\pi + \varphi) . \sqrt{-1}$$

ist, unter r Null oder eine ganze Zahl verstanden, so ist

$$[\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}} = \cos\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi) \pm \sin\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi) . \sqrt{-1},$$

und demgemäss erhält man aus den Gleichungen (α):

$$u = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi) - \sin\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi) . \sqrt{-1}\right],$$

$$v = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi) + \sin\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi) . \sqrt{-1}\right];$$

somit

$$u + v = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi). \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Da aber $\cos\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi)$

für $r = 0$ in $\cos\frac{\varphi}{3}$,

für $r = 1$ in $\cos\tfrac{1}{3}(2\pi + \varphi) = -\cos\tfrac{1}{3}(\pi - \varphi)$,

für $r = 2$ in $\cos\tfrac{1}{3}(4\pi + \varphi) = -\cos\tfrac{1}{3}(\pi + \varphi)$

übergeht, so sehen wir, mit Hinblick auf die Formeln (5), (6) und (7), dass die Gleichung (8) die drei Werthe von x_1, x_2, x_3 involvirt, so dass

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(2r\pi + \varphi)$$

die gemeinschaftliche Formel für alle drei reellen Wurzeln der Gleichung (1) ist, aus welcher sie sich dann einzeln ergeben, wenn man $r = 0, 1, 2$ setzt.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die oben aufgestellten Formeln (5), (6) und (7) mit denjenigen identisch sind, welche

bei der Eingangs erwähnten besonderen Behandlung des irreducibeln Falles zur Berechnung der drei Wurzeln der kubischen Gleichung entwickelt werden.

Bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3 die drei reellen Wurzeln der Gleichung

$$y^3 - Py + Q = 0,$$

wo P positiv ist, Q aber positiv oder negativ sein kann, so werden, bei der besagten besonderen Behandlung dieses Falls, bekanntlich folgende Formeln aufgestellt:

$$y_1 = \varrho \sin\frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = \varrho \sin\tfrac{1}{3}(\pi - \alpha), \quad y_3 = -\varrho \sin\tfrac{1}{3}(\pi + \alpha);$$

wobei $\varrho = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ ist und α mittelst der Gleichung $\sin\alpha = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{27}{P^3}}$ erhalten wird.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (4) finden wir:

$$\sin\alpha = \cos\varphi, \quad \text{daher } \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

folglich

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}, \quad \tfrac{1}{3}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}, \quad \tfrac{1}{3}(\pi + \alpha) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{3};$$

und man hat:

$$\sin\frac{\alpha}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\tfrac{1}{3}(\pi + \varphi),$$

weil $\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ist; ferner

$$\sin\tfrac{1}{3}(\pi - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\tfrac{1}{3}(\pi - \varphi),$$

weil auch $\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ist, und

$$\sin\tfrac{1}{3}(\pi + \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\frac{\varphi}{3};$$

mit Rücksicht des Werthes von ϱ hat man daher:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi + \varphi), \quad y_2 = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi - \varphi),$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{P}{3}}\cos\frac{\varphi}{3};$$

und, wie man sieht, ist

$$y_1 = x_3 \text{ Formel } (7),$$
$$y_2 = x_2 \quad „ \quad (6),$$
$$y_3 = x_1 \quad „ \quad (5).$$

Schliesslich muss ich bemerken, dass ich schon seit drei Jahren meinen Schülern in der obersten Klasse die Einrichtung der Cardan'schen Formel für den irreducibeln Fall auf die hier niedergelegte Weise vorführe.

V.

Beweis für einen Satz von den Euler'schen Integralen.

Von

Herrn Dr. *R. Hoppe*

in Berlin.

Die Definition der Function Γx durch das bestimmte Integral

$$\Gamma x = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} \partial u$$

ist auf jedes reelle oder imaginäre x anwendbar, dessen reeller Theil positiv ist. Setzt man au für u, differentiirt nach a, und setzt dann $a=1$, so erhält man die Relation:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

mittelst welcher der Begriff von Γx für alle noch übrigen Werthe von x festgestellt wird, mit alleiniger Ausnahme der ganzen Zahlen < 1.

Ferner erhält man durch Substitution von $(1+v)u$ und Multiplication mit dem beistehenden Factor:

$$\Gamma x \frac{v^{y-1}\partial v}{(1+v)^x} = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\partial u . e^{-vu} v^{y-1}\partial v,$$

und nach Integration zwischen den beistehenden Grenzen und nachfolgender Substitution von $\frac{v}{u}$ für v:

$$\Gamma x \int_0^\infty \frac{v^{y-1}\partial v}{(1+v)^x} = \Gamma(x-y)\,\Gamma y, \quad \ldots\ldots (2)$$

gültig für jedes reelle oder imaginäre x und y, so lange die reellen Theile von $x-y$ und y positiv sind. Mit Hülfe dieser Formel pflegt man die zweite Relation

$$\Gamma x\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

zu beweisen, jedoch auf einem ziemlich mühsamen Wege, indem man erst x rational nimmt und die Integration unbestimmt vollzieht, eine Methode, die überdiess offenbar keine Anwendung auf imaginäre x gestattet. Meiner Ansicht nach würde dieser Beweis gänzlich bei Seite gelegt worden sein, wenn der folgende weit einfachere und nicht auf reelle Argumente beschränkte allgemein bekannt wäre, was mich veranlasst, ihn hier mitzutheilen.

Setzt man in Gleichung (2) $x=2$ und $x+1$ für y, wo der reelle Theil von $x>-1$ und <1 sein muss, so kommt:

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{v^x\partial v}{(1+v)^2}, \quad \ldots\ldots (4)$$

und nach Substitution von $\frac{1}{v}$ für v in dem Intervalle von $v=0$ bis $v=1$:

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \int_1^\infty \frac{v^x + v^{-x}}{(1+v)^2}\partial v,$$

und nach theilweiser Integration:

$$= 1 + x\int_1^\infty \frac{v^x - v^{-x}}{1+v} \cdot \frac{\partial v}{v}.$$

Entwickelt man die Function unter dem Integralzeichen nach absteigenden Potenzen von v, so erhält man:

$$x\Gamma x\Gamma(1-x)=1+x\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}\int_1^\infty(v^{x-k-1}-v^{-x-k-1})\partial v$$

$$=1+x\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k-x}-\frac{1}{k+x}\right)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}2x^2}{k^2-x^2}.$$

Diess ist aber die bekannte Reihenentwickelung von

$$\frac{x\pi}{\sin x\pi},$$

welche, mit Ausschluss ganzer Zahlen, für jedes reelle oder imaginäre x gilt. Nachdem hiermit die Gleichung (3) unter der für Gleichung (4) aufgestellten Beschränkung bewiesen ist, folgt die unbeschränkte Gültigkeit nach Gleichung (1), aus welcher hervorgeht:

$$\Gamma x\,\Gamma(1-x)=(-1)^n\,\Gamma(x+n)\,\Gamma(1-x-n).$$

Bloss um des Falles willen, wo der reelle Theil eines imaginären Arguments $=0$ ist, musste in Gleichung (2) $x=2$ gesetzt werden; in Bezug auf jeden anderen hätte man kürzer $x=1$ setzen können.

Ueber die dritte bekannte Relation der Function Γx brauche ich nichts hinzuzufügen, da der von Dirichlet gegebene Beweis den Fall imaginärer Argumente ohne Weiteres umfasst.

VI.

Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz,*

Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt.

1.

Es sei

$$1)\quad 0 = +a + by + cy^2 + y^3$$

eine gegebene cubische Gleichung und die Grössen a, b, c bezeichnen reelle Zahlenwerthe.

Hat dieselbe drei reelle Wurzeln, so sind sie, wegen der bloss positiven Vorzeichen der Glieder, sämmtlich negativ, und wir wollen sie mit $-\overset{1}{w}, -\overset{2}{w}, -\overset{3}{w}$ bezeichnen. Hiernach erhalten wir:

$$2)\quad 0 = (\overset{1}{w} + y)(\overset{2}{w} + y)(\overset{3}{w} + y),$$

nämlich:

$$3)\quad 0 = (\overset{1}{w} + y)(\overset{2}{w}\overset{3}{w} + (\overset{2}{w} + \overset{3}{w}).y + y^2),$$

wofür wir schreiben:

$$4)\quad 0 = (\overset{1}{w} + y)(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.y + y^2),$$

also:

$$5)\quad 0 = \mathfrak{A}\overset{1}{w} + (\mathfrak{B}\overset{1}{w} + \mathfrak{A})y + (\overset{1}{w} + \mathfrak{B}).y^2 + y^3.$$

Aus der Vergleichung von 1) und 5) folgt:

$$6)\quad +a = \mathfrak{A}\overset{1}{w},$$

7) $$+b=\mathfrak{B}\overset{1}{w}+\mathfrak{A},$$

8) $$+c=\overset{1}{w}+\mathfrak{B}.$$

Hieraus ergeben sich:

9) $$0=-a^2+ac.\mathfrak{A}-b.\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^3,$$

10) $$0=-(bc-a)+(b+c^2).\mathfrak{B}-2c.\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}^3,$$

zwei Gleichungen, in welchen offenbar $\mathfrak{A}$ das Produkt und $\mathfrak{B}$ die Summe je zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, ausdrücken.

2.

Sind also $-\overset{1}{w}$, $-\overset{2}{w}$, $-\overset{3}{w}$ die drei Werthe für y, so sind $\overset{1}{w}+\overset{2}{w}$, $\overset{1}{w}+\overset{3}{w}$, $\overset{2}{w}+\overset{3}{w}$ die drei Werthe für $\mathfrak{B}$, also positive Grössen, und es muss für die Gleichung in $\mathfrak{B}$ ein dreimaliger Zeichenwechsel stattfinden. Derselbe findet aber [1. 10)] nur unter der Voraussetzung statt, dass $bc>a$ sei.

Ist daher $bc<a$, so deutet dieser Widerspruch auf zwei imaginäre Wurzeln. Vorläufig wollen wir die Bedingung $bc>a$ unterstellen.

3.

Hat man aus der gegebenen Gleichung irgend einen Wurzelwerth $-\overset{1}{w}$ bestimmt, so lassen sich aus [1. 4)—8)] die beiden andern Werthe für y leicht ableiten. Man findet:

1) $$y=-\frac{\mathfrak{B}}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{B}^2-4\mathfrak{A}}$$

oder

2) $$y=-\tfrac{1}{2}(c-\overset{1}{w})\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(c-\overset{1}{w})(c+3\overset{1}{w})-4b}.$$

Hieraus geht hervor, dass die beiden letzteren Wurzeln der gegebenen Gleichung als zweitheilige Grössen, deren zweiter Theil eine Quadratwurzelgrösse darstellt, gefunden werden.

Da nun nach [1. 8)] $c=\overset{1}{w}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ aber (unter der Voraussetzung: $bc>a$) positiv ist, so folgt:

3) $$c>\overset{1}{w},$$

und daher ist der erste Theil dieser zweitheiligen Grösse stets negativ. Aus demselben Grunde ist auch der erste Theil der Grösse unter dem Wurzelzeichen stets positiv, und es hängt nur noch von dem Werthe der Grösse $-4b$ ab, ob die Summe beider Theile der Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv oder negativ, d. h. ob die Wurzelgrösse selbst reell oder imaginär sei.

Wir wollen die hierdurch verschiedenen Formen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung mit

I.	II.
$-w,\quad -\mathfrak{a}-\alpha,\quad -\mathfrak{a}+\alpha$	$-w,\quad -\mathfrak{a}-\alpha\sqrt{-1},\quad -\mathfrak{a}+\alpha\sqrt{-1}$

bezeichnen, und, zur Vergleichung mit einander, die Coefficienten der gegebenen Gleichung durch diese Wurzelwerthe ausdrücken.

4.

Substituirt man die Wurzelwerthe [3. I. u. II.] in [1. 2)] und führt die Multiplikation wirklich aus, so ergeben sich

I. Für drei reelle Wurzeln:

1) $+a=(\mathfrak{a}^2-\alpha^2).w,$

2) $+b=2\mathfrak{a}w+\mathfrak{a}^2-\alpha^2,$

3) $+c=w+2\mathfrak{a}.$

II. Für eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln:

1) $+a=(\mathfrak{a}^2+\alpha^2).w,$

2) $+b=2\mathfrak{a}w+\mathfrak{a}^2+\alpha^2,$

3) $+c=w+2\mathfrak{a}.$

5.

Die Formeln [4. I.] setzen, weil die Grössen a und b das positive Vorzeichen haben, voraus, dass $\mathfrak{a}>\alpha$ sei, während die Formeln [4. II.] für jeden Werth von α positive Vorzeichen für a und b ergeben.

In den Formeln [4. II.] kann sogar unter gewissen Beschränkungen zur Erzielung positiver Vorzeichen der Grössen a, b, c für $\mathfrak{a}$ ein negativer Werth stattfinden.

Schreiben wir $-\mathfrak{a}$ anstatt $\mathfrak{a}$ in die Formeln [4. II.], so gehen dieselben über in:

1) $$+a=(\mathfrak{a}^2+\alpha^2).w,$$

2) $$+b=-2\mathfrak{a}w+\mathfrak{a}^2+\alpha^2,$$

3) $$+c=w-2\mathfrak{a}.$$

Aus 2) folgt, wegen des positiven Werthes von b:

4) $$\mathfrak{a}^2+\alpha^2>2\mathfrak{a}w,$$

und aus 3), wegen des positiven Werthes von c:

5) $$2\mathfrak{a}<w,$$

und hieraus:

6) $$\mathfrak{a}<\frac{w}{2}.$$

Unter diesen Beschränkungen können also auch die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung die Form annehmen:

II. $$-w,\quad +\mathfrak{a}-\alpha\sqrt{-1},\quad +\mathfrak{a}+\alpha\sqrt{-1}.$$

6.

Es ergiebt sich nun aus [5. 5)]:

$$2\mathfrak{a}w<w^2,$$

folglich um so mehr:

$$2\mathfrak{a}w<\mathfrak{a}^2+\alpha^2+w^2$$

und

$$4\mathfrak{a}^2w<2\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^2+\alpha^2)+2\mathfrak{a}w^2,$$

nämlich:

$$-2\mathfrak{a}w^2+4\mathfrak{a}^2w-2\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^2+\alpha^2)<0,$$

also auch:

$$-2\mathfrak{a}w^2+(\mathfrak{a}^2+\alpha^2).w+4\mathfrak{a}^2w-2\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^2+\alpha^2)<(\mathfrak{a}^2+\alpha^2).w,$$

nämlich:

$$(-2\mathfrak{a}w+\mathfrak{a}^2+\alpha^2)(w-2\mathfrak{a})<(\mathfrak{a}^2+\alpha^2).w,$$

d. h.

$$bc<a. \qquad [5.\ 1)-3)]$$

Wir können daher sagen:

Sind sämmtliche Vorzeichen einer gegebenen cubischen Gleichung einander gleich, so hat dieselbe, wenn das Produkt der

Coefficienten der ersten und zweiten Potenz der unbekannten Grösse kleiner ist wie das von der unbekannten Grösse unabhängige Glied, eine negative reelle und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

7.

1) Ist $bc = a$, so ist eine der drei Wurzeln der Gleichung [1. 10)] Null und die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung [1. 1)] ergeben sich:

$$-c, \quad +\sqrt{-b}, \quad -\sqrt{-b}.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man in [4. II.] $\alpha = 0$ setzt. Man erhält:

$$+a = \alpha^2 w, \quad +b = \alpha^2, \quad +c = w;$$

also aus der Bedingung $bc = a$ die Wurzeln wie oben.

Ferner folgt:

2) Ist $bc < a$, so ist der absolute Werth der reellen negativen Wurzel $> c$, nämlich es ist diese Wurzel $< -c$.

3) Ist $bc > a$, so ist der absolute Werth der reellen negativen Wurzel $< c$, nämlich es ist diese Wurzel $> -c$.

8.

Ersetzt man in Formel [3. 2)] die eintheilige Wurzelform durch die zweitheilige, so geht dieselbe über in:

1) $$y = -\alpha \pm \sqrt{2\alpha c - 3\alpha^2 - b},$$

und wir erhalten zwei reelle Werthe für y, wenn

2) $$2\alpha c - 3\alpha^2 - b \geqq 0$$

ist. Hieraus ergiebt sich:

3) $$\alpha \leqq \tfrac{1}{3}c \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b}.$$

Ist in diesem Ausdruck $c^2 < 3b$, so erhält offenbar α selbst einen imaginären Werth, weil nur reelle Grössen mit reellen und imaginäre mit imaginären verglichen werden können.

In diesem Falle können wir setzen:

4) $$\alpha = p \pm q\sqrt{-1},$$

wodurch wir zwei imaginäre Wurzelwerthe erhalten.

Daher können wir sagen:

Sind sämmtliche Vorzeichen einer gegebenen cubischen Gleichung einander gleich und ist das Quadrat des Coefficienten der zweiten Potenz der Unbekannten kleiner wie der dreifache Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten, so hat die vorgelegte Gleichung eine negative reelle und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind. [Mit Berücksichtigung von 6.]

9.

Ist [8. 2)]

1) $$2\alpha c - 3\alpha^2 - b = 0,$$

nämlich:

2) $$\alpha = \tfrac{1}{3}c \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b},$$

so verschwindet die Grösse unter dem Wurzelzeichen der Formel [8. 1)], und es ergeben sich für y zwei vollkommen gleiche reelle Wurzeln, jede gleich $-\alpha$. Die drei Wurzeln sind daher in diesem Falle:

$$-\tfrac{1}{3}c \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b}, \quad -\tfrac{1}{3}c \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b}, \quad -\tfrac{1}{3}c \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b}.$$

Ist ausserdem:

3) $$c^2 = 3b,$$

so verschwindet auch die Grösse unter dem Wurzelzeichen der vorhergehenden Formel. Man erhält:

4) $$\alpha = 0 \text{ und } \alpha = \tfrac{1}{3}c,$$

und diese Werthe in [4. I.] substituirt:

5) $$+a = +\frac{c^3}{27} = \frac{bc}{9},$$

6) $$+b = +\frac{3c^2}{9} = \frac{c^2}{3},$$

7) $$+c = +\frac{3c}{3};$$

d. h. es ergeben sich, wenn diese Bedingungen stattfinden, für y drei vollkommen gleiche reelle Wurzeln, jede $= -\frac{c}{3}$.

Ist

8) $$c^2 = 3b,$$

also die gegebene Gleichung:

$$0 = a + \frac{c^2}{3} \cdot y + cy^2 + y^3,$$

und man befreit dieselbe von dem Gliede cy^2, indem man

$$y = -\tfrac{1}{3}c + x$$

setzt, so fällt auch das Glied $\frac{c^2}{3} \cdot y$ weg, und man erhält als transformirte Gleichung:

$$0 = \left(a - \frac{c^3}{27}\right) + x^3,$$

also

$$x = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{27a - c^3},$$

daher

$$y = -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{27a - c^3}.$$

Die beiden andern Werthe ergeben sich dann:

$$y = -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{27a - c^3}.[1 \pm \sqrt{-3}].$$

10.

Aus der Vergleichung von [1. 8)] und [4. I. 3) und II. 3)] folgt:

1) $$\mathfrak{B} = 2\mathfrak{a},$$

und wenn man diesen Werth von $\mathfrak{B}$ in [1. 10)] substituirt, so ergiebt sich:

2) $$0 = -(bc - a) + 2(b + c^2).\mathfrak{a} - 8c.\mathfrak{a}^2 + 8.\mathfrak{a}^3.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung, für welche man auch schreiben kann:

3) $$a = bc - 2(b + c^2).\mathfrak{a} + 8c.\mathfrak{a}^2 - 8\mathfrak{a}^3,$$

die Grössen b und c als constant und $\mathfrak{a}$ als veränderlich, so wird auch a eine veränderliche Grösse und mit dem Wachsen von $\mathfrak{a}$ theils zu-, theils abnehmen.

11.

Substituirt man in diese Gleichung [10. 3)] für a seinen Werth aus Gleichung [9. 2)], so erhält man nach gehöriger Reduction die Gleichung:

1) $$27a = 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}),$$

welche uns die Bedingung ausdrückt, für welche die vorgelegte Gleichung [1. 1)] zwei vollkommen gleiche reelle Wurzeln liefert.

Substituirt man aber aus der Ungleichung [8. 3)] den grösseren Werth für a in [10. 3)], so erhält man, nach gehöriger Reduction, als Bedingung für drei reelle Wurzeln, die Ungleichung:

2) $$27a > 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}),$$

und auf analoge Weise als Bedingung für eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln die Ungleichung:

3) $$27a < 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}).$$

12.

Wegen der doppelten Vorzeichen der Wurzelgrösse in diesen Ausdrücken scheint es nothwendig, die Anwendung derselben einer näheren Erörterung zu unterwerfen. Nehmen wir zu dem Ende a veränderlich an, so hängt der Werth von a, beziehungsweise $27a$, in Gleichung [11. 1)] offenbar von dem gegenseitigen Verhältniss der Grössen b und c ab. Lassen wir a verschwindend klein werden, nämlich in 0 übergehen, so erhalten wir:

1) $$0 = 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}),$$

und es folgt hieraus:

2) $$0 = c^2 - 4b \quad \text{oder} \quad c^2 = 4b.$$

Substituiren wir diesen Werth von c^2 in die Gleichung [11. 1)], so erhalten wir bei Berücksichtigung des oberen Vorzeichens der Wurzelgrösse:

3) $$27a = 0, \quad \text{also auch} \quad a = 0,$$

und bei Berücksichtigung des unteren:

4) $$27a = +4b\sqrt{b} = +\frac{c^3}{2}.$$

Hieraus geht hervor, dass nur das obere Vorzeichen der Wurzelgrösse, unter der Annahme $c^2 = 4b$, für a einen Werth gleich Null, das untere aber, unter derselben Voraussetzung, für a einen positiven Werth liefert.

13.

Für die Gleichung [12. 1.] können wir auch schreiben:

1) $$0 = 9bc - 2c^3 \mp 2(c^2 - 3b)\sqrt{c^2 - 3b}.$$

Ist nun:

2) $$9bc > 2c^3 \pm 2(c^2 - 3b)\sqrt{c^2 - 3b},$$

so ist $27a$ (also a) positiv; ist aber

3) $$9bc < 2c^3 \pm 2(c^2 - 3b)\sqrt{c^2 - 3b},$$

so ist $27a$ (also a) negativ.

14.

Es sei:

1) $$c^2 < 4b \text{ oder } \frac{c^2}{4} < b,$$

nämlich:

2) $$\frac{c^2}{4} + p = 3b \text{ oder } \frac{c^2 + 4p}{4} = b,$$

so ist:

3) $$9bc = 2c^3 + \frac{c^2 + 36p}{4} . c,$$

4) $$2c^3 \pm 2(c^2 - 3b)\sqrt{c^2 - 3b} = 2c^3 \pm \frac{c^2 - 12p}{4} . \sqrt{c^2 - 12p}.$$

Nun ist:

$$\frac{c^2 + 36p}{4} > \frac{c^2 - 12p}{4} \text{ und } c > \sqrt{c^2 - 12p},$$

daher auch:

5) $$9bc > 2c^3 \pm 2(c^2 - 3b)\sqrt{c^2 - 3b},$$

daher

6) a unter der Voraussetzung $c^2 < 4b$ stets positiv. [13. 2)]

15.

Es sei

1) $$c^2 > 4b \text{ oder } \frac{c^2}{4} > b,$$

nämlich:

$$2)\qquad \frac{c^2}{4}-p=3b \quad \text{oder} \quad \frac{c^2-4p}{4}=b,$$

so ist:

$$3)\qquad 9bc=2c^3+\frac{c^2-36p}{4}.c,$$

$$4)\qquad 2c^3+2(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}=2c^3+\frac{c^2+12p}{4}.\sqrt{c^2+12p}.$$

Nun ist:

$$\frac{c^2-36p}{4}<\frac{c^2+12p}{4} \quad \text{und} \quad c<\sqrt{c^2+12p},$$

daher auch:

$$5)\qquad 9bc<2c^3+2(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}, \qquad [13.\ 3)]$$

daher a, unter der Voraussetzung $c^2>4b$, bei Anwendung des oberen Vorzeichens der Wurzelgrösse negativ.

Bei Anwendung des unteren Vorzeichens der Wurzelgrösse folgt alsbald:

$$6)\qquad 9bc>2c^3-2(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}. \qquad [13.\ 2)]$$

daher ist in diesem Falle a eine positive Grösse.

16.

Ist also $c^2<4b$, so ergiebt jedes der beiden Vorzeichen für a einen positiven, ist aber $c^2>4b$, so ergiebt das obere Vorzeichen in den Formeln [11. 2) und 3)] für a einen negativen, das untere aber einen positiven Werth.

Es geht hieraus hervor, dass in Gleichung [11. 1)] bei Anwendung beider Vorzeichen der Wurzelgrösse sich für $27a$, beziehungsweise a, zwei Werthe ergeben, welche die Grenzwerthe sind für die Möglichkeit dreier vorhandener reeller Wurzeln, so nämlich, dass, wenn bei der vorgelegten Gleichung das von der Unbekannten unabhängige Glied gleich einem dieser Grenzwerthe ist oder zwischen beiden Grenzwerthen liegt, die vorgelegte cubische Gleichung drei reelle Wurzelwerthe hat; wenn das von der Unbekannten unabhängige Glied aber über diesen Grenzwerthen liegt, entweder darüber oder darunter, die gegebene Gleichung nur eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat.

Hiernach lassen sich die Formeln [11] nunmehr bestimmter darstellen und man erhält:

17.

A. Wenn $c^2 < 4b$ ist:

Fall	Bedingung	Ergebnis
1) $27a <$	$3bc-2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle negative und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.
2) $27a =$	$3bc-2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle negative Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind.
3) $27a >$	$3bc-2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle negative Wurzeln.
4) $27a <$	$3bc-2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle negative Wurzeln.
5) $27a =$	$3bc-2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle negative Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind.
6) $27a >$	$3bc-2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle negative und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ sind, wenn $a \lessgtr bc$ ist.

B. Wenn $c^2 > 4b$ ist:

Fall	Bedingung	Ergebnis
1) $-27a <$	$3bc-2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle positive Wurzel und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.
2) $-27a =$	$3bc-2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle positive und zwei gleiche reelle negative Wurzeln.
3) $-27a >$	$3bc-2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle positive und zwei reelle negative Wurzeln.

$$
\left.\begin{array}{l}
4)\ 27a < \\[2em]
5)\ 27a = \\[2em]
6)\ 27a >
\end{array}\right\}\ 3bc-2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b}).
$$

4) Für drei reelle negative Wurzeln.

5) Für drei reelle negative Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind.

6) Für eine reelle negative und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{array}{l}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{array}\right\}$ sind, wenn $a \begin{array}{c}<\\>\end{array} bc$ ist.

7) Findet die Gleichung A. (B.) $\left\{\begin{array}{c}2)\\5)\end{array}\right\}$ statt, so sind die drei Wurzeln:

$$-\tfrac{1}{3}c\mp\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b},\quad -\tfrac{1}{3}c\mp\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b},\quad -\tfrac{1}{3}c\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b}.$$

8) Findet die Ungleichung A. $\left\{\begin{array}{c}1)\\6)\end{array}\right\}$ statt,

so ist die reelle negative Wurzel: $\begin{array}{c}>\\<\end{array}\left\{-\tfrac{1}{3}c\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b}\right.$

d. h. ihr absoluter Grössenwerth ist: $\begin{array}{c}<\\>\end{array}\left\{+\quad\mp\right.$

9) Findet die Ungleichung A. $\left\{\begin{array}{c}3)\\4)\end{array}\right\}$ statt,

so ist eine der drei reellen negat. Wurzeln: $\begin{array}{c}<\\>\end{array}\left\{-\tfrac{1}{3}c\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b}\right.$

d. h. ihr absoluter Grössenwerth ist: $\begin{array}{c}>\\<\end{array}\left\{+\quad\mp\right.$

10) Findet die Ungleichung B. $\left\{\begin{array}{c}1)\\3)\end{array}\right\}$ statt,

so ist die reelle positive Wurzel: $\begin{array}{c}>\\<\end{array}\ -\tfrac{1}{3}c+\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b}$

11) Findet die Ungleichung B. $\left\{\begin{array}{c}4)\\6)\end{array}\right\}$ statt, so

ist $\left\{\begin{array}{l}\text{eine der drei reellen negat. Wurzeln:}\\ \text{die reelle negative Wurzel:}\end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}>\\<\end{array}\left\{-\tfrac{1}{3}c-\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b}\right.$

d. h. ihr absoluter Grössenwerth ist: $\begin{array}{c}<\\>\end{array}\left\{+\quad+\right.$

18.

Ist in [1. 1)] a eine negative Grösse, also die gegebene Gleichung

$$1)\qquad 0 = -a + by + cy^2 + y^3,$$

so wird in [4. I. 1), $\alpha > \mathfrak{a}$ gedacht, das von der Unbekannten unabhängige Glied negativ, und man erhält als weitere Bedingung, zur Herstellung eines positiven Werthes von b, offenbar

$$2)\qquad \alpha^2 < 2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2.$$

Da hier w positiv, also eine Wurzel der Gleichung negativ ist, so ist von den beiden letzteren Wurzeln

$$3)\qquad y = -\mathfrak{a} \pm \alpha$$

wegen $\alpha > \mathfrak{a}$, die eine positiv, die andere negativ. Hat daher die Gleichung drei reelle Wurzeln, so hat sie eine positive und zwei negative Wurzeln, was auch aus dem Zeichenwechsel der gegebenen Gleichung hervorgeht.

Die Bedingung $\alpha > \mathfrak{a}$ findet indessen zur Erzielung eines negativen a nicht statt, sobald der vorgelegten Gleichung eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln entsprechen. [4. II. 1)]

Nehmen wir w negativ an, so erhalten wir als Darstellung der Coefficienten:

I. Für drei reelle Wurzeln.

$$1)\qquad -a = -(\mathfrak{a}^2 - \alpha^2).w, \qquad \text{also } \mathfrak{a} > \alpha,$$

$$2)\qquad +b = -2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2 - \alpha^2, \qquad ,,\ 2\mathfrak{a}w < \mathfrak{a}^2 - \alpha^2,$$

$$3)\qquad +c = -w + 2\mathfrak{a}, \qquad ,,\ w < 2\mathfrak{a}.$$

II. Für eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

$$1)\qquad -a = -(\mathfrak{a}^2 + \alpha^2).w,$$

$$2)\qquad +b = -2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2 + \alpha^2, \qquad \text{also } 2\mathfrak{a}w < \mathfrak{a}^2 + \alpha^2,$$

$$3)\qquad +c = -w + 2\mathfrak{a}, \qquad ,,\ w < 2\mathfrak{a}.$$

Da hier w negativ, also eine Wurzel der Gleichung positiv ist, und sich die beiden letzteren Wurzelwerthe:

I.	II.
$y = -\mathfrak{a} \pm \alpha,$	$y = -\mathfrak{a} \pm \alpha\sqrt{-1}$

ergeben, so erhält man

wegen $\mathfrak{a} > \alpha$ diese Wurzeln negativ.

die reellen Theile dieser imaginären Wurzeln negativ.

19.

Ist in [18. II. 3)] $w = \mathfrak{a}$, so folgt:

1) $$-a = -\mathfrak{a}^3 - \mathfrak{a}\alpha^2,$$

2) $$+b = -\mathfrak{a}^2 + \alpha^2, \text{ also } \alpha^2 > \mathfrak{a}^2,$$

3) $$+c = \mathfrak{a}(=y).$$

Hieraus findet sich:

4) $$-a = -2c^3 - bc \text{ oder } +a = 2c^3 + bc.$$

Findet daher diese Bedingung statt, so ist die positive Wurzel der gegebenen Gleichung $= c$ und die beiden imaginären Wurzeln sind:

$$-c \pm \sqrt{c^2+b}.\sqrt{-1}.$$

5) Ist $-a \lessgtr -2c^3 - bc$, nämlich: $+a \gtrless 2c^3 + bc$,

so ist die positive Wurzel der gegebenen Gleichung $\gtrless c$.

20.

Bezeichnen wir die drei reellen Wurzelwerthe mit $+\overset{1}{w}$, $-\overset{2}{w}$, $-\overset{3}{w}$, so erhalten wir als Wurzelwerthe für $\mathfrak{B}$, nach [2.]:

$$-\overset{1}{w} + \overset{2}{w}, \quad -\overset{1}{w} + \overset{3}{w}, \quad +\overset{2}{w} + \overset{3}{w}.$$

Die Gleichung für $\mathfrak{B}$ ergiebt sich aus [1. 10)], wenn wir daselbst $-a$ für a schreiben, nämlich:

1) $$0 = -(a+bc) + (b+c^2).\mathfrak{B} - 2c.\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^3,$$

welche, wegen des dreimaligen Zeichenwechsels, drei positive Wurzelwerthe hat. Hieraus folgt, dass die Wurzeln

$$-\overset{1}{w} + \overset{2}{w}, \quad -\overset{1}{w} + \overset{3}{w}$$

positive Grössen sind, und es folgt weiter:

2) $$\overset{1}{w} < \overset{2}{w}, \quad \overset{1}{w} < \overset{3}{w},$$

d. h. der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel der gegebenen Gleichung ist kleiner wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden negativen Wurzeln.

Die Bedingungen für das Vorhandensein reeller und imaginärer Wurzeln erhellen theils aus [8.], theils gelten hierfür die Formeln [17. B. 1)—3)], und ist leicht nachzuweisen, dass für sie $c^2 \gtrless 4b$ sein könne.

21.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0 = +a - by + cy^2 + y^3.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass sich in den Darstellungen [4. I. und II.] nur dann negative Werthe für b und positive Werthe für a und c ergeben, wenn man die Grösse $\mathfrak{a}$ negativ annimmt.

Man erhält dann in Bezug auf die gegebene Gleichung:

I. Für drei reelle Wurzeln.

1) $+a = (\mathfrak{a}^2 - \alpha^2).w,$ also $\mathfrak{a} > \alpha,$

2) $-b = -2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2 - \alpha^2,$ „ $2\mathfrak{a}w > \mathfrak{a}^2 - \alpha^2,$

3) $+c = w - 2\mathfrak{a},$ „ $w > 2\mathfrak{a}.$

II. Für eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

1) $+a = (\mathfrak{a}^2 + \alpha^2).w,$

2) $-b = -2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2 + \alpha^2,$ also $2\mathfrak{a}w > \mathfrak{a}^2 + \alpha^2,$

3) $+c = w - 2\mathfrak{a},$ „ $w > 2\mathfrak{a}.$

Da hier w positiv ist, so ist eine Wurzel negativ. Die beiden andern ergeben sich dann:

I.

$$y = +\mathfrak{a} \pm \alpha,$$

und sind daher beide, wegen $\mathfrak{a} > \alpha$, positiv.

II.

$$y = +\mathfrak{a} \pm \alpha\sqrt{-1},$$

und ist der reelle Theil der beiden imaginären Wurzeln positiv.

22.

Dagegen lassen sich in der Darstellung [4. I.] auch positive Werthe von a und c und ein negativer Werth für b erzielen, wenn man w negativ annimmt. Man erhält dann:

I. Für drei reelle Wurzeln.

1) $+a = -(\mathfrak{a}^2 - \alpha^2).w$, also $\mathfrak{a} < \alpha$,

2) $-b = -2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2 - \alpha^2$, „ $2\mathfrak{a}w > \mathfrak{a}^2 - \alpha^2$,

3) $+c = -w + 2\mathfrak{a}$.

Ist in 3) $w = \mathfrak{a}$, so folgt:

4) $$+a = -\mathfrak{a}^3 + \mathfrak{a}\alpha^2,$$

5) $$-b = -\mathfrak{a}^2 - \alpha^2,$$

6) $$+c = \mathfrak{a}\,(=y).$$

Hieraus findet sich:

7) $a = bc - 2c^3$, also $b > 2c^2$,

und die Wurzelwerthe sind:

$$+c, \quad -c + \sqrt{b - c^2}, \quad -c - \sqrt{b - c^2}.$$

8) Ist $a \lessgtr bc - 2c^3$, so ist die erste Wurzel $\lessgtr +c$.

23.

Bezeichnen wir die drei reellen Wurzelwerthe mit $-\overset{1}{w}$, $+\overset{2}{w}$, $+\overset{3}{w}$, so erhalten wir als Wurzelwerthe für $\mathfrak{B}$ [nach 2.]:

$$+\overset{1}{w} - \overset{2}{w}, \quad +\overset{1}{w} - \overset{3}{w}, \quad -\overset{1}{w} - \overset{3}{w}.$$

Die Gleichung für $\mathfrak{B}$ ergiebt sich aus [1. 10)], wenn man daselbst $-b$ für b schreibt. Man erhält:

1) $$0 = +(bc + a) + (c^2 - b).\mathfrak{B} - 2c.\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^3.$$

Ist hier $c^2 \gtrless b$, also der Coefficient von $\mathfrak{B}$ positiv oder negativ, so entsprechen dieser Gleichung, wegen des in beiden Fällen stattfindenden zweimaligen Zeichenwechsels, im Falle die vorgelegte Gleichung nur reelle Wurzeln hat, zwei positive und eine negative Wurzel, daher müssen die beiden ersteren Wurzeln dieser Gleichung, nämlich:

$$+\overset{1}{w} - \overset{2}{w} \text{ und } +\overset{1}{w} - \overset{3}{w}$$

positiv sein. Hieraus ergiebt sich:

2) $$\overset{1}{w} > \overset{2}{w} \text{ und } \overset{1}{w} > \overset{3}{w},$$

d. h. der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel der gegebenen Gleichung ist grösser wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden positiven Wurzeln.

24.

Die Bedingungen für das Vorhandensein reeller und imaginärer Wurzeln ergeben sich aus [17. A. 4)—6)], wenn man daselbst $-b$ für b schreibt. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 27a < \\ 2)\ 27a = \\ 3)\ 27a > \end{array}\right\} -3bc-2(c^2+3b)(c-\sqrt{c^2+3b}).$$

1) Für eine negative und zwei positive reelle Wurzeln.

2) Für eine negative und zwei gleiche positive reelle Wurzeln.

3) Für eine negative reelle und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

4) Im Falle Gleichung 2) stattfindet, sind die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$-\tfrac{1}{3}c+\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+3b},\quad -\tfrac{1}{3}c+\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+3b},\quad -\tfrac{1}{3}c-\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}.$$

5) Findet die Ungleichung $\left\{\begin{matrix}1)\\3)\end{matrix}\right\}$ statt, so

ist die reelle negative Wurzel: $\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\ -\tfrac{1}{3}c-\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}$

d. h. ihr absoluter Grössenwerth ist: $\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\ +\quad +$

25.

Ist in [21.] a negativ, also die gegebene Gleichung:

$$0=-a-by+cy^2+y^3,$$

so werden in [21. I. u. II.] w negativ und $\mathfrak{a}$ positiv und man erhält:

I. Für drei reelle Wurzeln.

1) $\quad -a=-(\mathfrak{a}^2-\alpha^2).w,\quad$ also $\mathfrak{a}>\alpha,$

2) $\quad -b=-2\mathfrak{a}w+\mathfrak{a}^2-\alpha^2,\quad$ „ $2\mathfrak{a}w>\mathfrak{a}^2-\alpha^2,$

3) $\quad +c=-w+2\mathfrak{a},\quad$ „ $w<2\mathfrak{a}.$

II. Für eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

1) $-a = -(\mathfrak{a}^2 + \alpha^2).w,$

2) $-b = -2\mathfrak{a}w + \mathfrak{a}^2 + \alpha^2,$ also $2\mathfrak{a}w > \mathfrak{a}^2 + \alpha^2,$

3) $+c = -w + 2\mathfrak{a},$ „ $w < 2\mathfrak{a}.$

Da hier w negativ ist, so ist eine Wurzel der Gleichung positiv. Die beiden andern ergeben sich:

I.

$$y = -\mathfrak{a} \pm \alpha,$$

und sind daher, wegen $\mathfrak{a} > \alpha$, beide negativ.

II.

$$y = -\mathfrak{a} \pm \alpha\sqrt{-1},$$

und ist der reelle Theil der beiden imaginären Wurzeln negativ.

26.

Bezeichnen wir die drei reellen Wurzelwerthe mit $+\overset{1}{w}$, $-\overset{2}{w}$, $-\overset{3}{w}$, so erhalten wir als Wurzelwerthe für $\mathfrak{B}$ [nach 2.]:

$$-\overset{1}{w} + \overset{2}{w}, \quad -\overset{1}{w} + \overset{3}{w}, \quad +\overset{2}{w} + \overset{3}{w},$$

also eine der Wurzeln stets positiv.

Die Gleichung für $\mathfrak{B}$ ergiebt sich aus [I. 10)], wenn wir daselbst $-a$ für a und $-b$ für b schreiben, nämlich:

1) $0 = -(a - bc) + (c^2 - b).\mathfrak{B} - 2c.\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^3.$

Ist

2) $a < bc$ und $c^2 < b,$

so sind die Vorzeichen:

$$+ \quad - \quad - \quad +.$$

Ist

3) $a < bc$ und $c^2 > b,$

so sind die Vorzeichen:

$$+ \quad + \quad - \quad +.$$

Die Gleichung in $\mathfrak{B}$ hat daher in beiden Fällen zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, daher entsprechen ihr in beiden Fällen, im Falle die vorgelegte Gleichung nur reelle Wurzeln hat, zwei positive und eine negative Wurzel. Mithin ist auch eine der Wurzeln

$$-\overset{1}{w}+\overset{2}{w},\quad -\overset{1}{w}+\overset{3}{w}$$

positiv, die andere negativ. Nehmen wir erstere als positiv, letztere als negativ, so folgt:

$$\overset{1}{w}<\overset{2}{w},\quad \overset{1}{w}>\overset{3}{w},$$

d. h. der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel der gegebenen Gleichung liegt zwischen den beiden absoluten Grössenwerthen der negativen Wurzeln.

Ist

4) $$a>bc \text{ und } c^2<b,$$

so sind die Vorzeichen:

$$-\quad -\quad -\quad +,$$

und die Gleichung in 𝔅 hat wegen der zweimaligen Zeichenfolge und des einmaligen Zeichenwechsels zwei negative und eine positive Wurzel, daher sind die Wurzeln

$$-\overset{1}{w}+\overset{2}{w},\quad -\overset{1}{w}+\overset{3}{w}$$

negative Grössen, und es folgt:

$$\overset{1}{w}>\overset{2}{w},\quad \overset{1}{w}>\overset{3}{w},$$

d. h. der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel der gegebenen Gleichung ist grösser wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden negativen Wurzeln.

Ist

5) $$a>bc \text{ und } c^2>b,$$

so sind die Vorzeichen:

$$-\quad +\quad -\quad +.$$

Die Gleichung in 𝔅 hat daher wegen des dreimaligen Zeichenwechsels drei positive Wurzeln, daher sind die Wurzeln

$$-\overset{1}{w}+\overset{2}{w},\quad -\overset{1}{w}+\overset{3}{w}$$

positive Grössen, und es folgt:

$$\overset{1}{w}<\overset{2}{w},\quad \overset{1}{w}<\overset{3}{w},$$

d. h. der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel der gegebenen Gleichung ist kleiner wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden negativen Wurzeln.

Ist

6) $$a = bc,$$

so ist ein Werth von $\mathfrak{Y} = 0$, und die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind:

$$-c, \quad +\sqrt{b}, \quad -\sqrt{b},$$

die Gleichung hat daher eine negative und zwei gleiche entgegengesetzte reelle Wurzeln.

Ist

7) $$a \gtrless bc, \text{ nämlich } -a \lessgtr -bc,$$

so ist die erste Wurzel $\lessgtr -c$.

27.

Ist in [25. I. 3) und II. 3)] $\mathfrak{w} = \mathfrak{a}$, so ist:

	I.	II.
1)	$-a = -\mathfrak{a}^3 + \mathfrak{a}\alpha^2,$	$-a = -\mathfrak{a}^3 - \mathfrak{a}\alpha^2,$
2)	$-b = -\mathfrak{a}^2 - \alpha^2,$	$-b = -\mathfrak{a}^2 + \alpha^2,$
3)	$+c = \mathfrak{a}(=y).$	$+c = \mathfrak{a}(=y).$

Aus beiden Darstellungen folgt:

4) $$-a = -2c^3 + bc, \text{ also } 2c^2 > b.$$

Findet diese Bedingung statt, so sind die drei Wurzelwerthe:

$$+c, \quad -c + \sqrt{b - c^2}, \quad -c - \sqrt{b - c^2}.$$

Es findet sich leicht weiter: Ist

5) $$-a \lessgtr -2c^3 + bc, \text{ nämlich } a \gtrless 2c^3 - bc,$$

so ist die positive Wurzel der gegebenen Gleichung $\gtrless c$.

28.

Die Bedingungen für das Vorhandensein reeller und imaginärer Wurzeln ergeben sich aus [17. B. 4)—5)], wenn man daselbst $-b$ für b schreibt. Man erhält:

1) $-27a <$ $\left.\right\}$ Für eine reelle positive und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.

2) $-27a = \left\{ -3bc - 2(c^2+3b)(c+\sqrt{c^2+3b}) \right.$. Für eine reelle positive und zwei gleiche reelle negative Wurzeln.

3) $-27a >$ Für eine reelle positive und zwei reelle negative Wurzeln.

4) Im Falle Gleichung 2) stattfindet, sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$-\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+3b}, \quad -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+3b}, \quad -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}.$$

5) Findet die Ungleichung $\left\{ \begin{matrix} 1) \\ 3) \end{matrix} \right\}$ statt, so ist die reelle positive Wurzel $\gtrless -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}$.

29.

Es sei die gegebene Gleichung:

1) $$0 = -a + by - cy^2 + y^3.$$

Man erhält dieselbe, wenn man in Gleichung [1. 1)] $-y$ für y schreibt. Ihre Wurzeln sind den Wurzeln dieser Gleichung an absoluter Grösse vollkommen gleich und haben nur entgegengesetzte Zeichen. Wir können daher Alles, was bereits über die Gleichung [1. 1)] gesagt ist, auf die vorgelegte leicht anwenden. Wir erhalten:

2) Ist $bc < a$, so hat die gegebene Gleichung eine positive reelle Wurzel ($> c$) und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.

3) Ist $bc = a$, so sind die drei Wurzeln der Gleichung

$$+c, \quad +\sqrt{-b}, \quad -\sqrt{-b}. \qquad [7. 1)]$$

4) Ist $bc \lessgtr a$, so ist die reelle Wurzel $\gtrless c$. [7. 2) 3)]

5) Ist

$$-a=-\frac{c^3}{27}=-\frac{bc}{9},$$

so hat die Gleichung drei positive gleiche reelle Wurzeln. [9. 5)]

6) Ist $c^2<3b$, so hat die gegebene Gleichung eine positive reelle Wurzel und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, wenn $bc \gtrless a$ ist.

Ist $c^2<4b$, so ist:

7)	$-27a > -3bc+2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle positive und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.
8)	$-27a = -3bc+2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle positive Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind.
9)	$-27a < -3bc+2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle positive Wurzeln.
10)	$-27a > -3bc+2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle positive Wurzeln.
11)	$-27a = -3bc+2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})$.	Für drei reelle positive Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind.
12)	$-27a < -3bc+2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})$.	Für eine reelle positive und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, wenn $a \lessgtr bc$ ist.

13) Ist $c^2>4b$, so kommen die Formeln 10)—12) in Anwendung.

14) Im Falle die Gleichung $\left\{\begin{matrix}8)\\ 11)\end{matrix}\right\}$ stattfindet, sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$+\tfrac{1}{3}c\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b},\quad +\tfrac{1}{3}c\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b},\quad +\tfrac{1}{3}c\mp\tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b}.$$

15) Findet die Ungleichung $\left\{\begin{matrix} 7) \\ 12) \end{matrix}\right\}$ statt, so ist die reelle positive Wurzel $\lessgtr + \frac{1}{3}c \mp \frac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b}$.

16) Findet die Ungleichung $\left\{\begin{matrix} 9) \\ 10) \end{matrix}\right\}$ statt, so ist eine der drei positiven Wurzeln $\gtrless + \frac{1}{3}c \mp \frac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b}$.

30.

Es sei die gegebene Gleichung:

1) $$0 = + a + by - cy^2 + y^3.$$

Diese Gleichung wird erhalten, wenn man in Gleichung [18.] $-y$ für y schreibt. Daher ergiebt sich:

2) $c^2 < 3b$ — Für eine negative reelle und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

3) $27a > -3bc + 2(c^2 - 3b)(c + \sqrt{c^2 - 3b})$ — (wie 2))

4) $27a = -3bc + 2(c^2 - 3b)(c + \sqrt{c^2 - 3b})$. Für eine negative und zwei gleiche positive reelle Wurzeln.

5) $27a < -3bc + 2(c^2 - 3b)(c + \sqrt{c^2 - 3b})$ — Für eine negative u. zwei positive reelle Wurzeln.

6) Hat die Gleichung bloss reelle Wurzeln, so ist der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel kleiner wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden positiven Wurzeln.

7) Ist $a = 2c^3 + bc$, so sind die Wurzelwerthe:

$$-c, \quad + c \pm \sqrt{c^2 + b} . \sqrt{-1}.$$

8) Ist $a \gtrless 2c^3 + bc$, so ist der absolute Grössenwerth der ersteren Wurzel der gegebenen Gleichung $\gtrless c$, d. h. diese Wurzel ist $\lessgtr -c$.

9) Findet die Gleichung 4) statt, so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$+ \tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b}, \quad + \tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b}, \quad + \tfrac{1}{3}c - \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b}.$$

10) Findet die Ungleichung $\left\{ \begin{matrix} 3) \\ 5) \end{matrix} \right\}$ statt,

so ist die reelle negative Wurzel: $\begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \Big\{ +\tfrac{1}{3}c - \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b},$

d. h. ihr absoluter Grössenwerth ist: $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \Big\{ - \quad +$

31.

Es sei die gegebene Gleichung

1) $$0 = -a - by - cy^2 + y^3.$$

Dieselbe wird erhalten wenn man in Gleichung [21.] $-y$ für y schreibt. Daher ergiebt sich:

2) $-27a >$		Für eine positive und zwei negative reelle Wurzeln.
3) $-27a =$	$+3bc + 2(c^2 + 3b)(c - \sqrt{c^2 + 3b})$.	Für eine positive und zwei gleiche negative Wurzeln.
4) $-27a <$		Für eine posit. reelle und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.

5) Hat die Gleichung bloss reelle Wurzeln, so ist der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel grösser wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden negativen Wurzeln.

6) Ist
$$-a = -bc + 2c^3,$$
so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:
$$-c, \quad +c \pm \sqrt{b - c^2}.$$

7) Ist $-a \lessgtr -bc + 2c^3$, so ist erstere Wurzel $\lessgtr -c$.

8) Findet die Gleichung 3) statt, so sind die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung:
$$+\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 + 3b}, \quad +\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 + 3b}, \quad +\tfrac{1}{3}c + \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2 + 3b}.$$

9) Findet die Ungleichung $\left\{ \begin{matrix} 2) \\ 4) \end{matrix} \right\}$ statt, so ist

die reelle positive Wurzel $\lessgtr +\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}$.

32.

Es sei die gegebene Gleichung:

1) $$0 = +a - by - cy^2 + y^3.$$

Man erhält diese Gleichung, wenn man in Gleichung [25.] $-y$ für y schreibt. Daher ergiebt sich:

2) $27a >$ ⎫ Für eine reelle negative und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

3) $27a = \Big\} +3bc + 2(c^2+3b)(c+\sqrt{c^2+3b})$. Für eine reelle negative und zwei gleiche reelle positive Wurzeln.

4) $27a <$ ⎭ Für eine reelle negative und zwei reelle positive Wurzeln.

Sind die drei Wurzelwerthe reell und ist:

5) $$a < bc,$$

so liegt der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel zwischen den beiden absoluten Grössenwerthen der positiven Wurzeln.

6) Ist $a = bc$, so sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$+c, \quad +\sqrt{b}, \quad -\sqrt{b}.$$

7) Ist

$$a > bc \quad \text{und} \quad c^2 < b,$$

so ist der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel grösser wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden positiven Wurzeln.

8) Ist

$$a > bc \quad \text{und} \quad c^2 > b,$$

so ist der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel kleiner wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden positiven Wurzeln.

9) Ist $a \gtrless bc$, so ist eine der Wurzeln $\gtrless +c$.

10) Ist $a = 2c^3 - bc$, so sind die drei Wurzelwerthe:

$$-c, \quad +c \pm \sqrt{b-c^2}.$$

11) Ist $a \gtrless 2c^3 - bc$, so ist die reelle negative Wurzel $\lessgtr -c$.

12) Im Falle Gleichung 3) stattfindet, sind die drei Wurzeln:

$$+\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+3b}, \quad +\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+3b}, \quad +\tfrac{1}{3}c - \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}.$$

13) Findet die Ungleichung $\left\{ \begin{matrix} 2) \\ 4) \end{matrix} \right\}$ statt,

so ist die reelle negative Wurzel: $\lessgtr \left\{ +\tfrac{1}{3}c - \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2+3b}, \right.$

d. h. ihr absoluter Grössenwerth ist: $\gtrless \left\{ - \quad + \right.$

33.

Einfacher gestalten sich die Formeln zur Beurtheilung der Wurzeln, wenn man die gegebene Gleichung so umformt, dass der Coefficient $c = 0$ wird.

Man erhält dann, wegen [8. 3)], für alle umgeformten Gleichungen, in welchen b positiv ist, also für die Gleichungen von der Form:

1) $$0 = \pm a + by + y^3,$$

eine $\left\{ \begin{matrix} \text{negative} \\ \text{positive} \end{matrix} \right\}$ reelle und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ sind.

Ist die umgeformte Gleichung:

2) $$0 = \pm a - by + y^3,$$

so ergiebt sich nach [24. oder 28.]:

3) $\pm 27a \lessgtr \pm 6b\sqrt{3b}$, für eine reelle $\left\{ \begin{matrix} \text{negative} \\ \text{positive} \end{matrix} \right\}$ und zwei reelle $\left\{ \begin{matrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{matrix} \right\}$ Wurzeln.

4) $\pm 27a = \pm 6b\sqrt{3b}$, für eine reelle $\left\{ \begin{matrix} \text{negative} \\ \text{positive} \end{matrix} \right\}$ und zwei gleiche reelle $\left\{ \begin{matrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{matrix} \right\}$ Wurzeln.

5) $\pm 27a \gtrless \pm 6b\sqrt{3b}$, für eine reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind.

6) Im Falle die Gleichung 4) stattfindet, sind die drei Wurzeln der umgeformten Gleichung:

$$\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3b},\quad \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3b},\quad \mp\tfrac{2}{3}\sqrt{3b}.$$

7) Findet die Ungleichung 3) statt, so ist die reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Wurzel: $\gtrless \mp\tfrac{2}{3}\sqrt{3b}$.

8) Findet die Ungleichung 5) statt, so ist die reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Wurzel: $\lessgtr \mp\tfrac{2}{3}\sqrt{3b}$.

34.

A. Ist die gegebene Gleichung:

1) $$0 = \pm a \pm cy^2 + y^3,$$

also $b = 0$, so folgt aus [17. A. 4)—6) oder 24.] und [29. 10)—12) oder 31.]:

2) $\pm a = 0$, für eine reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Wurzel $(= \mp c)$ und zwei gleiche reelle Wurzeln (jede $=0$).

3) $\pm a \gtrless 0$, für eine reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind.

B. Ist aber die gegebene Gleichung:

1) $$0 = \pm a \mp cy^2 + y^3,$$

so folgt aus [30. oder 32.] und [17. B. 1)—3) oder 28.]:

2) $\pm 27a \lessgtr \pm 4c^3$, für eine reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ und zwei reelle $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzeln.

3) $\pm 27a = \pm 4c^3$, für eine reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ und zwei gleiche reelle $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzeln.

4) $\pm 27a \gtrless \pm 4c^3$, für eine reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind.

5) Im Falle Gleichung 3) stattfindet, sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$\pm \tfrac{2}{3}c, \quad \pm \tfrac{2}{3}c, \quad \mp \tfrac{1}{3}c.$$

6) Findet die Ungleichung 2) statt, so ist die reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Wurzel $\gtrless \mp \tfrac{1}{3}c$.

7) Findet die Ungleichung 4) statt, so ist die reelle $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Wurzel $\lessgtr \mp \tfrac{1}{3}c$.

35.

Wenden wir die bisher aufgestellten Regeln auf einige Zahlenbeispiele an. Es sei gegeben:

$$0 = \pm a + \underset{b}{80}y + \underset{c}{16}y^2 + y^3$$

und diese Gleichung in Bezug auf ihre Wurzeln zu beurtheilen.

A. 1) Da hier $c^2 > 3b$, nämlich $256 > 240$, ist, so liegt die Möglichkeit dreier reeller Wurzeln vor. Da ferner $c^2 < 4b$, nämlich $256 < 320$, ist, so kommen für $+a$ die Formeln [17. A.] in Betracht und man erhält:

2) $a < 118\tfrac{14}{27}$, für eine reelle negative Wurzel, $> -2\tfrac{2}{3}$ [17. 8)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind;

3) $a = 118\tfrac{14}{27}$, für drei reelle negative Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind. Die Wurzeln sind:

$$-6\tfrac{2}{3}, \quad -6\tfrac{2}{3}, \quad -2\tfrac{2}{3} \qquad [17. A. 7)];$$

4) $a > 118\tfrac{14}{27}$, für drei reelle negative Wurzeln, die eine derselben ist $< -2\tfrac{2}{3}$. [17. 9)];

5) $a < 128$, für drei reelle negative Wurzeln, die eine derselben ist > -8. [17. 9)].

6) $a = 128$, für drei reelle negative Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind. Die Wurzeln sind:

$$-4, \quad -4, \quad -8. \qquad [17. A. 7)];$$

7) $a > 128$, für eine reelle negative Wurzel, < -8, [17. 8)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ sind, wenn $a \lessgtr 1280$ ist. Ist:

8) $a < 1280$, so ist die reelle Wurzel > -16. Ist:

9) $a = 1280$, so sind die drei Wurzelwerthe:

$$-16, \quad +\sqrt{-80}, \quad -\sqrt{-80}. \qquad [7. 1)].$$

Ist:

10) $a > 1280$, so ist die reelle Wurzel < -16.

Die vorgelegte Gleichung liefert mithin für alle positiven Werthe von a, welche zwischen $118\frac{14}{27}$ und 128 liegen, diese Werthe mit eingeschlossen, drei reelle Wurzeln.

Für $-a$ kommen von den Formeln [17. B.] nur die 1) in Anwendung. Man erhält:

11) $-a < +118\frac{14}{27}$, daher hat die gegebene Gleichung für ein negatives a stets eine reelle positive Wurzel und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind. Ist:

12) $-a > -9472$, so ist die reelle Wurzel $< +16$. [19. 5)]. Ist:

13) $-a = -9472$, so sind die drei Wurzeln: $+16$, $-16 \pm \sqrt{-336}$. Ist:

14) $-a < -9472$, so ist die reelle Wurzel $< +16$.

B. Befreit man die gegebene Gleichung von dem Gliede $+16y^2$ und setzt zu dem Ende $y = -\frac{16}{3} + x$, so erhält man die transformirte Gleichung:

$$0 = [\pm a - \frac{3328}{27}] - \frac{16}{3} x + x^3$$

und hieraus:

$$+a \lessgtr \left\{\begin{matrix}+128\\ +118\frac{14}{27}\end{matrix}\right. \quad \text{oder} \quad +a = \left\{\begin{matrix}+128\\ +118\frac{14}{27}\end{matrix}\right.,$$

als Grenzwerthe für drei reelle Wurzeln der vorgelegten Gleichung, woraus zugleich hervorgeht, dass hierfür ein negativer Werth von a nicht stattfiden könne.

36.

Es sei die Gleichung:

$$0 = \pm a + \underset{b}{99}y - \underset{c}{21}y^2 + y^3$$

in Bezug auf ihre Wurzeln zu beurtheilen.

A. Hier ist $c^2 > 4b$, nämlich $441 > 396$, es kommen daher bezüglich der Bestimmung der Grenzwerthe für drei reelle Wurzeln die Formeln in [30. und 29. 10)—12)] in Anwendung. Man erhält, ist:

1) $+a > +20601$, so ist die reelle negative Wurzel < -21, d.h. es ist ihr absoluter Werth > 21. [30. 8)];

2) $+a = +20601$, so sind die drei Wurzeln: -21, $+21 \pm \sqrt{-540}$;

3) $+a < +20601$, so ist die reelle negative Wurzel > -21, d. h. es ist ihr absoluter Werth < 21. Ferner ist:

4) $+a > +121$, für eine negative Wurzel < -1 [30. 10)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

5) $+a = +121$, für eine negative und zwei gleiche positive reelle Wurzeln. Diese Wurzeln sind:

$$+11, \quad +11, \quad -1 \qquad [30.\ 9)];$$

6) $+a < +121$, für eine negative Wurzel > -1 [30. 10)] und zwei positive reelle Wurzeln; der absolute Werth der negativen Wurzel ist kleiner wie der absolute Werth jeder der positiven Wurzeln. Ist:

7) $\pm a = 0$, so ist ein Werth von $y = 0$.

8) $-a > -135$, für drei reelle positive Wurzeln, die eine derselben ist $< +15$. [29. 16)];

9) $-a = -135$, für drei reelle positive Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind. Diese Wurzeln sind: $+3$, $+3$, $+15$. [29. 14)]:

10) $-a < -135$, für eine reelle positive Wurzel $> +15$ [29. 15)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, wenn die absolute Grösse von $a \lessgtr 2079$ ist. Ist:

11) $-a > -2079$, so ist die reelle positive Wurzel < 21; ist:

12) $-a = -2079$, so sind die drei Wurzeln: $+21$, $\pm\sqrt{-99}$, und ist:

13) $-a < -2079$, so ist die reelle positive Wurzel > 21.

B. Befreit man die gegebene Gleichung von dem Gliede $-21y^2$, und setzt zu dem Ende $y = 7 + x$, so erhält man die transformirte Gleichung:

$$0 = (\pm a + 7) - 48x + x^3$$

und hieraus nach [33. 3) und 4)]:

$$\pm a \left\{\begin{matrix} < +121 \\ > -135 \end{matrix}\right. \quad \text{und} \quad \pm a = \left\{\begin{matrix} +121 \\ -135 \end{matrix}\right.$$

als Grenzbestimmung für drei reelle Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

37.

Es sei die Gleichung:

$$0 = \pm a - \underset{b}{29}y + \underset{c}{2}y^2 + y^3$$

in Bezug auf ihre Wurzeln zu beurtheilen.

Hier kommen zur Bestimmung der Grenzwerthe für drei reelle Wurzeln die Formeln [24. und 28.] in Anwendung. Man erhält:

1) $+a >$ 44,376642465879.... für eine negative reelle Wurzel $< -7,026....$ [24. 5)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

2) $+a =$ 44,376642465879.... für eine negative und zwei gleiche positive reelle Wurzeln. Diese Wurzeln sind:

$+2,513130671389....$
$+2,513130671389....$
$-7,026261342778....$

[24. 4.];

3) $+a <$ 44,376642465879.... für eine reelle negative Wurzel $> -7,026....$ [24. 5)] und zwei reelle positive Wurzeln. Ist:

4) $\pm a = 0$, so ist ein Werth von $y = 0$

5) $-a >$ −84,228494317731... für eine reelle positive Wurzel $< +5,692....$ [28. 5)] und zwei reelle negative Wurzeln;

6) $-a =$ −84,228494317731... für eine reelle positive und zwei gleiche reelle negative Wurzeln. Diese Wurzeln sind:

$-3,846464004723....$
$-3,846464004723....$
$+5,692928009446....$

[28. 4)];

7) $-a <$ −84,228494317731... für eine reelle positive Wurzel $> 5,692.....$ [28. 5)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.

8) Im Falle 2) und 3) ist der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel stets grösser wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden positiven Wurzeln [23].

9) Im Falle 5) liegt, wenn der absolute Grössenwerth von $a < 58$, also $-a > -58$ ist, der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel zwischen den beiden absoluten Grössenwerthen der negativen Wurzeln [26. 2) und 3)].

10) Ist aber der absolute Grössenwerth von $a > 58$, also $-a < -58$, (wie in 6)), so ist der absolute Grössenwerth der positiven Wurzel grösser wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden negativen Wurzeln [23.].

11) Ist $+a = +42$, so sind die drei Wurzeln: $+2$, -2 ± 5. [22. 7)].

12) Ist $+a \gtrless +42$, so ist die erste Wurzel $\gtrless +2$. [22. 8)].

13) Ist $-a = -58$, so sind die drei Wurzeln: -2, $\pm\sqrt{29}$. [26. 6)].

14) Ist $-a \lessgtr -58$, so ist die erste Wurzel $\lessgtr -2$. [26. 7)].

38.

Es sei die gegebene Gleichung

$$0 = \pm a + \underset{b}{12}y + \underset{c}{6}y^2 + y^3$$

in Bezug auf ihre Wurzeln zu beurtheilen.

Für dieselbe ist $c^2 = 3b$, nämlich $6^2 = 3.12$, daher fallen hier die Gleichungen [17. A. 2) und 5)] zusammen und die gegebene Gleichung hat nur für den Fall, dass

1) $$+a = \frac{bc}{9} = 8$$

ist, drei reelle und zwar negative Wurzeln.

Für diesen Fall sind aber auch die drei Wurzelwerthe, nach [9. 5)] einander vollkommen gleich, also jede $= -2$.

2) Die Wurzeln selbst sind nach [9. 8)]

$$y = -2 - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\pm 27a - 216},$$

$$y = -2 + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{\pm 27a - 216}.[1 \pm \sqrt{-3}].$$

3) Ist $+a \lessgtr 72$, so ist die reelle Wurzel $\gtrless -6$, [7. 3)] und die reellen Theile der imaginären Wurzeln sind $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$.

4) Ist $-a = -504$, so sind die Wurzelwerthe: $+6$, $-6 \pm 4\sqrt{-3}$. [18. 4)].

5) Ist $-a \lessgtr -504$, so ist die reelle Wurzel $\gtrless +6$. [19. 5)].

39.

Es seien die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \pm a - \underset{b}{8}y - \underset{c}{5}y^2 + y^3$$

zu beurtheilen.

Zur Bestimmung der Grenzwerthe für drei reelle Wurzeln u. s. w. kommen für diese Gleichung die Formeln [32. und 31.] in Anwendung. Man erhält:

1) $+a > +48$, für eine reelle negative Wurzel < -3 [32. 13)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind.

2) $+a = +48$, für eine reelle negative und zwei gleiche reelle positive Wurzeln. Diese Wurzeln sind: $+4$, $+4$, -3. [32. 12)].

3) $+a < +48$, für eine reelle negative Wurzel > -3 [32. 13)] und zwei reelle positive Wurzeln. Für

4) $+a > +40$ ist, weil $25 > 24$ ist, [32. 8)] der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel kleiner wie der absolute Grössenwerth jeder der beiden positiven Wurzeln. Für

5) $+a = +40$ sind die Wurzeln: $+5$, $\pm 2\sqrt{2}$, [32. 6)]. Für

6) $+a < +40$ liegt der absolute Grössenwerth der negativen Wurzel zwischen den beiden absoluten Grössenwerthen der positiven Wurzeln. [32. 5)]. Für

7) $+a \gtrless +40$ ist eine der Wurzeln $\gtrless +5$, [32. 9)]. Man erhält weiter

8) $-a > -2\frac{22}{27}$, für eine reelle positive Wurzel $< 6\frac{1}{4}$ [31. 9)] und zwei reelle negative Wurzeln.

Die positive Wurzel ist grösser wie der absolute Werth jeder der beiden negativen Wurzeln.

9) $-a = -2\frac{22}{27}$, für eine positive und zwei gleiche negative

reelle Wurzeln. Diese Wurzeln sind: $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $+6\frac{1}{3}$. [31. 8)].

10) $-a < -2\frac{22}{27}$, für eine positive Wurzel $> 6\frac{1}{3}$ [31. 9)] und zwei imaginäre Wurzeln, deren reelle Theile negativ sind.

40.

Es seien die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \pm a + \underset{b}{5}y - \underset{c}{2}y^2 + y^3$$

zu beurtheilen.

1) Da für diese Gleichung $c^2 < 3b$, nämlich $4 < 15$, ist, so hat sie, welchen Werth auch a haben mag, stets zwei imaginäre Wurzeln.

2) Ist a positiv, so ist die reelle Wurzel negativ und die reellen Theile der imaginären Wurzeln sind positiv. Ist

3) $+a > +26$, so ist die reelle Wurzel < -2. [30. 8)]. Ist

4) $+a = +26$, so sind die drei Wurzeln: -2, $+2 \pm 3\sqrt{-1}$. [30. 7)].

5) $+a < +26$, so ist die reelle Wurzel > -2, [30. 8)].

6) $-a > -10$, so ist die reelle Wurzel < 2, und die reellen Theile der imaginären Wurzeln sind positiv, [29. 4)].

7) $-a = -10$, so sind die drei Wurzeln: $+2$, $\pm\sqrt{-10}$, [29. 3)].

8) $-a < -10$, so ist die reelle Wurzel > 2, und die reellen Theile der imaginären Wurzeln sind negativ. [29. 4)].

Die zweite Abtheilung dieser Abhandlung folgt in einem der nächsten Hefte.

VII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herausgeber.

In einem Briefe (Berlin d. 9. Juni 1750) *) theilt Euler Goldbach folgende „Theoremata" mit, deren Beweise, wie es mir scheint, auf Schulen zweckmässig als leichte Uebungen für Anfänger in der Buchstabenrechnung benutzt werden können, und die auch sonst nicht ohne Interesse sind.

1. Für $a+b+c=3m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2.$$

2. Für $a+b+2c=3m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2.$$

3. Für $a+2b+2c=9m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2.$$

4. Für $a+b+3c=11m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2.$$

5. Für $a+2b+3c=7m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(2m-b)^2+(3m-c)^2.$$

6. Für $2a+2b+3c=17m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(4m-a)^2+(4m-b)^2+(6m-c)^2.$$

7. Für $a+3b+3c=19m$ ist
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(6m-b)^2+(6m-c)^2.$$

---

*) Corréspondance mathématique et physique de quelques célèbres Géomètres du XVIIIème siècle, publiée par P. H. Fuss. Tome I. St.-Pétersbourg. 1843. p. 515.

8. Für $2a+3b+3c=11m$ ist

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(3m-b)^2+(3m-c)^2.$$

---

9. Für $a+b+c+d=2m$ ist

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2.$$

10. Für $a+b+c+2d=7m$ ist

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(4m-d)^2.$$

11. Für $a+b+2c+2d=5m$ ist

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2.$$

12. Für $a+2b+2c+2d=13m$ ist

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2+(4m-d)^2.$$

---

13. Für $a+b+c+d+e=5m$ ist

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$
$$=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2.$$

14. Für $a+b+c+d+2e=4m$ ist

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$
$$=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2+(2m-e)^2.$$

In anderen Briefen theilt **Goldbach Euler** u. A. folgende „**Theoremata**" mit:

15. Es ist

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2.$$

16. Es ist

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha+\beta+\gamma+2\delta)^2=(\alpha+\beta+\delta)^2+(\alpha+\gamma+\delta)^2+(\beta+\gamma+\delta)^2+\delta^2$$
$$=(\alpha+\delta)^2+(\beta+\delta)^2+(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2.$$

17. Es ist

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}(\pm pp\alpha\mp 2qq\beta-2pq\gamma)^2+(\mp 2qq\alpha\pm pp\beta-2pq\gamma)^2\\ +(\mp 2pq\alpha\mp 2pq\beta+(2qq-pp)\gamma)^2\end{array}\right\}}{(pp+2qq)^2}$$
$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

18. Wenn $a^2+b^2+c^2=8m+3$ ist, so ist

$$\frac{(a+b-c\pm1)^2}{4.4}+\frac{(a-b+c\pm1)^2}{4.4}+\frac{(-a+b+c\pm1)^2}{4.4}+\frac{(-a-b-c\pm1)^2}{4.4}=2m+1,$$

„und“ — fügt Goldbach hinzu — „wenn man 3 statt 1 setzet, so kommen vier quadrata $=2m+3$ heraus.“

VIII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Nach einer Mittheilung des Herrn Doctor Lindman in Strengnäs (Archiv, Th. XL. S. 515.) rührt die gewöhnlich nach Jerrard benannte wichtige Transformation der Gleichungen des fünften Grades ursprünglich von dem schwedischen Mathematiker

Erland Samuel Bring

her, der Professor Historiarum an der Universität in Lund war; diese Transformation ist also unbedingt eine

schwedische Erfindung

und fortan

die Bring'sche Transformation der Gleichungen des fünften Grades

zu nennen. In Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årg. 18. — 1861. — Nr. 7. p. 317—p. 355, also bereits vor zwei Jahren, hat Herr Professor Hill in Lund die Verdienste des trefflichen Bring ausführlicher gewürdigt und seine Arbeit mit vielen höchst lehrreichen eigenen Bemerkungen begleitet in dem lesenswerthen Aufsatze: „Några ord om Erland Sam. Brings reduction af 5:te gradens equation. — Af C. Hill. (Meddeladt den 11. September 1861.)

Der vollständige Titel der seltenen Schrift Brings ist:

B. cum D. Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum, quae consent. Ampliss. Facult. Philos. in Regia Academia Carolina Praeside D. Erland Sam. Bring, Hist. Profess. Reg. & Ord. publico Eruditorum Examini modeste subjicit Sven Gustaf Sommelius, Stipendiarius Regius & Palmcreutzia-

nus Lundensis. Die xiv Decemb. MDCCLXXXVI. L. H. Q. S. — Lundae, typis Berlingianis.

und es macht mir besondere Freude, aus derselben, als ein wichtiges historisches Document, die hierher gehörenden Paragraphen im Nachstehenden vollständig mittheilen und im Archiv aufbewahren zu können.

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

§. VII.

Ab aequationibus quibuscunque cubicis prout nobis libitum fuerit transformatis ad aequationes biquadraticas mediante aequatione quadratica similiter transformandas pede inoffenso progredi licet.

Sit igitur proposita haec aequatio $z^4 + nz^2 + pz + q = 0 = A$, in qua exulat terminus secundus, ne majoribus, quam omnino opus est, prematur res difficultatibus. Quod si secundus terminus adfuerit certe eum expellere haud mediocre operae pretium erit.

Sit aequatio subsidiaria $z^2 + bz + a + y = 0 = B$; post exterminatam litteram z erit

$$y^4 \left.\begin{array}{l} +4a \\ -2n \end{array}\right| y^3 \left.\begin{array}{l} +6a^2-6na \\ +nb^2+3pb \\ +n^2+2q \end{array}\right| y^2 \left.\begin{array}{l} +4a^3-6na^2 \\ +\overline{2n^2+4q}.a \\ +6pab+2nb^2a \\ -npb+2nq+p^2 \\ -pb^3-4qb^2 \end{array}\right| y$$

$$\left.\begin{array}{l} +a^4-2na^3+\overline{n^2+2q}.a^2 \\ +3pba^2+nb^2a^2-\overline{2nq+p^2}.a \\ -pnba-4qb^2a-pb^3a \\ +qb^4+nqb^2-qbp+q^2 \end{array}\right| = 0 = C.$$

In hac aequatione facillimo negotio expelluntur terminus 2:dus & tertius, si ponatur

$$\text{1:mo } 4a - 2n = 0 \text{ sive } a = \frac{n}{2} \text{ \&}$$

$$\text{2:do } nb^2 + 3pb + n^2 + 2q - \frac{3n^2}{2} = 0.$$

Verum longe fructuosior videtur exterminatio 2:di et 4:ti termini, cum per eam aequatio biquadratica in quadraticam abeat facillimeque resolvatur. Ad rem eo faciliorem reddendam cum ex iis, quae proxime antecedunt, constet, quomodo exterminentur terminus 2:dus et 3:tius, ponamus hanc exterminationem jam dudum factam esse. Ut sic haec aequatio proposita

$$z^4+pz+q=0=A$$

sit insuper aequatio subsidiaria ut supra

$$z^2+bz+a+y=0=B.$$

post exterminatam litteram z erit

$$y^4+4ay^3+\left.\begin{matrix}6a^2+3pb\\+2q\end{matrix}\right|y^2\left.\begin{matrix}+4a^3+4qa\\+6abp+p^2\\-pb^3-4qb^2\end{matrix}\right|y$$

$$\left.\begin{matrix}+a^4+2qa^2+3pba^2\\+p^2a-4qb^2a-pba^3\\+qb^4-qpb+q^2\end{matrix}\right|=0=C.$$

In qua aequatione si ponatur $a=0$ nec non

$$-pb^3-4qb^2+p^2=0=D$$

necesse est fore ut evanescant terminus secundus et quartus; Quo sit ut haec aequatio formaliter adhuc biquadratica C fiat materialiter quadratica.

Valor igitur τȣ b cum facile innotescat resolvendo aequationem cubicam D, nec non valor τȣ y noscatur post peractam resolutionem aequationis quadraticae C, non potest amplius ignorari valor τȣ z, qui e tenebris suis eruitur, ubi aequatio quadratica B resolvatur. Q. E. F.

§. VIII.

Quod si quis terminum tertium et quartum exterminatos voluerit, incurritur quidem in difficultatem quandam primo intuitu haud ita levem et exiguam, quin nos valde sollicitare debeat; Imprimis cum vereri possimus, ne hujusmodi difficultates in transformandis aequationibus altioris praesertim dignitatis saepissime locum inveniant, sintque ad expellendum tertium, quartum ceterosque terminos forsitan insuperabili nonnunquam impedimento.

Scilicet ad exterminationem simultaneam tertii et quarti termini aequationis biquadraticae requiritur, ut sit

$$\text{1:mo} \quad 6a^2+3pb+2q=0 \text{ sive } b=\frac{-6a^2-2q}{3},$$

$$\text{2:do} \quad 4a^3+4qa+6pba-pb^3-4qb^2+p^2=0.$$

Ex quibus ubi exterminetur sive littera a sive littera b, proficiscitur inde aequatio quaedam, in qua alterutra harum litterarum ad majorem dignitatis gradum evecta sit quam z sive quantitas incognita in aequatione proposita, ut hoc modo ad resolvendam aequationem minoris dignitatis opus nobis sit resolutione aequationis difficilioris, sicque malum in pejus ruat.

Qualiscunque autem haec difficultas in ceteris aequationibus futura sit, certum est, illam in praesenti occasione facile tolli posse. Nam si in aequatione biquadratica proposita primo exterminentur terminus 2:dus et 3:tius, quam exterminationem possibilem esse vidimus, et transformatio deinde instituatur reciproca, nemo est Mathematicorum quin concedat hoc modo exoriri aequationem biquadraticam orbam et 3:tio et 4:to termino, Q. E. F. De reliquo, ut nemo non luculentissime videt, omnes aequationes cujuscunque dignitatis posse mediante aequatione quadratica transformari in aliam, in qua una cum 2:do termino evanescat sive tertius terminus, posita possibilitate resolutionis aequationis quadraticae sive 4:tus terminus, posita possibilitate resolutionis aequationis cubicae, et sic porro, ita neminem dubitare credo, quin generaliter ope hujus transformationis nunquam plures quam duo termini insimul evanescentes fieri possint.

§. IX.

Ut igitur in aequatione quadam exterminentur tres termini, videt quilibet oportere, ut aequatio mediatrix minimum sit 3:tiae dignitatis.

Sit igitur aequatio biquadratica proposita

$$z^4+pz+q=0=A$$

et sit aequatio subsidiaria

$$z^3+cz^2+bz+a+q=0=B$$

post explosam litteram z erit

$$\left.\begin{array}{r} y^4+4a \\ -3p \end{array}\right| y^3 \left.\begin{array}{l} +6a^2-9pa \\ +3pbc+4qb \\ +2qc^2+3p^2 \end{array}\right| y^2 \begin{array}{l} +4a^3-9pa^2+6p^2a \\ +4qc^2a+6pbca \\ +8qba-pb^3 \\ -4qcb^2-3p^2cb \\ -5pqb+4q^2c \\ +p^2c^3+pqc^2-p^3 \end{array} \Bigg| y$$

$$\left.\begin{array}{l} +a^4-3pa^3+3p^2a^2 \\ +2qc^2a^2+4qba^2+3pbca^2 \\ +pqc^2a-3p^2bca-p^3a \\ +p^2c^3a-4qb^2ca+4q^2ca \\ -5pqba-pb^3a \\ +qb^4+3pqcb^2+2q^2b^2 \\ -pqbc^3-4q^2c^2b+p^2qb \\ +q^2c^4-pq^2c+q^3 \end{array}\right| =0=C.$$

Ad exterminandum omnes tres terminos intermedios hujus aequationis C, post calculos rite subductos nemo non videt requiri ut sit

1:mo, $a=3\frac{p}{4}$,

2:do, $24pbc+16qc^2+32qb-3p^2=0=E$,

3:tio, $-2pb^3-8qb^2c+2p^2c^3-3p^2bc+4pqc^2-6pqb$
$+8q^2c+p^3=0=F.$

Quod si aequationibus E et F exterminetur b exoritur haec aequatio

$$\left.\begin{array}{r} +\overline{24}p^5 \\ -5.\overline{16}^{3}pq^3 \end{array}\right| c^6 \left.\begin{array}{l} +7.\overline{24}^{3}p^4q \\ -8.\overline{16}^{3}q^4 \end{array}\right| c^5 \begin{array}{l} +540.\overline{24}^{2}p^3q^2c^4 \\ \left.\begin{array}{l} +180.24p^6 \\ +500.\overline{32}^{2}p^2q^3 \end{array}\right| c^3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} +945.16p^5q \\ +400.\overline{32}^{2}pq^4 \end{array}\right| c^2 \left.\begin{array}{l} +15.32.36q^2p^4 \\ +4.\overline{32}^{3}q^5 \end{array}\right| c$$

$$\left.\begin{array}{l} +7.\overline{32}^{2}p^3q^3 \\ -27p^7 \end{array}\right| =0=G.$$

Quae aequatio G est sextae dignitatis. Est quidem verum, potuisse litteram b retineri exterminando ex aequationibus E et F litteram

c: Verumenimvero nec in hoc casu exoritur quaedam aequatio minoris cujusdam dignitatis. Credi forsitan potest heic non adesse nisi speciem quandam sextae dignitatis, revera autem sub hac forma latere aequationem quandam minoris dignitatis, inprimis cum vix intelligatur quomodo expressio radicis aequationis biquadraticae contineri possit expressionem radicis aequationis sextae dignitatis. Quicquid autem sit, ad expellendos omnes in aequatione biquadratica terminos intermedios videtur opus esse resolutionem aequationis sextae dignitatis. Est haec difficultas eadem, quam antea in § 8 commemoravimus, cui autem tollendae eadem non sufficit medicina, ac quae in loco citato adhibita fuerit. Hanc autem difficultatem in exterminandis cujusdam aequationis tribus terminis haud semper esse invincibilem infra videbimus.

§. X.

Sit aequatio proposita

$$z^5+pz^2+qz+r=0=A,$$

in qua exulat et 2:dus et 3:tius terminus.

Sit aequatio subsidiaria

$$z^4+dz^3+cz^2+bz+a+y=0=B.$$

Exterminetur littera z erit

$$y^5 \left.\begin{array}{l} -3pd \\ -4q+5a \end{array}\right| y^4 \left.\begin{array}{l} +3pbc+4qbd+5rb \\ +2qc^2+5rcd-3p^2c \\ +6q^2-4pr+5pqd+3p^2d^2 \\ -12pda-16qa+10a^2 \end{array}\right| y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} -pb^3-4qb^2c-5rb^2d+3p^2b^2+9pbca+12qbda \\ -5rbc^2-3p^2bcd+2pqbc-5pqbd^2+15rba \\ +\overline{pr-8q^2}.bd-\overline{11rq-3p^3}.b+6qc^2a+15rcda \\ +p^2c^3+pqc^2d+\overline{8rp-4q^2}.c^2-9p^2ca+18q^2a \\ +\overline{4q^2-7pr}.cd^2-\overline{2qr+3p^3}.cd-12pra+15pqda \\ +\overline{2p^2q+5r^2}.c-\overline{p^3+3rq}.d^3+9p^2d^2a \\ -\overline{qp^2+5r^2}.d^2-\overline{pq^2+rp^2}.d-18pda^2 \\ +p^4-4q^3+8rpq+10a^3-24qa^2 \end{array}\right| y^2+\&c:=0=C.$$

In qua aequatione C praetermittantur 5:tus et 6:tus terminus, cum

de illis nondum quaeratur: Sed in exterminando terminum 2:dum, tertium et quartum videt quilibet oportere

$$\text{1:mo} \quad a - \frac{3pd+4q}{5} = 0 = D,$$

$$\text{2:do} \quad \left.\begin{array}{r} 15pbc + 20qbd + 25rb + 10qc^2 + 25rcd - 15p^2c \\ -3p^2d^2 - 23pqd - 2q^2 - 20rp \end{array}\right| = 0 = E$$

nec non tertio oportere coëfficientem quarti termini etiam esse aequalem nihilo, quae aequatio apelletur F.

Quod si in hac aequatione F in locum τῦ a ponatur ejus valor $\frac{3pd+4q}{5}$, nemo non videt, litteras b, c et d per hanc substitutionem haud evehi ad majorem dignitatis gradum ac antea. Ubi autem ex aequationibus E et F exterminetur sive b, sive c sive d non potest non exoriri aequatio quaedam sextae dignitatis, quae forsitan nec hanc formam mentitur, nec ad minorem gradum ullo modo detrudi potest. Attamen hujus quantaecunque difficultatis removendae quaedam haud usque adeo tenuis spes ostenditur.

§. XI.

Si in aequatione E, quae revera non est aliud, quam tertius terminus aequationis C, in quo in locum τῦ a sustitutus est ejus valor $\frac{3pd+4q}{5}$, ponatur

$$b = \alpha d + \zeta \quad \text{nec non} \quad c = d + \gamma$$

mutabitur haec aequatio E in hanc aequationem

$$\left.\begin{array}{r} \overline{+15p+20q}.\alpha \\ -3p^2+10q \\ +25r \end{array}\right| d^2 \left.\begin{array}{r} \overline{+15p\alpha+20q+25r}.\gamma \\ \overline{+15p+20q}.\zeta \\ +25r\alpha-15p^2-23pq \end{array}\right| d$$

$$\left.\begin{array}{r} +10q\gamma^2 \\ \overline{+15p\zeta-15p^2}.\gamma \\ +25r\zeta-2q^2-2rp \end{array}\right| = 0 = G.$$

Quod si ponatur

$$\alpha = \frac{3p^2-10q-25r}{15p+20q}$$

et

$$\zeta = \frac{15p\alpha\gamma - 25r\alpha - 20q\gamma - 25r\gamma + 15p^2 + 23pq}{15p + 20q}$$

nec non

$$\left.\begin{array}{r} 10q\gamma^2 - 15p^2 \\ +15p\zeta \end{array}\right| \gamma \left.\begin{array}{l} +25r\zeta \\ -2q^2 \\ -2rp \end{array}\right| = 0.$$

Videt quilibet ad inveniendum valores $\tau\omega\nu$ ζ et γ non opus esse resolutione cujusdam alius aequationis quam quae est quadratica. Facillimo igitur negotio detectis valoribus $\tau\omega\nu$ α, ζ et γ nec non postea substitutis in sua loca in aequatione G, non potest non evanescere tota haec aequatio G, altero termino destruente alterum, quo sit, ut in aequatione C totus etiam evanescat terminus tertius.

His peractis substituamus in termino quarto ejusdem aequationis C in locum $\tau\varepsilon$ a ejus valorem $\frac{3pd+4q}{5}$ nec non in locum $\tau\varepsilon$ b ejus valorem $\alpha d + \zeta$ quin etiam in locum $\tau\varepsilon$ c ejus valorem $d+\gamma$; scilicet litteris α, ζ et γ ita determinatis, ut illas determinandas esse nuper antea observatum est, non potest non supradictus terminus quartus abire in aequationem quandam, in qua non nisi una littera d ut incognita locum habet. Hujus autem litterae d maxima dignitas ut tertium gradum haud exsuperare potest, ita resolvendo aequationem cubicam patebit, quinam valor huic litterae competere debeat, ut quartus terminus aequationis C evanescat. Cum igitur per determinationem $\tau\varepsilon$ a evanuerit 2:dus terminus nec non per determinationem $\tau\omega\nu$ b, c, x, ζ et γ evanuerit 3:tius terminus et per determinationem denique $\tau\varepsilon$ d evanescat terminus quartus, constat hoc modo tres priores terminos intermedios in qualibet aequatione quintae dignitatis posse exterminari. Q. E. F.

Geometrischer Satz.

Wenn a, b, c die Seiten eines Dreiecks und α, β, γ die nach den Mittelpunkten von a, b, c von den gegenüberstehenden Ecken des Dreiecks gezogenen Transversalen desselben bezeichnen; so ist, wie man leicht findet:

$$b^2 + c^2 = 2(\alpha^2 + \tfrac{1}{4}a^2),$$
$$c^2 + a^2 = 2(\beta^2 + \tfrac{1}{4}b^2),$$
$$a^2 + b^2 = 2(\gamma^2 + \tfrac{1}{4}c^2);$$

also:

$$\alpha^2 = \tfrac{1}{2}(b^2+c^2-\tfrac{1}{2}a^2),\quad \beta^2 = \tfrac{1}{2}(c^2+a^2-\tfrac{1}{2}b^2),\quad \gamma^2 = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-\tfrac{1}{2}c^2).$$

Bildet man nun aus α, β, γ als Seiten ein Dreieck und bezeichnet die nach den Mittelpunkten von α, β, γ von den gegenüberstehenden Ecken dieses Dreiecks gezogenen Transversalen desselben durch a', b', c'; so ist nach den vorstehenden Formeln:

$$a'^2 = \tfrac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2),\quad b'^2 = \tfrac{1}{2}(\gamma^2+\alpha^2-\tfrac{1}{2}\beta^2),\quad c'^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2-\tfrac{1}{2}\gamma^2);$$

also, wie man mittelst des Vorhergehenden leicht findet:

$$a' = \tfrac{3}{4}a,\quad b' = \tfrac{3}{4}b,\quad c' = \tfrac{3}{4}c;$$

folglich:

$$a':b':c' = a:b:c;$$

woraus sich ergiebt, dass das mit den Seiten a', b', c' gebildete Dreieck dem ersten gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Ist also Δ_0 ein Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind, und man bildet aus den von seinen Ecken nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen ein neues Dreieck Δ_1, aus denselben Transversalen dieses Dreiecks wieder ein neues Dreieck Δ_2, aus denselben Transversalen dieses Dreiecks wieder ein neues Dreieck Δ_3, u. s. w.; so sind sowohl die Dreiecke

$$\Delta_0,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \Delta_6, \ldots;$$

als auch die Dreiecke

$$\Delta_1,\ \Delta_3,\ \Delta_5,\ \Delta_7, \ldots$$

sämmtlich unter einander ähnlich.

Die Seiten der Dreiecke

$$\Delta_0,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \Delta_6, \ldots \Delta_{2n}$$

sind nach der Reihe:

$$a,\ b,\ c;$$
$$\tfrac{3}{4}.a,\ \tfrac{3}{4}.b,\ \tfrac{3}{4}.c;$$
$$(\tfrac{3}{4})^2.a,\ (\tfrac{3}{4})^2.b,\ (\tfrac{3}{4})^2.c;$$
u. s. w.
$$(\tfrac{3}{4})^n.a,\ (\tfrac{3}{4})^n.b,\ (\tfrac{3}{4})^n.c;$$

und bezeichnet man also ihre Perimeter durch

$$p_0,\ p_2,\ p_4,\ p_6, \ldots p_{2n};$$

so ist:

$$p_0 = a + b + c,$$
$$p_2 = \tfrac{3}{4}.(a + b + c),$$
$$p_4 = (\tfrac{3}{4})^2.(a + b + c),$$
u. s. w.
$$p_{2n} = (\tfrac{3}{4})^n.(a + b + c)$$
oder:

$$p_0 = p_0,\quad p_2 = \tfrac{3}{4}.p_0,\quad p_4 = (\tfrac{3}{4})^2.p_0, \ldots\ldots\quad p_{2n} = (\tfrac{3}{4})^n.p_0;$$
also:

$$p_0 + p_2 + p_4 + \ldots\ldots + p_{2n} = \{1 + (\tfrac{3}{4})^1 + (\tfrac{3}{4})^2 + \ldots\ldots + (\tfrac{3}{4})^n\}p_0$$
$$= \frac{1-(\tfrac{3}{4})^{n+1}}{1-\tfrac{3}{4}}p_0 = 4\{1-(\tfrac{3}{4})^{n+1}\}p_0,$$

und folglich, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt:

$$\operatorname{Lim}(p_0 + p_2 + p_4 + \ldots\ldots + p_{2n}) = 4p_0.$$

Mittelst der Formel:

$$\varDelta_0 = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

erhält man für die Flächenräume

$$\varDelta_0,\ \varDelta_2,\ \varDelta_4,\ \varDelta_6, \ldots\ldots \varDelta_{2n}$$

unserer Dreiecke leicht:

$$\varDelta_0 = \varDelta_0,\ \varDelta_2 = (\tfrac{3}{4})^2.\varDelta_0,\ \varDelta_4 = (\tfrac{3}{4})^4.\varDelta_0, \ldots\ldots\ \varDelta_{2n} = (\tfrac{3}{4})^{2n}.\varDelta_0;$$

also:

$$\varDelta_0 + \varDelta_2 + \varDelta_4 + \ldots\ldots + \varDelta_{2n} = \{1 + (\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^4 + \ldots\ldots + (\tfrac{3}{4})^{2n}\}\varDelta_0$$
$$= \frac{1-(\tfrac{3}{4})^{2n+2}}{1-(\tfrac{3}{4})^2}\varDelta_0 = \tfrac{16}{7}\{1-(\tfrac{3}{4})^{2n+2}\}\varDelta_0,$$

und folglich für ein in's Unendliche wachsendes n:

$$\operatorname{Lim}(\varDelta_0 + \varDelta_2 + \varDelta_4 + \ldots\ldots + \varDelta_{2n}) = \tfrac{16}{7}\varDelta_0.$$

Zur Vervollständigung des Vorstehenden muss noch bewiesen werden, dass das mit den Transversalen α, β, γ des gegebenen, die Seiten a, b, c habenden Dreiecks beschriebene Dreieck immer möglich ist, welches bekanntlich nur dann der Fall sein wird, wenn die Bedingungen

$$\beta + \gamma > \alpha,\quad \gamma + \alpha > \beta,\quad \alpha + \beta > \gamma$$

erfüllt sind.

Um nun zu beweisen, dass die Bedingung

$$\alpha + \beta > \gamma$$

erfüllt ist, erinnere man sich, dass nach dem Obigen:

$$\alpha^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2}a^2),$$
$$\beta^2 = \tfrac{1}{2}(c^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}b^2),$$
$$\gamma^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}c^2);$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = \tfrac{5}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

und folglich:

$$(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \tfrac{5}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) + \sqrt{(b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2}a^2)(c^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}b^2)}$$

ist. Die Bedingung

$$\alpha + \beta > \gamma$$

ist aber erfüllt, wenn die Bedingung

$$(\alpha + \beta)^2 > \gamma^2 \quad \text{oder} \quad (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 > 0,$$

also, nach dem Vorhergehenden, wenn die Bedingung

$$\tfrac{5}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) + \sqrt{(b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2}a^2)(c^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}b^2)} > 0,$$

oder wenn die Bedingung

$$\tfrac{5}{4}c^2 + \sqrt{(b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2}a^2)(c^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}b^2)} > \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

erfüllt ist. Weil aber nach einer bekannten Eigenschaft des Dreiecks immer

$$c^2 > (a - b)^2$$

ist, so ist die vorstehende Bedingung offenbar jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$\tfrac{5}{4}(a - b)^2 + \sqrt{\{b^2 + (a - b)^2 - \tfrac{1}{2}a^2\}\{(a - b)^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}b^2\}} \overline{\gt} \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

also, wie man leicht findet, wenn die Bedingung

$$\tfrac{5}{4}(a - b)^2 + 2\sqrt{(a - \tfrac{1}{2}b)^2(b - \tfrac{1}{2}a)^2} \overline{\gt} \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

oder die Bedingung

$$a^2 + b^2 - \tfrac{5}{2}ab + 2\sqrt{(a - \tfrac{1}{2}b)^2(b - \tfrac{1}{2}a)^2} \overline{\gt} 0$$

erfüllt ist.

Für $a = \tfrac{1}{2}b$ und für $b = \tfrac{1}{2}a$ ist offenbar:

$$a^2 + b^2 - \tfrac{5}{2}ab + 2\sqrt{(a - \tfrac{1}{2}b)^2(b - \tfrac{1}{2}a)^2} = 0,$$

also die obige Bedingung erfüllt.

Es kann nicht zugleich

$$a < \tfrac{1}{2}b, \quad b < \tfrac{1}{2}a$$

sein, weil hieraus

$$a+b<\tfrac{1}{2}(a+b)$$

folgen würde, was ungereimt ist.

Für

$$a>\tfrac{1}{2}b, \quad b>\tfrac{1}{2}a$$

ist das Product

$$(a-\tfrac{1}{2}b)(b-\tfrac{1}{2}a)$$

eine positive Grösse, also die obige Bedingung:

$$a^2+b^2-\tfrac{5}{2}ab+2(a-\tfrac{1}{2}b)(b-\tfrac{1}{2}a) \overset{=}{>} 0,$$

und daher erfüllt, weil, wie man mittelst leichter Rechnung findet, wirklich

$$a^2+b^2-\tfrac{5}{2}ab+2(a-\tfrac{1}{2}b)(b-\tfrac{1}{2}a)=0$$

ist.

Für

$$a \gtrless \tfrac{1}{2}b, \quad b \lessgtr \tfrac{1}{2}a$$

ist das Product

$$(a-\tfrac{1}{2}b)(b-\tfrac{1}{2}a)$$

eine negative Grösse, und also die obige Bedingung:

$$a^2+b^2-\tfrac{5}{2}ab-2(a-\tfrac{1}{2}b)(b-\tfrac{1}{2}a) \overset{=}{>} 0,$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$2a^2+2b^2-5ab \overset{=}{>} 0,$$

oder:

$$2(a-b)^2-ab \overset{=}{>} 0,$$

oder:

$$2(a-b)^2 \overset{=}{>} ab.$$

Ist nun

$$a>\tfrac{1}{2}b, \quad b<\tfrac{1}{2}a;$$

also $a>2b$, so setze man

$$a=2b+\Delta,$$

wo Δ eine positive nicht verschwindende Grösse ist; dann ist:

$$a-b=b+\Delta,$$

und folglich:

$$2(a-b)^2=2b^2+4b\Delta+2\Delta^2,$$
$$ab=2b^2+b\Delta;$$

also:

$$2(a-b)^2-ab=3b\Delta+2\Delta^2, \quad 2(a-b)^2-ab>0$$

oder:

$$2(a-b)^2>ab,$$

wie es sein soll. Ist ferner

$$a<\tfrac{1}{2}b, \quad b>\tfrac{1}{2}a,$$

also $b>2a$, so setze man:

$$b=2a+\Delta,$$

wo Δ wieder eine positive nicht verschwindende Grösse ist; dann ist:

$$a-b=-a-\Delta,$$

und folglich:

$$2(a-b)^2=2a^2+4a\Delta+2\Delta^2,$$

$$ab=2a^2+a\Delta;$$

also:

$$2(a-b)^2-ab=3a\Delta+2\Delta^2, \quad 2(a-b)^2-ab>0$$

oder:

$$2(a-b)^2>ab,$$

wie es sein soll.

Hierdurch ist also analytisch gezeigt, dass die Bedingung

$$\alpha+\beta>\gamma$$

jederzeit erfüllt ist, und ganz eben so überzeugt man sich natürlich von der Richtigkeit der Bedingungen

$$\beta+\gamma>\alpha, \quad \gamma+\alpha>\beta;$$

so dass also mit den Transversalen α, β, γ als Seiten immer ein Dreieck construirt werden kann, wie behauptet wurde.

Das Vorstehende ist dem wesentlichen ersten Theile nach aus einem Aufsatze des Herrn Gaetano Recchia in dem neuen trefflichen Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi. Anno I. Aprile 1863. p. 127., auf welches wir unsere Leser hier wiederholt dringend aufmerksam machen, entlehnt. Eine synthetische geometrische Darstellung von Herrn Luigi Raiola findet sich an demselben Orte p. 126.

Der Satz selbst ist übrigens aus den Nouvelles Annales de Mathématiques. Février 1863. entlehnt.

Grunert.

Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse sei wie gewöhnlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

und (fg) sei der Punkt, durch welchen alle Sehnen derselben gezogen sind, für deren Mittelpunkte der geometrische Ort bestimmt werden soll. Die Gleichung jeder dieser Sehnen hat die Form:

$$y-g=A(x-f),$$

und bezeichnen nun u, v die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Sehne mit der Ellipse; so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2=1,\quad v-g=A(u-f).$$

Also ist

$$v=g+A(u-f),$$

und zur Bestimmung von u hat man folglich die Gleichung:

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left\{\frac{g+A(u-f)}{b}\right\}^2=1$$

oder:

$$\left\{\frac{f+(u-f)}{a}\right\}^2+\left\{\frac{g+A(u-f)}{b}\right\}^2=1,$$

folglich:

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}\right)(u-f)^2+2\left(\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}\right)(u-f)=1-\frac{f^2}{a^2}-\frac{g^2}{b^2}$$

oder:

$$(u-f)^2+2\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}(u-f)=\frac{1-\frac{f^2}{a^2}-\frac{g^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man, wenn der Kürze wegen

$$M=\frac{\sqrt{\left(\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}\right)^2+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{f^2}{a^2}-\frac{g^2}{b^2}\right)}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}$$

gesetzt wird, sogleich:

$$u-f=-\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}\pm M,$$

und folglich ferner nach dem Obigen:

$$v-g=-A\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}\pm AM;$$

also:

$$u=f-\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}\pm M,\quad v=g-A\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}\pm AM.$$

Bezeichnet man nun den Mittelpunkt der Sehne durch (XY); so ist hiernach offenbar:

$$X=f-\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}},\quad Y=g-A\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}}.$$

oder:

$$f-X=\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}},\quad g-Y=A\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{Ag}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}};$$

folglich:

$$A=\frac{g-Y}{f-X},$$

und daher die gesuchte Gleichung des Orts nach Vorstehendem:

$$f-X=\frac{\frac{f}{a^2}+\frac{g}{b^2}\cdot\frac{g-Y}{f-X}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{g-Y}{f-X}\right)^2}.$$

oder:

$$f-X=\frac{\frac{f}{a^2}(f-X)+\frac{g}{b^2}(g-Y)}{\left(\frac{f-X}{a}\right)^2+\left(\frac{g-Y}{b}\right)^2}(f-X),$$

also offenbar:

$$\frac{f}{a^2}(f-X)+\frac{g}{b^2}(g-Y)=\left(\frac{f-X}{a}\right)^2+\left(\frac{g-Y}{b}\right)^2.$$

Diese Gleichung kann man unter der folgenden Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{f-X}{a}\right)^2-2\frac{f}{2a}\cdot\frac{f-X}{a}+\left(\frac{f}{2a}\right)^2\\+\left(\frac{g-Y}{b}\right)^2-2\frac{g}{2b}\cdot\frac{g-Y}{b}+\left(\frac{g}{2b}\right)^2\end{array}\right\}=\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2,$$

also unter der Form:

$$\left(\frac{f-X}{a}-\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g-Y}{b}-\frac{g}{2b}\right)^2=\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2,$$

oder unter der Form:

$$\left(\frac{f-2X}{2a}\right)^2+\left(\frac{g-2Y}{2b}\right)^2=\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2,$$

oder unter der Form:

$$\left(\frac{X-\frac{1}{2}f}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-\frac{1}{2}g}{b}\right)^2=\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2.$$

Legt man nun durch den durch die Coordinaten $\frac{1}{2}f$, $\frac{1}{2}g$ bestimmten Punkt ein neues, dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem der $X'Y'$, so ist: $X=\frac{1}{2}f+X'$, $Y=\frac{1}{2}g+Y'$; also $X-\frac{1}{2}f=X'$, $Y-\frac{1}{2}g=Y'$; folglich die Gleichung des Orts:

$$\left(\frac{X'}{a}\right)^2+\left(\frac{Y'}{b}\right)^2=\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2$$

oder:

$$\left\{\frac{X'}{a\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2+\left\{\frac{Y'}{b\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2=1.$$

Der Ort ist also eine durch das Vorhergehende vollständig bestimmte Ellipse.

Einen besonderen Fall dieses Satzes, wenn die Sehnen durch die Brennpunkte gelegt sind, hat Hr. Dr. G. F. W. Bähr in Groningen angegeben in der Abhandlung: Moyenne des rayons vecteurs d'une ellipse (Les Mondes etc. 30. Juillet 1863.) p. 4., und durch diese Bemerkung bin ich zu der obigen Mittheilung veranlasst worden.

Grunert.

Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln:

No. 7. Taf. III. S. 76. log. nat. 1,0009 statt 0,00089 95952 42886 0
lies 0,00089 95952 42836 1.

No. 8. Taf. II. S. 236. Differ. zwischen log. tang. 5° 29′ 10″ und 20″
statt 2112 lies 2212.

S. 26. in diesem Hefte Z. 6. ist „Scienze" statt „Science" zu setzen.

IX.

Neue analytische Behandlung des Kreises der neun Punkte.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Der Kreis, und allgemeiner der Kegelschnitt, der neun Punkte ist schon öfter nach verschiedenen Methoden behandelt worden: von Steiner, Terquem, Hamilton, Hart, Salmon, Casey, Prouhet u. A.; insbesondere ist dies aber neuerlichst geschehen in zwei schönen Aufsätzen der Herren N. Trudi und Eugenio Beltrami, die sich in dem Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, welches ich den Lesern des Archivs und namentlich allen Lehrern der Mathematik an höheren Unterrichtsanstalten auch bei dieser Gelegenheit nicht dringend genug zur sorgfältigsten Beachtung empfehlen kann, unter folgenden Titeln finden:

Intorno ad alcune proprietà del cerchio de' nove punti. Nota di N. Trudi. Gennaio 1863. p. 29.

Sulle coniche di nove punti. Nota di Eugenio Beltrami. Aprile 1863. p. 109.

Wenn ich in dieser Abhandlung zunächst insbesondere den Kreis der neun Punkte einer neuen analytischen Behandlung unterwerfe: so geschieht dies theils der näheren analytischen Bestimmung dieses Kreises und mancher vielleicht neuer oder noch nicht bestimmt genug hervorgehobener Eigenschaften desselben wegen, theils aber auch deshalb, um ein neues Beispiel zu geben für die zur Behandlung vieler Aufgaben mir sehr zweckmässig scheinende Methode, nach welcher ich in der Abhandlung Theil XXXVI. Nr. XVIII. die Entfernungen der merkwürdigen Punkte

des Dreiecks von einander untersucht, und in der darauf folgenden Abhandlung verschiedene Eigenschaften der dreiseitigen Pyramide entwickelt habe.

§. 2.

Wir denken uns ein Dreieck ABC, dessen Seiten und Winkel wir wie gewöhnlich durch a, b, c und A, B, C bezeichnen; der Halbmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises werde durch R bezeichnet. Ganz wie in der angeführten Abhandlung über die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks von einander, auf die wir uns hier überhaupt beziehen, nehmen wir den Punkt A als Anfang und die Seite AB als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, in welchem der positive Theil der Axe der y auf der Seite von AB genommen wird, auf welcher der Punkt C liegt. Unter diesen Voraussetzungen sind, wie in der angeführten Abhandlung gezeigt worden ist, die Coordinaten der drei Punkte A, B, C respective:

$$1)\quad 0,\ 0;\quad 2R\sin C,\ 0;\quad 2R\cos A\sin B,\ 2R\sin A\sin B;$$

und die Gleichungen der Seiten a, b, c sind beziehungsweise:

$$2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} y=-\tang B(x-2R\sin C),\\ y=\quad\tang A.x,\\ y=0.\end{array}\right.$$

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Seiten a, b, c sind nach der Reihe:

$$3)\ldots\left\{\begin{array}{rl} R(\cos A\sin B+\sin C), & R\sin A\sin B;\\ R\cos A\sin B, & R\sin A\sin B;\\ R\sin C, & 0.\end{array}\right.$$

Durch die Mittelpunkte der drei Seiten legen wir einen Kreis und bezeichnen den Mittelpunkt und Halbmesser dieses Kreises respective durch (uv) und ϱ, dessen Gleichung also durch:

$$4)\ldots\ldots\ldots\quad (x-u)^2+(y-v)^2=\varrho^2;$$

dann haben wir zur Bestimmung der Grössen u, v und ϱ nach 3) die drei folgenden Gleichungen:

$$\{u-R(\cos A\sin B+\sin C)\}^2+(v-R\sin A\sin B)^2=\varrho^2,$$

$$(u - R\cos A\sin B)^2 + (v - R\sin A\sin B)^2 = \varrho^2,$$
$$(u - R\sin C)^2 + v^2 = \varrho^2;$$

oder:

$$u^2 + v^2 - \varrho^2 = 2R\{u(\cos A\sin B + \sin C) + v\sin A\sin B\}$$
$$- R^2\{(\cos A\sin B + \sin C)^2 + \sin A^2\sin B^2\},$$
$$u^2 + v^2 - \varrho^2 = 2R(u\cos A\sin B + v\sin A\sin B) - R^2\sin B^2,$$
$$u^2 + v^2 - \varrho^2 = 2Ru\sin C - R^2\sin C^2;$$

woraus sich zur Bestimmung der Coordinaten u, v die beiden Gleichungen:

$$2u\sin C - R\sin C^2 = 2\{u(\cos A\sin B + \sin C) + v\sin A\sin B\}$$
$$- R(\sin B^2 + \sin C^2 + 2\cos A\sin B\sin C),$$
$$2u\sin C - R\sin C^2 = 2(u\cos A\sin B + v\sin A\sin B) - R\sin B^2$$

ergeben, die man ferner leicht auf die folgende Form bringt:

$$R(\sin B + 2\cos A\sin C) = 2(u\cos A + v\sin A),$$
$$R(\sin B^2 - \sin C^2) = 2\{u(\cos A\sin B - \sin C) + v\sin A\sin B\};$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$2u = u', \quad 2v = v'$$

setzt, auf die Form:

$$R(\sin B + 2\cos A\sin C) = u'\cos A + v'\sin A,$$
$$R(\sin B^2 - \sin C^2) = u'(\cos A\sin B - \sin C) + v'\sin A\sin B.$$

Bestimmt man aber aus diesen beiden Gleichungen die doppelten Coordinaten u', v' des Mittelpunkts unseres Kreises, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\sin C = \sin(A + B)$$

nach leichter Rechnung:

$$5) \ldots . \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = 2u = R(2\cos A\sin B + \sin C), \\ v' = 2v = R\cos(A - B). \end{array} \right.$$

Nach dem Obigen ist:

$$4\varrho^2 = (u' - 2R\sin C)^2 + v'^2,$$

also, wenn man die Werthe von u', v' aus 5) einführt und wieder

$$\sin C = \sin(A + B)$$

setzt:

$$4\varrho^2 = R^2\sin(A-B)^2 + R^2\cos(A-B)^2 = R^2,$$

folglich:

$$6) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \tfrac{1}{2}R,$$

so dass also der Halbmesser des durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks beschriebenen Kreises die Hälfte des Halbmessers des um dasselbe beschriebenen Kreises ist.

Die Gleichung des durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks gehenden Kreises ist:

7)

$$\{x-\tfrac{1}{2}R(2\cos A\sin B+\sin C)\}^2 + \{y-\tfrac{1}{2}R\cos(A-B)\}^2 = \tfrac{1}{4}R^2,$$

oder:

8)

$$\{2x-R(2\cos A\sin B+\sin C)\}^2 + \{2y-R\cos(A-B)\}^2 = R^2.$$

Wie man sogleich übersieht, kann man auch

$$9) \ldots \left\{\begin{array}{l} u' = 2u = R\{\sin(A-B) + 4\cos A\sin B\}, \\ v' = 2v = R\cos(A-B) \end{array}\right.$$

setzen, und die Gleichung des Kreises auf folgende Art ausdrücken:

10)

$$\{2x-R[\sin(A-B)+4\cos A\sin B]\}^2 + \{2y-R\cos(A-B)\}^2 = R^2.$$

§. 3.

Die Gleichungen der auf den Seiten a, b, c senkrecht stehenden Höhen des Dreiecks ABC sind nach den Ergebnissen der angeführten Abhandlung:

$$11) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{ll} y = & \cot B.x, \\ y = & -\cot A(x-2R\sin C), \\ x = & 2R\cos A\sin B. \end{array}\right.$$

Bestimmt man nun mittelst der Gleichungen 2) und 11) auf bekannte Weise die Durchschnittspunkte der Seiten und der entsprechenden Höhen; so findet man leicht für die Coordinaten der Fusspunkte der Höhen die folgenden Ausdrücke:

$$12) \ldots \begin{cases} 2R\sin B^2\sin C, & 2R\sin B\cos B\sin C; \\ 2R\cos A^2\sin C, & 2R\sin A\cos A\sin C; \\ 2R\cos A\sin B, & 0. \end{cases}$$

Führt man diese Ausdrücke nach und nach für x, y in die Gleichungen 8) oder 10) ein, so findet man durch eine keiner Schwierigkeit unterliegenden Rechnung mittelst einiger ganz einfachen Relationen, dass dieselben durch die vorstehenden Coordinaten der Fusspunkte der Höhen jederzeit befriedigt werden, woraus sich also ergiebt, dass der durch die Mittelpunkte der Seiten gehende Kreis immer auch durch die Fusspunkte der drei Höhen geht, folglich die Mittelpunkte der Höhen und die Fusspunkte der Höhen immer in demselben, durch die Gleichungen 8) oder 10) bestimmten Kreise liegen.

Wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist, so giebt es nur zwei Fusspunkte der Höhen, und durch die Fusspunkte der drei Höhen wird also ein Kreis nicht vollkommen bestimmt. Wenn in diesem Falle etwa $C=90^0$, also auch $A+B=90^0$, und folglich $A-B=2A-90^0$ ist, so ist:

$$\sin B=\cos A,\quad \sin C=1,\quad \cos(A-B)=\sin 2A;$$

also nach 5):

$$13) \ldots\ 2u=R(1+2\cos A^2),\quad 2v=R\sin 2A$$

oder:

$$14) \ldots\ u=R(1+\tfrac{1}{2}\cos 2A),\quad v=\tfrac{1}{2}R\sin 2A.$$

Weil nach der angeführten Abhandlung bekanntlich:

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\cos A,\quad c=2R$$

ist, so ist:

$$2u=R(1+\frac{b^2}{2R^2})=\frac{c}{2}(1+\frac{2b^2}{c^2})=\frac{2b^2+c^2}{2c}=\frac{a^2+3b^2}{2c},$$

$$2v=c.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}=\frac{ab}{c};$$

also:

$$15)\quad u=\frac{a^2+3b^2}{4c}=\frac{a^2+3b^2}{4\sqrt{a^2+b^2}},\quad v=\frac{ab}{2c}=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}},\quad \varrho=\tfrac{1}{4}c.$$

§. 4.

Nach den Ergebnissen der angeführten Abhandlung sind die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Höhen:

$$16) \ldots\ldots \quad 2R\cos A\sin B, \quad 2R\cos A\cos B;$$

und die Coordinaten der Mittelpunkte der Geraden, welche diesen Punkt mit den Punkten A, B, C verbinden, sind nach 1) und 16) beziehungsweise:

$$16^*) \ldots \left\{\begin{array}{rl} R\cos A\sin B, & R\cos A\cos B; \\ R(\cos A\sin B+\sin C), & R\cos A\cos B; \\ 2R\cos A\sin B, & R\cos(A-B). \end{array}\right.$$

Führt man diese Ausdrücke für x, y in die Gleichungen 8) oder 10) ein, so findet man, dass dieselben erfüllt werden, woraus sich ergiebt, dass der durch die Mittelpunkte der Seiten und die Fusspunkte der drei Höhen gehende Kreis immer auch durch die Mittelpunkte der Geraden geht, welche den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Höhen mit den Spitzen des Dreiecks verbinden, weshalb man diesen durch die Mittelpunkte der drei Seiten, die Fusspunkte der drei Höhen und die Mittelpunkte der den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Höhen mit den Spitzen des Dreiecks verbindenden drei Geraden gehenden Kreis den Kreis der neun Punkte genannt hat.

§. 5.

Die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Höhen sind nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$2R\cos A\sin B, \quad 2R\cos A\cos B;$$

und die Coordinaten des Mittelpunkts des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises sind nach der angeführten Abhandlung:

$$R\sin C, \quad R\cos C.$$

Also sind

$$\tfrac{1}{2}R(\sin C+2\cos A\sin B), \quad \tfrac{1}{2}R(\cos C+2\cos A\cos B)$$

die Coordinaten des Mittelpunkts der den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Höhen mit dem Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises verbindenden Geraden. Nun ist aber:

$$\cos C + 2\cos A\cos B = -\cos(A+B) + 2\cos A\cos B$$
$$= \cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A-B),$$

und die obigen Coordinaten sind daher:

$$\tfrac{1}{4}R(2\cos A\sin B + \sin C),\quad \tfrac{1}{4}R\cos(A-B);$$

folglich u, v nach 5), woraus sich in Verbindung mit dem in den vorhergehenden Paragraphen Bewiesenen der folgende Satz ergiebt:

Der Mittelpunkt des Kreises der neun Punkte ist der Mittelpunkt der den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Höhen mit dem Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises verbindenden Geraden, und sein Halbmesser ist die Hälfte des Halbmessers des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

§. 6.

In der angeführten Abhandlung (§. 6.) sind die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Höhen von den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise der Kürze wegen nicht besonders entwickelt worden; da jedoch diese Entwickelung zu den schwierigeren gehört, so wollen wir dieselbe jetzt nachholen, indem wir die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Höhen von den Mittelpunkten der über den Seiten a, b, c liegenden äusseren Berührungskreise respective durch D_a', D_b', D_c' bezeichnen.

Nach §. 3. 1), 12), 13), 14) der angeführten Abhandlung ist offenbar, wenn man für A, B, C als Anfangspunkte nach und nach die Seiten AB, BC, CA als Abscissenaxen annimmt:

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2} = (\cos A\sin B - 2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2$$
$$+ (\cos A\cos B - 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2,$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2} = (\cos B\sin C - 2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2$$
$$+ (\cos B\cos C + 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2,$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2} = (\cos C\sin A + 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2$$
$$+ (\cos C\cos A - 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2;$$

also, wenn man quadrirt und die Gleichungen dann zu einander addirt:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2} = \cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2$$
$$+4(\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2 + \cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}A^2 + \sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2)$$
$$-4\cos A\sin B.\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$-4\cos B\sin C.\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$+4\cos C\sin A.\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C$$
$$-4\cos A\cos B.\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$+4\cos B\cos C.\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$-4\cos C\cos A.\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$

folglich nach ganz bekannten Relationen und nach Rel. I., II., IV. der angeführten Abhandlung:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2} = \cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2$$
$$+(1+\cos B)(1+\cos C)$$
$$+(1+\cos C)(1-\cos A)$$
$$+(1-\cos A)(1+\cos B)$$
$$-\cos A\sin B(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$-\cos B\sin C(\sin A+\sin B-\sin C)$$
$$+\cos C\sin A(\sin A-\sin B+\sin C)$$
$$-\cos A\cos B(1-\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$+\cos B\cos C(1-\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$-\cos C\cos A(1-\cos A+\cos B+\cos C),$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung mittelst ganz einfacher Relationen sogleich erhält:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2} = 3+\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2$$
$$+3(-\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$-(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C)$$
$$-3(\cos A\cos B-\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$
$$-3\cos A\cos B\cos C,$$

also nach Rel. V., VI., VII. offenbar:

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2}=1-2\cos A\cos B\cos C$$
$$+(-\cos A+\cos B\cos C)$$
$$-(\cos A\cos B-\cos B\cos C+\cos C\cos A).$$

Es ist aber:

$$2(\cos A\cos B-\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$
$$=-(-\cos A+\cos B+\cos C)^2+(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2),$$

also nach Rel. IV., V.:

$$\cos A\cos B-\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-8\sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\cos A\cos B\cos C,$$

und folglich, wenn man wieder zugleich Rel. IV. anwendet:

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{D_a'^2}{R^2}=8\sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2-\cos A\cos B\cos C,$$

oder:

$$17)\quad D_a'^2=4(8\sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2-\cos A\cos B\cos C)R^2.$$

Nach §. 3. 11) der angeführten Abhandlung ist also:

$$18)\ \ldots\ D_a'^2=2(r_a^2-2R^2\cos A\cos B\cos C),$$

und daher überhaupt:

$$19)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} D'^2=2(r^2-2R^2\cos A\cos B\cos C),\\ D_a'^2=2(r_a^2-2R^2\cos A\cos B\cos C),\\ D_b'^2=2(r_b^2-2R^2\cos A\cos B\cos C),\\ D_c'^2=2(r_c^2-2R^2\cos A\cos B\cos C); \end{array}\right.$$

wobei die angeführte Abhandlung §. 6. 2) zu vergleichen ist.

§. 7.

In der angeführten Abhandlung ist die Entfernung des Durchschnittspunkts der drei Höhen von dem Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises durch D bezeichnet, und für diese Entfernung der Ausdruck:

$$D^2=(1-8\cos A\cos B\cos C)R^2$$

gefunden worden. Ferner sind dort die Entfernungen des Durchschnittspunkts der drei Höhen und des Mittelpunkts des um das Dreieck beschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des in das Dreieck beschriebenen Kreises respective durch D' und D bezeichnet, und für diese Entfernungen die Ausdrücke:

$$D'^2 = 2(r^2 - 2R^2 \cos A \cos B \cos C),$$
$$\mathrm{D}^2 = R(R-2r)$$

gefunden worden. Bezeichnen wir nun die Entfernung des Mittelpunkts des Kreises der neun Punkte von dem Mittelpunkte des in das Dreieck beschriebenen Kreises durch G; so ist nach bekannten Elementarsätzen, weil, wie oben bewiesen worden ist, der Mittelpunkt des Kreises der neun Punkte mit dem Mittelpunkte der den Durchschnittspunkt der drei Höhen mit dem Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises verbindenden Geraden zusammenfällt, offenbar:

$$2G^2 = D'^2 + \mathrm{D}^2 - \tfrac{1}{2}D^2,$$

also nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}2G^2 &= 2(r^2 - 2R^2 \cos A \cos B \cos C) + R(R-2r)\\ &\quad - (\tfrac{1}{2} - 4\cos A \cos B \cos C)R^2\\ &= 2r^2 - 2Rr + \tfrac{1}{2}R^2,\end{aligned}$$

folglich:

$$G^2 = r^2 - Rr + \tfrac{1}{4}R^2,$$

oder:

$$20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad G^2 = (r - \tfrac{1}{2}R)^2.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen und der angeführten Abhandlung haben wir ferner die Formeln:

$$D_a'^2 = 2(r_a^2 - 2R^2 \cos A \cos B \cos C),$$
$$\mathrm{D}_a^2 = R(R + 2r_a);$$

und bezeichnen wir nun die Entfernung des Mittelpunkts des Kreises der neun Punkte von dem Mittelpunkte des über der Seite a beschriebenen äusseren Berührungskreises durch G_a; so ist ganz auf ähnliche Art wie vorher:

$$2G_a^2 = D_a'^2 + \mathrm{D}_a^2 - \tfrac{1}{2}D^2,$$

also nach dem Obigen:

$$2G_a^2 = 2(r_a^2 - 2R^2 \cos A \cos B \cos C) + R(R + 2r_a)$$
$$- (\tfrac{1}{2} - 4\cos A \cos B \cos C) R^2$$
$$= 2r_a^2 + 2Rr_a + \tfrac{1}{2}R^2,$$

folglich:

$$G_a^2 = r_a^2 + Rr_a + \tfrac{1}{4}R^2,$$

oder:

$$21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad G_a^2 = (r_a + \tfrac{1}{2}R)^2.$$

Es ist also überhaupt;

$$22) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} G^2 = (r - \tfrac{1}{2}R)^2, \\ G_a^2 = (r_a + \tfrac{1}{2}R)^2, \\ G_b^2 = (r_b + \tfrac{1}{2}R)^2, \\ G_c^2 = (r_c + \tfrac{1}{2}R)^2; \end{cases}$$

oder:

$$23) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} G = \text{val. abs.}(r - \tfrac{1}{2}R), \\ G_a = r_a + \tfrac{1}{2}R, \\ G_b = r_b + \tfrac{1}{2}R, \\ G_c = r_c + \tfrac{1}{2}R; \end{cases}$$

und weil nun nach dem Obigen bekanntlich der Halbmesser des Kreises der neun Punkte die Hälfte des Halbmessers des um das Dreieck beschriebenen Kreises ist, so ergiebt sich aus den vorstehenden Gleichungen offenbar der folgende Satz:

Zwischen dem Kreise der neun Punkte und dem in das Dreieck beschriebenen Kreise findet eine innere Berührung Statt; dagegen werden von dem Kreise der neun Punkte die drei äusseren Berührungskreise des Dreiecks von Aussen berührt.

§. 8.

In der angeführten Abhandlung sind die Entfernungen des Durchschnittspunkts der Höhen und des Mittelpunkts des um das Dreieck beschriebenen Kreises von dem Schwerpunkte des Dreiecks respective durch D'' und $\mathfrak{D}$ bezeichnet, und es sind für diese Entfernungen die folgenden Ausdrücke gefunden worden:

$$D''^2 = \tfrac{4}{9}(1 - 8\cos A \cos B \cos C) R^2,$$
$$\mathfrak{D}^2 = \tfrac{1}{9}(1 - 8\cos A \cos B \cos C) R^2.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Mittelpunkts des Kreises der neun Punkte von dem Schwerpunkte durch H, so ist:

$$2H^2 = D''^2 + \mathfrak{D}^2 - \tfrac{1}{2}D^2,$$

woraus sich mittelst des Obigen sogleich:

$$24) \quad \ldots \quad H^2 = \tfrac{1}{36}(1 - 8\cos A \cos B \cos C)R^2,$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad H = \tfrac{1}{6}D = \tfrac{1}{4}D'' = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}$$

ergiebt.

Es würden sich noch manche andere Untersuchungen über den Kreis der neun Punkte anstellen lassen, was aber nach der durch das Obige vollständig erläuterten Methode keiner Schwierigkeit unterliegt, und daher hier einer weiteren Ausführung nicht bedarf.

X.

Ueber den Kreis, in Bezug auf welchen die Spitzen eines gegebenen Dreiecks die Pole der diesen Spitzen gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks als Polaren sind.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Es sei gegeben eine durch die Gleichung

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Ax + By + C = 0$$

charakterisirte Gerade und ein Punkt (ab), aus welchem als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r ein Kreis beschrieben ist, der also unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten durch die Gleichung

2) . . . . $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

charakterisirt wird. Die Gleichung der durch den Mittelpunkt (ab) gehenden, auf der Geraden 1) senkrecht stehenden Geraden ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

3) $B(x-a)-A(y-b)=0$ oder $B(x-a)=A(y-b)$.

Die Gleichung der durch den Mittelpunkt (ab) gehenden, der Geraden 1) parallelen Geraden ist:

4) $A(x-a)+B(y-b)=0$ oder $A(x-a)=-B(y-b)$,

oder auch:

4*) . . . . . $Ax+By+C-(Aa+Bb+C)=0.$

Der Durchschnittspunkt der Geraden 1) und 3) sei (uv), so ist:

$$Au+Bv+C=0, \quad B(u-a)=A(v-b)$$

oder:

$$A(u-a)+B(v-b)=-(Aa+Bb+C), \quad B(u-a)=A(v-b);$$

woraus leicht:

$$5) \begin{cases} u-a=-\dfrac{A(Aa+Bb+C)}{A^2+B^2}, \quad v-b=-\dfrac{B(Aa+Bb+C)}{A^2+B^2}; \\ u=a-\dfrac{A(Aa+Bb+C)}{A^2+B^2}, \quad v=b-\dfrac{B(Aa+Bb+C)}{A^2+B^2} \end{cases}$$

erhalten wird. Bezeichnen wir die Länge des von (ab) auf die Gerade 1) gefällten Perpendikels durch ϖ, so ist bekanntlich:

6) . . . . $\varpi^2=\dfrac{(Aa+Bb+C)^2}{A^2+B^2}.$

Auf der Geraden 3) wollen wir nun einen Punkt (pq) so zu bestimmen suchen, dass, wenn wir die Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte (ab) durch ϖ_1 bezeichnen,

$$\varpi\varpi_1=r^2 \quad \text{oder} \quad \varpi^2\varpi_1{}^2=r^4,$$

also

$$\varpi^2\{(p-a)^2+(q-b)^2\}=r^4$$

ist, so dass wir folglich nach 3) und 6) zur Bestimmung dieses Punktes die Gleichungen:

$$B(p-a)=A(q-b), \quad (p-a)^2+(q-b)^2=\frac{(A^2+B^2)r^4}{(Aa+Bb+C)^2}$$

haben, aus denen sich auf der Stelle:

$$7)\quad \begin{cases} p-a=\mp\dfrac{Ar^2}{Aa+Bb+C}, & q-b=\mp\dfrac{Br^2}{Aa+Bb+C}; \\ p=a\mp\dfrac{Ar^2}{Aa+Bb+C}, & q=b\mp\dfrac{Br^2}{Aa+Bb+C} \end{cases}$$

ergiebt. Es giebt also zwei Punkte von der verlangten Beschaffenheit, die wir durch (p_1q_1) und (p_2q_2) bezeichnen, und demzufolge:

$$8)\quad \begin{cases} p_1=a-\dfrac{Ar^2}{Aa+Bb+C}, & q_1=b-\dfrac{Br^2}{Aa+Bb+C}, \\ p_2=a+\dfrac{Ar^2}{Aa+Bb+C}, & q_2=b+\dfrac{Br^2}{Aa+Bb+C} \end{cases}$$

setzen wollen.

Nach 5) und 8) ist:

$$Au+Bv+C-(Aa+Bb+C)=-(Aa+Bb+C),$$

$$Ap_1+Bq_1+C-(Aa+Bb+C)=-\frac{(A^2+B^2)r^2}{Aa+Bb+C},$$

$$Ap_2+Bq_2+C-(Aa+Bb+C)=+\frac{(A^2+B^2)r^2}{Aa+Bb+C};$$

also:

$$\{Au+Bv+C-(Aa+Bb+C)\}\{Ap_1+Bq_1+C-(Aa+Bb+C)\}$$
$$=(A^2+B^2)r^2,$$

$$\{Au+Bv+C-(Aa+Bb+C)\}\{Ap_2+Bq_2+C-(Aa+Bb+C)\}$$
$$=-(A^2+B^2)r^2;$$

folglich liegen nach einem bekannten Satze die Punkte (uv) und (p_1q_1) immer auf einer Seite, dagegen die Punkte (uv) und (p_2q_2) immer auf entgegengesetzten Seiten der Geraden 4*) oder des Mittelpunkts (ab).

Ferner ist nach 8):

$$Ap_1+Bq_1+C=Aa+Bb+C-\frac{(A^2+B^2)r^2}{Aa+Bb+C},$$

$$Ap_2+Bq_2+C=Aa+Bb+C+\frac{(A^2+B^2)r^2}{Aa+Bb+C};$$

also:

$$(Aa+Bb+C)(Ap_1+Bq_1+C)=(Aa+Bb+C)^2-(A^2+B^2)r^2,$$

$$(Aa+Bb+C)(Ap_2+Bq_2+C)=(Aa+Bb+C)^2+(A^2+B^2)r^2;$$

folglich liegen die Punkte (ab) und (p_2q_2) immer auf einer Seite der Geraden 1) oder des Punktes (uv), wie es sich nach dem Vorhergehenden auch von selbst versteht; dagegen liegen die Punkte (ab) und (p_1q_1) auf einer Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Geraden 1) oder des Punktes (uv), jenachdem

$$(Aa+Bb+C)^2-(A^2+B^2)r^2>0$$

oder

$$(Aa+Bb+C)^2-(A^2+B^2)r^2<0,$$

jenachdem also

$$\frac{(Aa+Bb+C)^2}{A^2+B^2}>r^2 \text{ oder } \frac{(Aa+Bb+C)^2}{A^2+B^2}<r^2,$$

jenachdem folglich

$$\varpi>r \quad \text{oder} \quad \varpi<r$$

ist.

Die Punkte (p_1q_1) und (p_2q_2), deren Lage durch das Vorhergehende vollständig bestimmt ist, nennen wir in Bezug auf den durch die Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

charakterisirten Kreis die Pole der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Gerade als Polare, und haben natürlich nicht die Absicht, die schon oft angestellte Untersuchung über die Eigenschaften dieser Punkte hier zu wiederholen, indem das Obige uns nur den Weg zu den im Folgenden anzustellenden Betrachtungen bahnen und ebenen sollte.

§. 2.

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, dessen Seiten und Winkel wie gewöhnlich durch a, b, c und A, B, C bezeichnet werden; man soll den Kreis bestimmen, in Bezug auf welchen die Spitzen A, B, C des Dreiecks die Pole der gegenüberstehenden Seiten a, b, c desselben sind.

Man nehme A als Anfang und AB als positiven Theil der

Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, in welchem die positiven y mit dem Punkte C auf derselben Seite von AB liegen; dann sind nach der Abhandlung Theil XXXVI. Nr. XVIII. die Coordinaten von A, B, C respective:

$$0,\ 0;\quad 2R\sin C,\ 0;\quad 2R\cos A\sin B,\ 2R\sin A\sin B;$$

und die Gleichungen der Seiten a, b, c sind:

$$\begin{aligned} y &= -\operatorname{tang} B(x-2R\sin C),\\ y &= \operatorname{tang} A.x,\\ y &= 0; \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang} B.x+y-2R\operatorname{tang} B\sin C=0,\\ &\operatorname{tang} A.x-y=0,\\ &y=0. \end{aligned}$$

Ist nun

$$9)\ \ldots\ldots\ldots\ (x-f)^2+(y-g)^2=r^2$$

die Gleichung des zu bestimmenden Kreises, so werden in Folge der Formeln 7) die Bedingungen der Aufgabe durch die folgenden Gleichungen analytisch ausgedrückt:

$$0=f\mp\frac{r^2\operatorname{tang} B}{f\operatorname{tang} B+g-2R\operatorname{tang} B\sin C},$$

$$0=g\mp\frac{r^2}{f\operatorname{tang} B+g-2R\operatorname{tang} B\sin C};$$

$$2R\sin C=f\mp\frac{r^2\operatorname{tang} A}{f\operatorname{tang} A-g},$$

$$0=g\pm\frac{r^2}{f\operatorname{tang} A-g};$$

$$2R\cos A\sin B=f,$$

$$2R\sin A\sin B=g\mp\frac{r^2}{g};$$

und es frägt sich nun, ob f, g, r so bestimmt werden können, dass diesen Gleichungen sämmtlich genügt wird.

Aus der fünften und sechsten Gleichung ergiebt sich auf der Stelle:

$$10) \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} f = 2R\cos A\sin B, \\ \mathfrak{r}^2 = \pm g(g - 2R\sin A\sin B); \end{array} \right.$$

also ist nach der dritten Gleichung:

$$2R\sin C = 2R\cos A\sin B - \frac{g(g-2R\sin A\sin B)\tan A}{2R\cos A\sin B\tan A - g}$$

$$= 2R\cos A\sin B - \frac{g(g-2R\sin A\sin B)\tan A}{2R\sin A\sin B - g}$$

$$= 2R\cos A\sin B + g\tan A,$$

folglich:

$$g\tan A = 2R(\sin C - \cos A\sin B) = 2R\sin A\cos B,$$

und daher:

$$11) \dots\dots \quad g = 2R\cos A\cos B.$$

Also ist nach der zweiten der Gleichungen 10):

$$\mathfrak{r}^2 = \pm 4R^2\cos A\cos B(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$$

$$= \pm 4R^2\cos A\cos B\cos(A+B) = \mp 4R^2\cos A\cos B\cos C,$$

folglich:

$$12) \dots\dots \quad \mathfrak{r} = 2R\sqrt{\mp\cos A\cos B\cos C}.$$

Daher hat man jetzt für f, g, $\mathfrak{r}$ die folgenden Ausdrücke:

$$13) \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} f = 2R\cos A\sin B, \\ g = 2R\cos A\cos B, \\ \mathfrak{r} = 2R\sqrt{\mp\cos A\cos B\cos C}. \end{array} \right.$$

Wir müssen nun untersuchen, ob durch diese Werthe auch die erste, zweite und vierte Gleichung erfüllt werden.

Die vierte Gleichung wird nach 10):

$$0 = g + \frac{g(g - 2R\sin A\sin B)}{2R\sin A\sin B - g},$$

also offenbar

$$0 = g - g = 0,$$

und daher identisch, wie erforderlich.

Die erste Gleichung wird:

$$0=2R\cos A\sin B+\frac{4R^2\cos A\cos B\cos C\tang B}{2R\cos A\sin B\tang B+2R\cos A\cos B-2R\tang B\sin C}$$

$$=2R\cos A\sin B+\frac{2R\cos A\sin B\cos C}{\cos A\cos B-\sin A\cos B\tang B}$$

$$=2R\cos A\sin B+\frac{2R\cos A\sin B\cos C}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=2R\cos A\sin B-\frac{2R\cos A\sin B\cos C}{\cos C}$$

$$=2R(\cos A\sin B-\cos A\sin B)=0,$$

also identisch.

Die zweite Gleichung wird:

$$0=2R\cos A\cos B+\frac{4R^2\cos A\cos B\cos C}{2R\cos A\sin B\tang B+2R\cos A\cos B-2R\tang B\sin C}$$

$$=2R\cos A\cos B+\frac{2R\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B-\sin A\cos B\tang B}$$

$$=2R\cos A\cos B+\frac{2R\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=2R\cos A\cos B-\frac{2R\cos A\cos B\cos C}{\cos C}$$

$$=2R(\cos A\cos B-\cos A\cos B)=0,$$

also identisch.

Es wird folglich in der That allen zu erfüllenden sechs Gleichungen durch die Ausdrücke 13) genügt; zugleich ist klar, dass die oberen oder unteren Zeichen genommen werden müssen, jenachdem die Grösse

$$\cos A\cos B\cos C$$

negativ oder positiv, also das gegebene Dreieck stumpfwinklig oder spitzwinklig ist; und endlich erhellet aus Theil XXXVI. Nr. XVIII. §. 3. 1), dass der Mittelpunkt (fg) des zu bestimmenden Kreises immer der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen des gegebenen Dreiecks ist. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes überlassen wir dem Leser.

XI.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von

Herrn *von Dewall,*

Königl. Preuss. Oberst und zweitem Bevollmächtigten bei der Bundes-Militair-Commission in Frankfurt a. M.

Aufgabe.

Aus drei gegebenen, nicht in derselben Geraden liegenden Punkten als Mittelpunkten drei Kreise zu beschreiben, welche drei gemeinschaftliche Berührende haben*).

Auflösung.

Verbinde (Taf. III. Fig. 4. a.) die drei gegebenen Punkte A, B, C, fälle von A und B die Senkrechten AD auf BC und BE auf AC resp. auf deren Verlängerungen, ziehe DE, fälle von A, B und C auf DE resp. auf ihre Verlängerung die Senkrechten AF, BG und CH, und beschreibe aus A mit AF, aus B mit BG und aus C mit CH Kreise, so entsprechen dieselben den Forderungen der Aufgabe, d. h. sie haben drei gemeinschaftliche Tangenten.

Beweis.

Aus der Konstruktion folgt unmittelbar, dass FG eine den Kreisen K, K' und K'' gemeinschaftliche Tangente ist; zieht man nun noch von D aus an K' und von E aus an K die Tangenten DL und EM, so bleibt nur noch zu beweisen, dass DL auch Tangente für K und K'' und EM Tangente auch für K' und K''

---

*) Diese Aufgabe ist mit den Worten:

„E tribus punctis datis (in eadem linea non jacentibus) ut centris tres circulos describere, qui tres tangentes communes habeant" von Herrn Doctor C. F. Lindman in Strengnäs in Schweden im Archiv Th. XXXIX. S. 352. gestellt worden. G.

ist. Zu dem Ende verbinde man die Berührungspunkte L und M mit B und A und fälle von A und C auf DL die Senkrechten AR, CS, von B und C auf EM die Senkrechten BT, CU. Nun ist, weil DL und DG nach der Konstruktion Tangenten für K', $\angle LDB = \angle GDB$, mithin $\Delta SDC \cong \Delta DCH$ (aus $\angle CSD = \angle CHD = 90^0$, $\angle SDC = \angle CDH$ und $CD = CD$); daher ist $CS = CH$, d. h. der aus C mit CH beschriebene Kreis K'' geht durch S, folglich ist DL eine Tangente an K''. Verlängert man CD über D hinaus nach P, dann hat man, weil $\angle SDC = \angle CDH$, auch $\angle SDC = \angle VDP$, und weil nach der Konstruktion $\angle ADC = \angle ADP = 90^0$, so folgt $\angle ADC - \angle SDC = \angle ADP - \angle VDP$ d. h. $\angle ADR = \angle ADF$; ausserdem aber ist in den Dreiecken ADR und ADF noch $\angle ARD = \angle AFD = 90^0$ und $AD = AD$, daher sind diese Dreiecke kongruent und daraus folgt $AR = AF$; der Kreis K, aus A mit AF beschrieben, geht also durch R, daher ist DL auch eine Tangente an K, mithin eine gemeinschaftliche Tangente für K, K' und K''.

Ganz ebenso wird bewiesen, dass EM sowohl den Kreis K'' als den Kreis K' berührt, also ebenfalls eine gemeinschaftliche Tangente für die drei Kreise ist.

Anmerkung 1. Der Durchschnittspunkt O der beiden den Kreisen K und K' gemeinschaftlichen Tangenten muss bekanntlich in die Centrale AB fallen. Verbindet man C mit O, dann ist leicht zu zeigen, dass CO senkrecht auf AB steht; daher kann man sagen:

> Fällt man von den drei Spitzen A, B, C des ΔABC die Senkrechten AD, BE und CO auf die Gegenseiten und verbindet die Fusspunkte D, E und O dieser Senkrechten mit einander, dann sind DE, EO und DO resp. ihre Verlängerungen gemeinschaftliche Tangenten für drei Kreise, welche sich aus A, B, C mit den Radien AF, BG und CH beschreiben lassen.

Anmerkung 2. Setzt man $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, und $\angle ACB = \gamma$, $AF = x$, $BG = y$ und $CH = z$, dann kann man die drei Radien x, y, z durch folgende Gleichungen ausdrücken:

1) . . . . $x = \frac{bc}{2a} \sin 2\alpha$,

2) . . . . $y = \frac{ac}{2b} \sin 2\beta$,

3) . . . . $z = \frac{ab}{2c} \sin 2\gamma$;

woraus sich erkennen lässt, dass die drei Radien sämmtlich nach gleichen Gesetzen von dem $\triangle ABC$ abhängen. Auch folgt daraus:

I) wenn $\triangle ABC$ gleichseitig, also $a=b=c, \alpha=\beta=\gamma=60^0$ ist, dass dann die drei Radien, mithin auch die drei Kreise einander gleich sind. Man findet für diesen Fall:

$$x=y=z=\frac{a}{4}\sqrt{3};$$

II) wenn $\triangle ABC$ gleichschenklig, also $a=b$ und $\alpha=\beta$ ist, dass dann die beiden Radien x und y, also die beiden Kreise aus den Spitzen der gleichen Winkel beschrieben, einander gleich sind; d. h. es ist:

$$x=y=\frac{c}{2}\sin 2\alpha,$$

$$z=\frac{a^2}{2c}\sin 2\gamma;$$

III) wenn $\triangle ABC$ rechtwinklig, also $\alpha=90^0$ und $a^2=b^2+c^2$ ist, dass dann $2\alpha=180^0$, mithin $\sin 2\alpha=\sin 180^0=0$, folglich auch $x=0$ ist, d. h. dass dann kein Kreis aus A als Mittelpunkt von der geforderten Beschaffenheit sich beschreiben lässt, dass in diesem Fall vielmehr nur zwei Kreise aus B und C beschrieben werden können, welche drei gemeinschaftliche Tangenten haben. Die Radien dieser Kreise sind:

$$y=c\cos\beta,$$

$$z=b\cos\gamma;$$

wie auch Taf. III. Fig. 4.b. zeigt.

In derselben ist von A die Senkrechte AD auf BC gefällt; dadurch ergeben sich sogleich die Radien $BD=y$ und $CD=z$ für die Kreise aus B und C, welche die AD unmittelbar als gemeinschaftliche Tangente haben. Die beiden anderen Tangenten, von denen die eine durch A, die Spitze des rechten Winkels, gehen muss, lassen sich nun in der bekannten Art konstruiren.

Anmerkung 3. Es ergiebt sich aus Vorstehendem, dass die Auflösung der gegebenen Aufgabe möglich ist, wenn die drei Punkte A, B, C nicht in einer geraden Linie liegen und wenn das durch A, B und C bestimmte Dreieck nicht rechtwinkelig ist. Ist das $\triangle ABC$ aber rechtwinkelig, dann giebt es nur zwei Kreise, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Die gestellte Aufgabe hätte daher neben der ersteren Beschränkung auch noch die letztere enthalten müssen.

XII.

Note über die Auflösung sphärischer Dreiecke.

Von

Herrn ***Franz Unferdinger,***

Professor der Mathematik an der Oberrealschule
am Bauernmarkte in Wien.

In Salomon's Handbuch der Trigonometrie findet sich auf S. 346 die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, wenn die Summe $a+b=s$ zweier Seiten, die dritte Seite c und der Winkel C gegeben sind, und zwar mittelst der Formel:

$$\operatorname{Cos}(2x-s)=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(s+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(s-c)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C}+\operatorname{Cos}s,$$

woraus $x=a$ zu berechnen ist. Für meine Unterrichtszwecke habe ich darüber nachgedacht, ob sich nicht eine Auflösung mittelst logarithmischer Formeln finden lasse. In der That führen die Gauss'achen Formeln ganz einfach zum Ziele. Es ist

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C;$$

wodurch die beiden anderen Winkel A, B bekannt sind und nun auch $a-b$ mittelst Neper's Analogien bestimmbar ist.

Ganz analog ist die Auflösung des Dreieckes, wenn $A+B=\Sigma$. C und c gegeben sind.

Diese Gattung von Aufgaben führte mich auf eine andere, wenn an die Stelle des Winkels C im ersten Falle, oder der Seite c im zweiten, einer der beiden anderen Winkel, resp. eine der beiden anderen Seiten tritt.

Es sei also gegeben $a+b=\sigma$, c, B; um auch hier eine

geeignete Formel zu erlangen, multiplicire ich die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s.\sin(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s.\sin(s-b)}}$$

und erhalte zur Bestimmung von A:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{Sin}(s-c)}{\operatorname{Sin} s}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\sigma-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\sigma+c)}\operatorname{ctg}\frac{B}{2};$$

die übrigen Stücke zu bestimmen ist nun leicht.

Ist $a+b+c=2s$, A, B gegeben, so gibt auch die vorhergehende Formel:

$$\operatorname{Sin}(s-c)=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{Sin} s,$$

und hiermit wird c gefunden. Die noch fehlenden Stücke können nach den Neper'schen Analogien:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(A-B),$$

da nun auch $a+b=2s-c$ bekannt ist, gerechnet werden.

Ist gegeben $A+B=\Sigma$, C, c, so findet man a durch die Multiplication der Formeln für $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=-\frac{\operatorname{Cos} S}{\operatorname{Cos}(S-C)},$$

woraus

$$\operatorname{Cos}(S-C)=-\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{Cos} S.$$

Schliesslich erwähne ich noch die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, wenn der sphärische Excess ε und zwei Seiten a, b gegeben sind. Hat S die bekannte Bedeutung, so ist $\varepsilon=2S-180^0$, mithin $S=90^0+\frac{1}{2}\varepsilon$, bekannt, und man hat wie im vorhergehenden Falle:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=-\frac{\operatorname{Cos} S}{\operatorname{Cos}(S-C)},$$

woraus

$$\operatorname{Cos}(S-C)=-\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{Cos} S^{*})$$

---

*) Durch Auflösung dieser Formel findet man, da $\operatorname{Cos}(-\alpha)=\operatorname{Cos}\alpha$, zwei Werthe für C; ist nämlich $S-C=\alpha$, so ist auch $C'-S=\alpha$, woraus die Beziehung $C+C'=2S$ folgt. Es giebt daher auch immer zwei Dreiecke von gleichem Flächenraum und zwei gleichen Seiten.

folgt, wodurch C durch logarithmische Rechnung bekannt wird. $A-B$ und c findet man aus den beiden Neper'schen Formeln:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C,\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Die hier aufgelösten Probleme umschliessen eine ganze Gattung, deren Auflösungen den hier gegebenen ähnlich sind.

Einige Beachtung scheint mir dasjenige sphärische Dreieck zu verdienen, in welchem die Summe zweier Winkel dem dritten gleich ist. $A+B=C$.

Werden die beiden Gauss'schen Gleichungen:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C$$

multiplicirt, so folgt unter dieser Bedingung:

$$(1)\qquad \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b),$$

oder, wie man durch leichte Transformation findet:

$$(2)\qquad \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a+\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b,$$

$$(3)\qquad \operatorname{Cos}c=\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b-1;$$

wodurch die dem Winkel C gegenüberstehende Seite ausschliesslich durch die beiden anderen Seiten a und b bestimmt wird.

Aus der Formel (2) ist zu erkennen, dass das dem sphärischen Dreieck ABC entsprechende Sehnendreieck in C rechtwinkelig ist. Die Neper'schen Analogien geben mit Leichtigkeit:

$$(4)\qquad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)},$$

oder nach einiger Transformation:

$$(5)\qquad \operatorname{Cos}C=-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b.$$

Auch bestehen noch folgende einfache Beziehungen:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Cos}B,\\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\operatorname{Cos}A.\end{array}\right.$$

Aus den Formeln (2), (6) wird man eine Analogie mit dem

ebenen rechtwinkeligen Dreieck, in welchem ebenfalls $A+B=C$ ist, nicht verkennen, und dieselbe wird noch durch den Umstand verstärkt, dass der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf der Mitte von AB liegt.

Legendre hat in seiner Géométrie, Note X., von diesem Dreiecke gezeigt, dass es unter allen mit denselben Seiten a, b beschriebenen den grössten Inhalt hat, was bekanntlich auch bei dem geradlinigen rechtwinkeligen Dreieck unter derselben Bedingung der Fall ist.

XIII.

Summirung einer Reihe.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

Wir wollen uns im Nachfolgenden mit der Auflösung der Aufgabe beschäftigen, die Summenformel für die Reihe:

$$(1) \qquad s_n = \frac{1}{r} + \frac{2^n}{r^2} + \frac{3^n}{r^3} + \frac{4^n}{r^4} + \ldots + \frac{m^n}{r^m} = \overset{m}{\underset{1}{S}} \frac{x^n}{r^x}$$

aufzufinden, d. h. s_n als Funktion von m darzustellen.

Zu diesem Zwecke setzen wir $x=z+1 \ldots.$ (2), wodurch

$$x^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} + \ldots + nz + 1$$

wird und hiermit nach der Theorie der Summenrechnung s_n in der Form dargestellt werden kann:

$$s_n = \frac{1}{r} \left\{ \overset{m-1}{\underset{0}{S}} \frac{z^n}{r^z} + \binom{n}{1} \overset{m-1}{\underset{0}{S}} \frac{z^{n-1}}{r^z} + \binom{n}{2} \overset{m-1}{\underset{0}{S}} \frac{z^{n-2}}{r^z} + \ldots + n \overset{m-1}{\underset{0}{S}} \frac{z}{r^z} + \overset{m-1}{\underset{0}{S}} \frac{1}{r^z} \right\}.$$

Vermöge (2) mussten die Grenzen 1 und m in 0 und $m-1$ verwandelt werden, weil sich das Summenzeichen S auf z bezieht.

Wird nun hierzu gliedweise addirt:

$$\frac{(m+1)^n}{r^{m+1}}=\frac{1}{r}\left\{\frac{m^n}{r^m}+\binom{n}{1}\frac{m^{n-1}}{r^m}+\binom{n}{2}\frac{m^{n-2}}{r^m}+\ldots+\frac{1}{r^m}\right\},$$

so erhält man:

$$s_n+\frac{(m+1)^n}{r^{m+1}}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\left\{\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z^n}{r^z}+\binom{n}{1}\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z^{n-1}}{r^z}+\binom{n}{2}\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z^{n-2}}{r^z}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+n\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z}{r^z}+\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{r^z}\right\},$$

oder, wenn zur Abkürzung

(3)

$$s_n=\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z^n}{r^z},\quad s_{n-1}=\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z^{n-1}}{r^z},\quad s_{n-2}=\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z^{n-2}}{r^z},\ldots s_1=\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{z}{r^z},\quad s_0=\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{r^z}$$

gesetzt wird:

(4)

$$s_n(r-1)=1-\frac{(m+1)^n}{r^m}+\left\{\binom{n}{1}s_{n-1}+\binom{n}{2}s_{n-2}+\binom{n}{3}s_{n-3}+\ldots+ns_1+s_0\right\}.$$

Diese Gleichung, durch welche s_n als Funktion von s_{n-1}, s_{n-2}, s_{n-3}, $\ldots s_1$, s_0 dargestellt wird, ist giltig für alle ganzen und positiven Werthe von m. Damit der zweite Theil endlich bleibt, wollen wir auch n als ganz und positiv voraussetzen. Setzen wir in (4) statt n der Reihe nach $n-1$, $n-2,\ldots 3, 2, 1$, so wird:

(5)

$$s_{n-1}(r-1)$$
$$=1-\frac{(m+1)^{n-1}}{r^m}+\left\{\binom{n-1}{1}s_{n-2}+\binom{n-1}{2}s_{n-3}+\binom{n-1}{3}s_{n-4}+\ldots+s_0\right\},$$

$$s_{n-2}(r-1)$$
$$=1-\frac{(m+1)^{n-2}}{r^m}+\left\{\binom{n-2}{1}s_{n-3}+\binom{n-2}{2}s_{n-4}+\binom{n-2}{3}s_{n-5}+\ldots+s_0\right\},$$

$$s_{n-3}(r-1)$$
$$=1-\frac{(m+1)^{n-3}}{r^m}+\left\{\binom{n-3}{1}s_{n-4}+\binom{n-3}{2}s_{n-5}+\binom{n-3}{3}s_{n-6}+\ldots+s_0\right\},$$

. . . .

$$s_1(r-1)=1-\frac{m+1}{r^m}+s_0,\quad s_0=1-\frac{1}{r^m}.$$

Werden die $n+1$ Gleichungen (4) und (5) der Reihe nach mit den noch unbestimmt gelassenen Grössen $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ multiplicirt und dann addirt, so folgt:

(6)

$$s_n = A_0\{1-\frac{(m+1)^n}{r^m}\}+A_1\{1-\frac{(m+1)^{n-1}}{r^m}\}+A_2\{1-\frac{(m+1)^{n-2}}{r^m}\}+\ldots$$
$$\ldots+A_{n-1}\{1-\frac{m+1}{r^m}\}+A_n\{1-\frac{1}{r^m}\},$$

wenn die noch unbestimmt gelassenen Werthe von A so bestimmt werden, dass der Coefficient von s_n gleich 1, die übrigen aber der Null gleich werden. Hierdurch entstehen folgende $n+1$ Bedingungsgleichungen:

(7)

$$A_0(r-1)=1,$$

$$A_1(r-1)=\binom{n}{1}A_0,$$

$$A_2(r-1)=\binom{n-1}{1}A_1+\binom{n}{2}A_0,$$

$$A_3(r-1)=\binom{n-2}{1}A_2+\binom{n-1}{2}A_1+\binom{n}{3}A_0,$$

$$A_4(r-1)=\binom{n-3}{1}A_3+\binom{n-2}{2}A_2+\binom{n-1}{3}A_1+\binom{n}{4}A_0,$$

. . . .

$$A_p(r-1)=\binom{n-p+1}{1}A_{p-1}+\binom{n-p+2}{2}A_{p-2}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n-1}{p-1}A_1+\binom{n}{p}A_0,$$

. . . .

$$A_n(r-1)=A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}+\ldots+A_1+A_0.$$

Die letzte Gleichung drückt eine einfache Beziehung zwischen sämmtlichen Coefficienten A der Summenformel (6) aus. So muss z. B. stattfinden

für $n=2$, $A_2(r-1)=A_1+A_0$,
für $n=3$, $A_3(r-1)=A_2+A_1+A_0$,
für $n=4$, $A_4(r-1)=A_3+A_2+A_1+A_0$,

u. s. w.

was auch durch die folgenden Werthe von (8) bestätigt wird. Die Auflösung der Gleichungen (7) ergibt:

(8)

$$A_0=\frac{1}{r-1},\quad A_1=\binom{n}{1}\frac{1}{(r-1)^2},\quad A_2=\binom{n}{2}\frac{r+1}{(r-1)^3},$$

$$A_3=\binom{n}{3}\frac{r^2+4r+1}{(r-1)^4},\quad A_4=\binom{n}{4}\frac{r^3+11r^2+11r+1}{(r-1)^5}$$

und überhaupt hat A_p die Form:

$$A_p=\frac{\binom{n}{p}}{(r-1)^{p+1}}R_p,$$

wobei also $R_0=1$, $R_1=1$, $R_2=r+1$, $R_3=r^2+4r+1$, $R_4=r^3+11r^2+11r+1$.

Um eine Rekursionsformel für R_p zu ermitteln, bedienen wir uns der allgemeinen Gleichung in (7), mit Hilfe von (9) R statt A einführend, und erhalten:

$$\binom{n}{p}R_p=\binom{n}{p-1}\binom{n-p+1}{1}R_{p-1}+\binom{n}{p-2}\binom{n-p+2}{2}R_{p-2}(r-1)+\ldots$$

$$\ldots+\binom{n}{0}\binom{n}{p}R_0(r-1)^{p-1},$$

oder, wenn man durch $\binom{n}{p}$ die Gleichung dividirt, und dabei berücksichtigt, dass allgemein die Beziehung stattfindet:

$$\frac{\binom{n}{q}\binom{n-q+1}{p-q}}{\binom{n}{p}}=\binom{p-1}{q-1}:$$

(10)

$$R_p=\binom{p}{1}R_{p-1}+\binom{p}{2}R_{p-2}(r-1)+\binom{p}{3}R_{p-3}(r-1)^2+\ldots$$

$$\ldots+\binom{p}{1}R_1(r-1)^{p-2}+R_0(r-1)^{p-1}.$$

Mittelst dieser Formel findet man successive:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{array}{l}
R_0 = 1, \\
R_1 = 1, \\
R_2 = r+1, \\
R_3 = r^2+4r+1), \\
R_4 = r^3+11r^2+11r+1, \\
R_5 = r^4+26r^3+66r^2+26r+1, \\
R_6 = r^5+57r^4+302r^3+302r^2+57r+1, \\
R_7 = r^6+120r^5+1191r^4+2416r^3+1191r^2+120r+1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Es ist immerhin bemerkenswerth, dass in den vorstehenden Polynomen die Coefficienten paarweise vom Rande einwärts einander gleich werden, so dass für $r = -1$ die R mit geradem Stellenzeiger, R_0 ausgenommen, verschwinden; hingegen ist.

$$
(12)\qquad R_0 = 1,\quad R_1 = 1,\quad R_3 = -2,\quad R_5 = 16,\quad R_7 = -272, \ldots
$$

Eine andere Eigenschaft derselben ergibt sich; wenn man in (10) $r = 1$ setzt, wodurch $R_p = pR_{p-1}$ wird; hieraus folgt mit Leichtigkeit, da $R_0 = 1$ ist, $R_p = 1.2.3\ldots.(p-1)p$; die Summe der Coefficienten in R_p muss daher ebenfalls gleich $p!$ sein, wie sich dieses in den in (11) angesetzten Polynomen auch bestätiget.

Die Summenformel für die Reihe (1) ist nun folgende:

$$
(13)\qquad s_n = \frac{R_0}{r-1}\left\{1-\frac{(m+1)^n}{r^m}\right\} + \frac{\binom{n}{1}R_1}{(r-1)^2}\left\{1-\frac{(m+1)^{n-1}}{r^m}\right\} + \ldots
$$
$$
\ldots + \binom{n}{1}\frac{R_{n-1}}{(r-1)^n}\left\{1-\frac{m+1}{r^m}\right\} + \frac{R_n}{(r-1)^{n+1}}\left\{1-\frac{1}{r^m}\right\}.
$$

Man erhält hiermit, beispielsweise für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und für $m = 2\mu - 1$:

$$
(14)\qquad
\begin{array}{l}
1-1+1-1+\ldots+1 = +1, \\
1-2+3-4+\ldots+(2\mu-1) = \mu, \\
1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2\mu-1)^2 = \mu(2\mu-1), \\
1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2\mu-1)^3 = \mu^2(4\mu-3), \\
1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(2\mu-1)^4 = \mu(8\mu^3-8\mu^2+1), \\
1^5-2^5+3^5-4^5+\ldots+(2\mu-1)^5 = \mu^2(16\mu^3-20\mu^2+5), \\
1^6-2^6+3^6-4^6+\ldots+(2\mu-1)^6 = \mu(32\mu^5-48\mu^4+20\mu^2-3), \\
1^7-2^7+3^7-4^7+\ldots+(2\mu-1)^7 = \mu^2(64\mu^6-112\mu^4+70\mu^2-21).
\end{array}
$$

Für $\mu = 1$ werden die Polynome im zweiten Theil dieser Gleichungen gleich 1, da hierfür die ersten Theile sich auf das erste Glied reduciren; hieraus folgt, dass die Summe der Coefficienten im zweiten Theil einer jeden Gleichung auch für jedes andere μ der Einheit gleich sein muss, was auch in der That der Fall ist.

Für ein gerades $m = 2\mu$ wird:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} 1-1+1-\ldots-1 \quad = 0, \\ 1-2+3-\ldots-2\mu \quad = -\mu, \\ 1^2-2^2+3^2-\ldots-(2\mu)^2 = -\mu(2\mu+1), \\ 1^3-2^3+3^3-\ldots-(2\mu)^3 = -\mu^2(4\mu+3), \\ 1^4-2^4+3^4-\ldots-(2\mu)^4 = -\mu(8\mu^3+8\mu^2-1), \\ 1^5-2^5+3^5-\ldots-(2\mu)^5 = -\mu^2(16\mu^3+20\mu^2-5), \\ 1^6-2^6+3^6-\ldots-(2\mu)^6 = -\mu(32\mu^5+48\mu^4-20\mu^2+3), \\ 1^7-2^7+3^7-\ldots-(2\mu)^7 = -\mu^2(64\mu^5+11\mu^4-70\mu^2+21). \end{array}\right.$$

Für $\mu = 1$ reduciren sich die vorstehenden Reihen auf ihre ersten zwei Glieder, und wirklich werden auch die zweiten Theile gleich $1-2^n$, woraus wieder folgt, dass die Summe der Coefficienten in den zweiten Theilen auch für jedes andere μ gleich 2^n-1 werden muss, wie auch wirklich der Fall ist.

Wird r absolut genommen kleiner als 1 vorausgesetzt, so ist es gestattet $m = \infty$ zu setzen, wodurch sich unsere Reihe (1) in eine unendliche verwandelt, während die Summenformel (13) ihre endliche Gliederzahl beibehält.

$$\frac{(m+1)^k}{r^m}$$

erscheint für diesen Werth von m allerdings in der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$, der Ausdruck ist jedoch der Nulle gleich, da nach k-maliger Differentiation von Zähler und Nenner

$$\frac{n!}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)r^{m-n}} = \frac{r^n}{\binom{m}{n}r^m} = 0$$

wird, indem n endlich, ganz und positiv ist. — Man erhält also:

$$s_n = \frac{R_0}{r-1} + \binom{n}{1}\frac{R_1}{(r-1)^2} + \binom{n}{2}\frac{R_2}{(r-1)^3} + \ldots + \binom{n}{1}\frac{R_{n-1}}{(r-1)^n} + \frac{R_n}{(r-1)^{n+1}};$$

oder da nach der Rekursionsformel allgemein:

$$\frac{R_p}{(r-1)^p}=\frac{R_0}{r-1}+\binom{p}{1}\frac{R_1}{(r-1)^2}+\binom{p}{2}\frac{R_2}{(r-1)^3}+\ldots+\binom{p}{1}\frac{R_{p-1}}{(r-1)^p}$$

ist:

$$s_n=\frac{rR_n}{(r-1)^{n+1}},$$

und dieses ist die Form des Grenzwerthes der unendlichen Reihe $\frac{1}{r}+\frac{2^n}{r^2}+\frac{3^n}{r^3}+\ldots$, vorausgesetzt, dass der absolute Werth von r von der Einheit verschieden ist, denn nur unter dieser Voraussetzung ist diese Reihe convergent und es besteht die Gleichung:

$$(16)\qquad \frac{1}{r}+\frac{2^n}{r^2}+\frac{3^n}{r^3}+\ldots.=\frac{rR_n}{(r-1)^{n+1}}.$$

So ist z. B. für $n=0, 1, 2, 3, \ldots.$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\ldots=\frac{r}{r-1},$$

$$\frac{1}{r}+\frac{2}{r^2}+\frac{3}{r^3}+\ldots=\frac{r}{(r-1)^2},$$

$$\frac{1}{r}+\frac{2^2}{r^2}+\frac{3^2}{r^3}+\ldots=\frac{r(r+1)}{(r-1)^3},$$

$$\frac{1}{r}+\frac{2^3}{r^2}+\frac{3^3}{r^3}+\ldots=\frac{r(r^2+4r+1)}{(r-1)^4},$$

$$\frac{1}{r}+\frac{2^4}{r^2}+\frac{3^4}{r^3}+\ldots=\frac{r(r^3+11r^2+11r+1)}{(r-1)^5}.$$

XIV.

Ueber einen geometrischen Satz.

Von

Herrn Oberlehrer *A. Niegemann*

in Cöln.

Im 4ten Theile dieses Archivs S. 330. finden sich zwei Beweise des Satzes „wenn zwei Winkel-Halbirungstransversalen eines Dreieckes gleich sind, so sind auch die halbirten Winkel gleich" von Herrn Mossburger mit der Bemerkung, dass Herr Prof. Steiner zu Berlin, der ihm diesen Satz mitgetheilt, den Beweis desselben ungeachtet seiner Geringfügigkeit doch mit

einigen Schwierigkeiten verbunden gefunden habe, und dass dieser Satz Herrn Steiner vom Professor Lehmus vorgelegt sei.

Der eine Beweis ist algebraisch, der andere geometrisch; beide sind nicht ganz der Einfachheit des Satzes entsprechend.

Folgenden trigonometrischen Beweis theile ich gelegentlich mit.

Sind in Taf. III. Fig. 10. CE und BD die Halbirungslinien der Winkel ACB und ABC, die wir der Kürze wegen durch C und B bezeichnen, CG und BF die Perpendikel auf AB und AC, dann ist:

$$CG = \begin{cases} CE.\sin GEC \\ CE.\sin(A+\tfrac{1}{2}C) \\ CE.\cos\tfrac{1}{2}(B-A) \end{cases} \qquad BF = \begin{cases} BD.\sin FDB \\ BD.\sin(A+\tfrac{1}{2}B) \\ BD.\cos\tfrac{1}{2}(C-A); \end{cases}$$

folglich:

$$CG:BF = CE.\cos\tfrac{1}{2}(B-A):BD.\cos\tfrac{1}{2}(C-A),$$

oder, weil $\triangle AGC \sim \triangle AFB$ und $CE = BD$ ist:

$$CA:AB = \cos\tfrac{1}{2}(B-A):\cos\tfrac{1}{2}(C-A).$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man $CA = AB$ setzt, weil dann auch $\mathfrak{W}.B = \mathfrak{W}.C$. Aber auch nur durch die Annahme, dass $CA = AB$ ist. Denn wollte man annehmen $CA > AB$, so wäre $\mathfrak{W}.B > \mathfrak{W}.C$, gleichzeitig auch $\cos\tfrac{1}{2}(B-A) > \cos\tfrac{1}{2}(C-A)$, folglich $\mathfrak{W}.(B-A) < \mathfrak{W}.(C-A)$, mithin $B < C$, welches der Annahme $AC > AB$ und daher $B > C$ widerspricht; mithin ist $AC = AB$ und $\mathfrak{W}.B = \mathfrak{W}.C$, da die Unzulässigkeit der Annahme $CA < AB$ sich ebenso nachweisen lassen würde.

XV.

Theilung des Kreises mit besonderer Berücksichtigung der Theilung durch den Zirkel, für praktische Mathematiker und praktische Mechaniker.

Von

Herrn Grafen *L. von Pfeil*

auf Hausdorf bei Neurode in Schlesien.

---

§. 1.

Die Theilung einer geraden Linie, oder eines Kreisbogens lässt sich, zumal mit Hülfe des Zirkels, ohne Anwendung künstlicher mechanischer Vorrichtungen, nur dadurch mit einiger Genauigkeit bewerkstelligen, dass man sie in eine Halbtheilung verwandelt. Will man eine gerade Linie, oder einen Kreisbogen, oder den ganzen Kreis in n Theile theilen, so wird man $n=p\pm m$ setzen, wobei p eine Potenz von 2, also eine solche Zahl ist, welche sich durch fortwährende Halbirung auf 1 theilen lässt. Man wird alsdann auf geeignete Weise die Länge von m Theilen ermitteln, darauf p durch fortgesetztes Halbiren eintheilen, und dazu die Länge von m Theilen hinzufügen, oder sie davon wegnehmen. Wollte man z. B. eine gerade Linie in 100 Theile theilen, so wird man $n=100$, $p=128$ und $m=28$ setzen, nämlich $100=128-28$. Man wird darauf die Länge von 128 Theilen ermitteln, diese durch Halbiren eintheilen und davon 100 Theile abnehmen. Ebenso könnte man im vorliegenden Falle $100=64+36$ setzen. Auf ähnliche Weise wird man beim Bogen verfahren.

Die genaueste Halbtheilung findet mit Hülfe des Zirkels statt, indem man aus den Endpunkten der zu theilenden Linie oder des zu theilenden Bogens AB (Taf. I. Fig. I.) gegen die Mitte

hin Bogen beschreibt, welche man einander beliebig nähern kann. Die Mitte, C zwischen zwei so genäherten Bogen lässt sich weit genauer wahrnehmen und bezeichnen, als der Durchschnitt eines einzelnen Bogens*). Es ist darum vortheilhafter, wenn die Bogen sich nicht ganz berühren, sondern einen kleinen Zwischenraum lassen.

Die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens erhellet aus folgenden Gründen:

Man setze die Länge eines Bogens oder einer geraden Linie AB (Taf. I. Fig. Ia.) gleich a, und schneide von deren Endpunkten A und B aus gleiche Stücke

$$AD = BE \quad \text{oder} \quad AE = BD = \frac{a}{2} \pm \frac{d}{2} < a$$

ab, so folgt daraus:

$$\frac{DE}{2} = \frac{d}{2} < \frac{a}{2}.$$

Es ist also auch:

$$a - 2.\left(\frac{a}{2} \pm \frac{d}{2}\right) = \mp d < a;$$

nehmlich das bei C von AB übrig bleibende Stück DE ist kleiner als AB.

Es ist dabei ganz gleichgültig, ob man die abgeschnittenen Stücke grösser oder kleiner als $\frac{a}{2} = \frac{AB}{2}$ angenommen hatte, indem $+d$ und $-d$ auf einander fallen.

Der gleiche Satz gilt auch, wenn man von D und E aus gegen C hin abermals Stücke D' und E' abschneidet. Das von DE übrig bleibende Stück $D'E'$ wird kleiner sein als DE.

Von dem nunmehr übrig bleibenden Stück $D'E'$ kann man abermals, und fort und fort kleinere und kleinere Stücke gegen C hin abschneiden, und man wird sich dadurch bei jeder Wiederholung der Operation dem Halbirungspunkt C mehr und mehr

*) Diese Art der Theilung ist so genau, dass damit vor Erfindung der Theilmaschinen brauchbare astronomische Instrumente getheilt worden sind, z. B. die berühmten Borda'schen Kreise, welche bei der Bestimmung des Meter angewendet wurden. Jede andere Art der Halbtheilung durch Zirkel und Lineal ist bei weitem ungenauer und deshalb praktisch unbrauchbar. Vergl. §. 11.

nähern, und schliesslich ihm näher kommen, als irgend eine gegebene, noch so kleine Grösse.

Es ist aber völlig gleichgiltig, ob man das Abschneiden der Stücke von D und E aus, von D' und E' aus u. s. w., bewirkt, oder von irgend anderen Punkten aus, welche von D und E gleich weit entfernt liegen, also auch von A und B aus, indem dadurch nur gleiche Stücke AD und BE hinzugefügt und wieder weggenommen werden.

Es ist also ein Punkt C innerhalb der Punkte D, E; D', E' u. s. w. der richtige Halbirungspunkt von AB und von diesen Punkten schliesslich weniger entfernt, als irgend eine gegebene Grösse. q. e. d.

§. 2.

Die angegebene Art der Halbtheilung kann bei Bogen, welche beträchtlich grösser als zwei Drittel des Kreises sind, nicht wohl unmittelbar angewendet werden, weil die Kreisbogen, welche man aus A und B beschreibt, einander unter einem zu stumpfen Winkel schneiden würden. Man wird darum ein vorbereitendes Verfahren anwenden müssen.

Es sei (Taf. II. Fig. II.) der überstumpfe Bogen ADB in D zu halbiren. Man nehme etwa die Hälfte von AD in den Zirkel und steche mit dieser Entfernung aus A den Punkt C, und aus B den Punkt C' genau in die Peripherie des Kreises ein. Aus C und C' halbire man den Bogen CDC' nach §. 1.

In gleicher Weise wird man den ganzen Kreis in D' in zwei Theile theilen, nur dass dabei die Punkte A und B zusammenfallen, man also aus A nach C und C' die gleichen Entfernungen absticht.

Sind Bogen zu halbiren, welche den ganzen Kreis überschreiten, wir wollen sie übergreifende Bogen nennen, so halbirt man den correspondirenden überstumpfen oder stumpfen Bogen, wodurch zugleich der übergreifende halbirt wird. So halbirt in Taf. II. Fig. II. der Punkt D nicht nur den Bogen ADB, sondern auch den übergreifenden Bogen $ABDAB$.

Auf diese Art kann man jeden Kreis oder Kreisbogen in 2, 4, 8, 16 u. s. w. in jede Potenz von 2 eintheilen.

§. 3.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise oder Kreisbogen einen bestimmten Theil abzuschneiden.

Auflösung.

Man theile den Kreis oder Kreisbogen durch Halbirung nach §. 2. und §. 1. in gleiche Theile, so weit, als nöthig. Die Zahl der Theile sei q; welches eine Potenz von 2 bedeutet, also durch fortgesetzte Halbirung bis auf 1 getheilt werden kann.

Es verhalte sich der abzuschneidende Bogen z zu dem gegebenen Bogen oder Kreise q, wie $m:n$, so kann man folgende Proportion ansetzen: $z:q = m:n$. Aus dieser Proportion folgt die Länge des gesuchten Bogens $z = \frac{q \times m}{n}$.

Da man die Halbirung des Kreisbogens beliebig fortsetzen kann, um immer kleinere Theile zu erhalten, so ist man im Stande, sich der richtigen Länge des Bogens z so weit zu nähern, als die Bedingungen der Aufgabe erfordern.

Sobald der zu halbirende Bogen sehr klein wird, kann er als eine gerade Linie betrachtet werden. Eine solche lässt sich, auch theoretisch, in einem beliebigen Verhältniss theilen. In der Praxis wird der letzte kleine Bruchtheil durch Schätzung bestimmt.

Beispiel.

Es sei (Taf. I. Fig. III a. — Taf. II. Fig. III b.) die Länge von $\frac{31}{97}$ des Kreises oder Kreisbogens zu finden und abzuschneiden. Man theile den Kreis oder Kreisbogen nach §. 1. und §. 2. etwa in 64 Theile. Hier ist $q = 64$, $n = 97$, $m = 31$, also $z:64 = 31:97$, woraus

$$z = \frac{64 \times 31}{97} = 20\frac{44}{97}$$

folgt.

Man wird also $20\frac{44}{97}$ der durch Halbtheilung erhaltenen Vierundsechszigtheile des Kreises oder Kreisbogens nehmen, und dadurch die Länge von $\frac{31}{97}$ mit hinreichend grosser Genauigkeit bestimmt haben.

Es ist nur nöthig, die Halbtheilung so weit auszuführen, als das Bedürfniss erheischt. In dem vorliegenden Falle wird man nur theilen:

1) Der Kreis oder Kreisbogen halbirt, giebt 32 Theile,
2) der Halbkreis oder halbe Bogen halbirt giebt 16,
3) zwischen 16 und 32 halbirt giebt 24,
4) zwischen 16 und 24 halbirt giebt 20,
5) zwischen 20 und 24 halbirt giebt 22,
6) zwischen 20 und 22 halbirt giebt 21,
7) zwischen 20 und 21 wird man nach $\frac{44}{97}$ des Bogens abschneiden, nicht ganz die Hälfte.

Wenn der Bogen zwischen 20 und 21 noch zu gross sein sollte, so wird man die Halbtheilung desselben fortsetzen, z. B. ihn nochmals etwa in 4 Theile theilen, wodurch man $\frac{4 \times 44}{97} = \frac{176}{97} = 1\frac{79}{97}$ solcher Theile erhalten wird. In der Praxis wird der Bruch zuletzt verkleinert und geschätzt, z. B. hier würde man $\frac{79}{97} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ setzen und dieses Maass schätzen*).

§. 4.

Aufgabe.

Einen Kreis oder Kreisbogen in eine gegebene ungerade Anzahl gleicher Theile zu theilen)**.

Auflösung.

Es sei der Kreis oder Kreisbogen in n gleiche Theile zu theilen. Man setze $n = p \pm m$, wo p eine Potenz von 2 ist, sich also durch Halbirung in einzelne Theile theilen lässt. Man bestimme die Länge von m Theilen nach §. 3. Durch die Länge

---

*) $\frac{79}{97}$ ist eigentlich 0,814. Die Differenz von 0,014 ist jedoch als Bruchtheil einer ohnehin sehr kleinen Grösse meistens zu vernachlässigen. Wäre sie von Bedeutung, so müsste die Halbirung noch fortgesetzt werden.

**) Ist die verlangte Zahl der Theile eine gerade, so dividirt man so lange mit 2, bis man eine ungerade Zahl erhält.

von m Theilen erhält man auch die Länge von p Theilen, weil p und m sich gegenseitig ergänzen.

Den Bogen von p Theilen theilt man durch Halbtheilung, wodurch man auch m getheilt haben wird, da die Theile von m denen von p gleich sind.

Beispiel 1.

Es sei (Taf. II. Fig. IV.) der Kreis in 5 Theile zu theilen. Man setze $5=4+1$, und denke gemäss §. 3. den Kreis etwa in $q=32$ Theile getheilt*). Man bestimme den Bogen von $\frac{1}{5}$ des Kreises durch die Proportion:

$$z:32=1:5, \quad \text{also} \quad z=\frac{32.1}{5}=6\frac{2}{5}.$$

Man wird also halbiren aus $q=32$, 16, 8, 4, 6, 7, und zwischen 6 und 7 die $\frac{2}{5}$ schätzen, oder aber durch weitere Halbirung bestimmen. Nunmehr kann man $p=4$ durch Halbtheilung theilen.

Beispiel 2.

Es sei (Taf. II. Fig. V.) der Kreis in 13 Theile zu theilen. Man setze $13=16-3$, also $n=13$, $p=16$, $m=3$.

Man denke den Kreis ebenfalls in $q=32$ Theile getheilt und bestimme die Länge von $\frac{3}{13}$ des Kreises durch die Proportion:

$$z:32=3:13, \quad \text{woraus} \quad z=\frac{32.3}{13}=7\frac{5}{13}$$

folgt.

Man würde also den Kreis halbiren aus 32 in 16, 8, 4, 6, 7 und zwischen 7 und 8 noch $\frac{5}{13}=0{,}38$ bestimmen. Wäre $\frac{1}{32}$ aus q noch gross genug um etwa in 8 Theile getheilt zu werden, so erhielte man $8\times\frac{5}{13}=\frac{40}{13}=3\frac{1}{13}$ solcher Theile für die verlangten $\frac{5}{13}$, und hätte somit die Länge von $\frac{3}{13}$ des Kreises. Nunmehr kann man den übergreifenden Bogen von 16 über 13 bis 3, also von $p=13+3=16$ durch Halbirung eintheilen, wodurch zugleich

---

*) Ueber die Wahl der Ziffer für q siehe §. 10.

$m = 3$ Theile getheilt ist. Das Verfahren, um einen blossen Kreisbogen zu theilen ist dasselbe, nur dass man eventuell den Bogen verlängern muss. (Siehe später)*).

§. 5.

Controlle der richtigen Theilung und Verbesserung einer fehlerhaften**).

Ist man in der angegebenen Weise mit einiger Sorgfalt verfahren, namentlich bei Schätzung des zuletzt erscheinenden Bruchs, verg. §. 11., so wird man stets auf das erste Mal die richtige Länge von m Theilen gefunden haben. Um jedoch zu prüfen, ob m richtig bestimmt worden, eventuell eine fehlerhafte Bestimmung zu verbessern, muss man vor Vollendung der Theilung so viel Theile aus p bestimmen, dass man davon m Theile mit der aus q erhaltenen Länge von m Theilen vergleichen kann. Dadurchg ewinnt man zugleich, wie man sehen wird, für die nachfolgende Theilung des ganzen Kreises oder Kreisbogens im Voraus alle richtigen Maasse.

Hatte man bei q keinen Fehler gemacht, so werden beide Längen von m Theilen, die aus q bestimmte und die aus p bestimmte, einander gleich sein. Ist aber in der Ermittelung von m ein Fehler vorgekommen, so lässt sich dieser, und die richtige Länge des Bogens für m Theile, aus dem Fehler selbst bestimmen auf folgende Art:

Vergleicht man die beiden aus q und aus p gefundenen Längen von m Theilen, indem man sie entweder auf einander legt, was geschehen muss, wenn man $n = p + m$ gesetzt hätte, oder indem sie von selbst auf einander fallen, wie solches bei $n = p - m$ statt findet, so würde sich, wenn ein Fehler begangen worden, ein Unterschied d, der gleich sein sollenden Bogen zeigen. Nennt man den bei der Bestimmung von m aus q begangenen Fehler x, so ist, wie gezeigt werden soll, jederzeit $x = \frac{p}{n} . d$.

Man findet darum die richtige Länge von m Theilen, wenn man die Differez d der aur q erhaltenen, und der

---

*) Es ist für die Praxis vortheilhaft, die beiden Endpunkte von m Theilen mit stählernen Centrumzäpfchen zu armiren. Die Armirung ist auf den Figuren durch kleine Kreise bezeichnet.

**) Vergl. Anmerkung zu §. 7. am Ende.

aus p erhaltenen Länge von m Theilen $\frac{p}{n}$mal nimmt, und zwar gilt diese Regel sowohl von Kreisbogen als von ganzen Kreisen.

Der Bruch $\frac{p}{n}$ ist ein ächter Bruch, wenn man $n=p+m$ setzte, und ein unächter, wenn man $n=p-m$ gesetzt hat, weil in dem ersten Fall p kleiner, im zweiten p grösser als n ist.

§. 6.

Das Gesagte erhellt aus folgenden Gründen:

Es sei ein Kreisbogen in n Theile zu theilen.

Erster Fall. Hat man $n=p+m$ gesetzt, so schneide man (Taf. I. Fig. IV.) nach §. 3. die vermeintlich richtige Länge von m Theilen $=BC$ ab. Der bei BC begangene Fehler sei x, nämlich $BC=m\pm x$, so ist der Fehler von p Theilen, also von AC ebenfalls x, so zwar, dass AC um x zu gross ist, wenn BC um x zu klein war, und umgekehrt. War also $BC=m\pm x$, so ist $AC=p\mp x$.

Man theile AC durch Halbirung so weit, bis man davon m Theile abnehmen kann. Der Fehler jedes einzelnen Theils von AC oder p wird sein $\frac{x}{p}$, der Fehler von m Theilen also $\frac{mx}{p}$. Die aus der Halbtheilung von AC gefundene Länge von m Theilen wird demnach sein $m\mp\frac{mx}{p}$ *).

Man vergleiche die Länge $BC=m\pm x$ mit der Länge von $BC'=m\mp\frac{mx}{p}$, indem man BC' von B aus gegen C überträgt. so sei der Unterschied beider

$$CC'=d=BC-BC'=(m\pm x)-(m\mp\frac{mx}{p})=\pm x\pm\frac{mx}{p}$$
$$=\pm\frac{p+m}{p}.x$$

und da

*) Der Unterschied von BC und BC' ist, der Deutlichkeit wegen, in den Figuren viel grösser angenommen worden, als es bei der praktischen Ausführung vorkommen kann.

$$p + m = n,$$

so ist:

$$d = \pm \frac{n}{p} . x \quad \text{und} \quad x = \pm \frac{p}{n} . d.$$

Man wird in der Praxis den Bruch $\frac{p}{n}$ annähernd in einen sehr einfachen verwandeln, was ohne Fehler geschehen kann, weil d nur sehr klein ist, oder man wird den Bruch mittels einer Mikrometerschraube übertragen, und so wird man $CC'' = \frac{p}{n} . d = x$ bestimmen und auf diese Art AC'' als die richtige Länge von p Theilen erhalten. Man wird nunmehr AC'' durch fortgesetzte Halbirung eintheilen. Man kann darauf von AC'' so viele Theile $= DC''$ abnehmen, dass DC'' zu $C''B$ hinzugefügt ebenfalls eine Potenz von 2 giebt, so dass man also BD ebenfalls durch Halbirung eintheilt. Ist man richtig verfahren, so wird die Halbirung von BD genau auf den Punkt C'' zurückführen.

Beispiel 3.

Es sei der Bogen eines rechten Winkels (Taf. II. Fig. VII.) in $\frac{1}{3}$ Grade, also in 270 Theile einzutheilen. Man setzt

$$\frac{270}{2} = 135 = n = 128 + 7.$$

Es ist also in der Formel

$$n = p + m,$$
$$p = 128,$$
$$m = 7,$$
$$135 = 128 + 7.$$

Man suche erst die Länge von 7 Theilen nach §. 3. Angenommen, man habe bei dieser Bestimmung einen Fehler x begangen, so wird $BC = m \pm x$ sein.

Man theilt 0 bis 128 durch Halbtheilung, wobei man jedoch die Theilung nur so weit ausführt*) bis man 7 Theile erhalten hat, die man von B aus nach BC' überträgt (Vgl. Taf. I. Fig. VI.). Die Differenz $CC' = d$ wird $\frac{n}{p} . x = \frac{135}{128} . x$ und $x = \frac{128}{135} . d$ sein,

*) Nämlich 128, 64, 32, 16, 8, 4, 6, 7.

so dass man hier ohne merkliche Fehler $x = d$ und $AC'' = AC$ setzen kann*). Man wird also die Halbtheilung von AC ausführen, bis man 1 Theil $C''D$ zu BC'' hinzufügen kann, und somit auf 8 Theile $= BD$ gelangt. Dann theile man BD durch Halbtheilung. Ist man richtig verfahren, so muss die Theilung auf den Punkt C'' treffen.

Findet die Uebereinstimmung Statt, so führt man die Theilung vollständig aus. Die in der vorläufigen Theilung bereits erhaltenen Maasse dienen hierbei als Hilfsmittel.

Zweiter Fall. Hatte man $n = p - m$ gesetzt, so muss man den Kreisbogen verlängern, und BC (Taf. I. Fig. VIII.) als die nach §. 3. bestimmte Länge von m Theilen von B nach C übertragen. Wäre dieses Maass nicht richtig bestimmt worden, so sei der bei BC begangene Fehler x, dann ist der Fehler von AC oder von p Theilen ebenfalls x, so zwar, dass wenn BC um x zu gross oder zu klein war, auch AC um x zu gross oder zu klein ist. War also $BC = m \pm x$, so ist auch $AC = p \pm x$.

Man theile $AC = p \pm x$ durch Halbtheilung so weit, bis man davon m Theile erhält; es werden beide Längen von m einander beinahe decken. Der Fehler jedes einzelnen Theiles wird sein $\frac{x}{p}$, und also der Fehler von m Theilen $\frac{mx}{p}$. Die durch Halbtheilung aus AC gefundene Länge von m Theilen wird also sein

$$B'C = m \pm \frac{mx}{p}.$$

Man vergleiche beide Längen von m Theilen, so ist ihr Unterschied

$$B'B = BC - B'C = m \pm x - \left(m \pm \frac{mx}{p}\right) = \pm\left(x - \frac{mx}{p}\right)$$

$$= \pm \frac{p-m}{p} . x = d,$$

und da

$$p - m = n,$$

so ist auch in diesem Falle:

$$d = \pm \frac{n}{p} . x \quad \text{und} \quad x = \frac{p}{n} . d.$$

*) Der Fehler $\frac{7}{135} = 0{,}05$ ist bei der Kleinheit, welche d überhaupt nur haben kann nicht leicht wahrnehmbar, in soweit man nicht Vergrösserungsgläser anwendet.

Man wird in der Praxis ebenfalls den unächten Bruch $\frac{p}{n}$ in einen sehr einfachen verwandeln, und so $BB'' = \frac{p}{n}.d = x$ bestimmen. Man wird die Länge $B''C$ von B aus nach BC'' übertragen, und auf diese Art AC'' als die richtige Länge von p Theilen erhalten, woraus man durch Halbtheilung p Theile findet. Ist man richtig verfahren, so muss die Theilung genau auf den Punkt B zurückführen.

Beispiel 4.

Es sei (Taf. I. Fig. IX.) der Halbkreis AB in Hundert Theile einzutheilen. Man setze $\frac{100}{4} = 25 = 32 - 7$, so dass in der Formel:

$$\begin{aligned} n &= p - m, \\ n &= 25, \\ p &= 32, \\ m &= 7, \end{aligned}$$

sein wird.

Man verlängere*) den Halbkreis AB, oder 0 bis 25, entsprechend, und trage von B also 25 aus die nach §. 3. bestimmte Länge von $q = 7$ Theilen nach C also 32 mithin ist 25 bis 32 $BC = m \pm x$. Man ermittle durch Halbtheilung von $p = 32 = AC$ also 0 bis 32 ebenfalls 7 Theile. Wären die 7 Theile im Anfange richtig bestimmt worden, wie wahrscheinlich der Fall sein wird, so musste die Theilung auf 25 zurückführen. Wäre jedoch bei der ursprünglichen Bestimmung von 7 Theilen ein Fehler, x gemacht worden, so ergeben beide Längen, BC und $B'C$ etwa eine Differenz:

$$BB = d = \frac{n}{p}.x = \frac{25}{32}.x, \quad \text{und} \quad x = \frac{32}{25}.d.$$

Anstatt $\frac{32}{25}$ wird man bei der Kleinheit von d ohne merklichen Fehler $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$ setzen**). Man wird also ein Drittheil von BB' nach BB'' übertragen, und so $B''C$ als die wirkliche Länge von m oder 25 bis 32 erhalten, welche man von 25 aus nach 32 als BC'' abschneidet, so dass nunmehr AC'' die richtige Länge von 32

*) Vergl. überall Taf. I. Fig. VIII.

**) Genauer 1,28.

Theilen darstellen wird. Ist man jetzt richtig verfahren, so wird die Halbtheilung von AC'' auf B zurückführen.

Es wurden in beiden Beispielen solche Theilungen gewählt, wobei sich m auch durch eine vorläufige Eintheilung leicht finden lässt.

Wäre aber m eine beliebige Primzahl, so lässt sich $m \pm x$ eben so gut bestimmen, wie dieses §. 3. gezeigt wurde.

Beispiel 5.

Angenommen z. B. es wäre Taf. II. Fig. X. ein Bogen von 12 Grad, oder ein ganz unbestimmter in 13 Theile zu theilen, so würde man $13 = 16 - 3$ setzen, und zuerst die Länge von 3 Theilen, m, finden, indem man den Bogen von 12 Grad etwa in 8 Theile theilte. Man erhielte die verlangte Länge durch die Proportion $z:8 = 3:13$, woraus

$$z = \frac{8 \times 3}{13} = 1\frac{11}{13}$$

folgt.

Man würde also $1\frac{11}{13}$ eines Achttheils des Bogens von 12 Grad dem ganzen Bogen hinzufügen, und den so verlängerten Bogen in 16 Theile theilen*). Es müssten 13 Theile genau auf den Bogen von 12 Grad treffen. Wäre dies nicht der Fall, so würde man den begangenen Fehler nach §. 6., zweiter Fall, corrigiren, indem man den Unterschied $d \times \frac{16}{13} = x$ setzte, und den Bogen für 16 Theile um x vergrösserte oder verkleinerte.

§. 7.

Aufgabe.

Den Kreis in eine solche Anzahl gleicher Theile zu theilen, welche nicht durch 2 theilbar ist, und diese Theilung zu berichtigen.

Auflösung.

Es sei n die Anzahl der Theile, in welche der Kreis getheilt

*) Man theile erst zur Prüfung der Richtigkeit 16, 8, 12, 14, 13.

werden soll, so wird man diese Zahl als die Summe oder Differenz von zwei anderen betrachten können, deren eine p eine Potenz von 2, also durch Halbirung zu theilen ist. Man kann also jedesmal setzen $n = p \pm m$.

Man bestimme nach §. 3. aus q die Länge von m Theilen, und theile dann p durch Halbtheilung nach §. 2. und §. 1., bis man aus p etwa m Theile abnehmen kann. Stimmen beide Maasse von m überein, so war m gleich Anfangs richtig bestimmt, und man kann den Kreis durch Halbtheilung von p theilen. War aber m nicht richtig bestimmt, so wird die für m Theile gefundene Länge $AB = m \pm x$ (Taf. II. Fig. XI. und Taf. I. Fig. XIII.), wo x den begangenen Fehler bedeutet.

Erster Fall. Hat man $n = p + m$ gesetzt, und war etwa AB (Taf. II. Fig. XI.) um x zu gross oder zu klein angenommen worden, so musste ACB als die ohngefähre Länge von p Theilen um x zu klein oder zu gross werden. War also $AB = m \pm x$, so wird $ACB = p \mp x$ sein.

Man hatte ACB durch Halbtheilung so weit getheilt, dass man m Theile davon abnehmen konnte. Dieses geschieht am besten, wenn man zwischen B und C so lange halbirt, bis $ABD = \frac{p}{2}$ ist, weil dann $AD - BD = AB = m$ und auch $BC - BD = CD = m$, also $AB = CD$ wird. Der Fehler jedes einzelnen Theils von p wird sein $\frac{x}{p}$, und also der Fehler von m Theilen $\frac{mx}{p}$. Die aus der Halbtheilung von ACB oder p gefundene Länge von m Theilen wird also sein $CD = AB' = m \mp \frac{mx}{p}$.

Man vergleiche die Länge $AB = m \pm x$ mit der Länge

$$AD = AB' = m \mp \frac{mx}{p},$$

indem man CD von A aus gegen B überträgt, so ist der Unterschied beider:

$$BB' = d = AB - AB' = (m \pm x) - (m \mp \frac{mx}{p}) = \pm x \pm \frac{mx}{p}$$

$$= \pm \frac{p + m}{p} \times x,$$

und da

$$p + m = n,$$

so ist auch

$$d = \pm \frac{n}{p} . x \quad \text{und also} \quad x = \pm \frac{p}{n} . d .$$

Da nach der Annahme d nur klein sein kann, so lässt sich der Bruch $\frac{p}{n}$ annähernd in einen sehr einfachen verwandeln, und so aus $BB' = d$ die Grösse von $B'B'' = x$ bestimmen. Hieraus folgt:

$$AB \pm BB'' = AB''$$

als der richtige Bogen für m Theile.

Man wird nunmehr aus A und B'' den Bogen ACB'' nochmals in C'' halbiren, ferner nochmals durch Halbtheilung von AC'', die m Theile finden, und sind diese genau $= AB''$, so wird man mit der Halbtheilung von AD und AC'' vorgehen. Dabei wird man auch aus C über D gegen B so viele Theile unmittelbar erhalten, dass die Theilungen zwischen C und D ebenfalls durch fortgesetzte Halbirung ausgeführt werden kann. War man richtig verfahren, so musste die Theilung auf B'' und D zurückführen.

Beispiel 6.

War der Kreis in 93 Theile zu theilen und $93 = 64 + 29$ gesetzt worden, so musste man den Bogen von 29 Theilen AB (Taf. I. Fig. XII.) nach §. 3. bestimmen, also $AB = z = \frac{q \times 29}{93}$ setzen. Es konnte q etwa 128 Theile enthalten, also

$$AB = z = 39 \frac{85}{93} .$$

Um nun aus diesen Theilen nochmals $m = 29$ zu bekommen, theilte man $p = ACB$ in C in zwei Theile, die Hälfte nochmals, und so fort, bis man $AD = 32$ Theile bekam, nämlich man theilte:

zwischen	29	und	93	$(29 + 32) =$	$61 \ldots . C,$
„	29	„	61	$(29 + 16) =$	$45,$
„	29	„	45	$(29 + 8) =$	$37,$
„	29	„	37	$(29 + 4) =$	$33,$
„	29	„	33	$(29 + 2) =$	$31,$
„	31	„	33		$32 \ldots . D.$

Nunmehr war $CD = 61 - 32 = 29$ Theilen, und es wurde $CD = AB$, was man durch Uebertragung zu prüfen hatte. Beide Längen

von 29 Theilen mussten übereinstimmen, wenn man bei der Bestimmung von AB keinen Fehler begangen hatte.

Obschon ein solcher Fehler bei einiger Sorgfalt nicht vorkommt, so setzen wir doch er sei begangen worden. Man musste (Taf. II. Fig. XI.) $AB' = CD$, von A aus gegen B übertragen und

$$BB' = d = \frac{n}{p} . x = \frac{93}{64} \cdot x \quad \text{oder} \quad x = \frac{64}{93} \cdot d$$

setzen.

Da $\frac{64}{93} = 0{,}688$ fast $= \frac{2}{3}$, also $x = \frac{2}{3} BB'$, so theilte man BB' in drei gleiche Theile, und machte $BB'' = \frac{2}{3} BB'$, wodurch man AB'' als den richtigen Bogen von 29 Abtheilungen erhielt.

Nun hatte man nochmals (vergl. Taf. II. Fig. XI.) den Bogen ACB'' in C'' zu halbiren, darauf nochmals die erhaltene Probe zu wiederholen, und fand man $C''D''$ genau $= B''A$, so konnten endlich zwischen 0 und 32, zwischen 29 und 61 und zwischen 61 und 93 durch fortwährende Halbtheilung die einzelnen Theile getheilt werden. Die richtigen Maasse fanden sich bereits in der vorläufigen Theilung gegeben.

Zweiter Fall. Hatte man $n = p - m$ gesetzt, und bei der Bestimmung von AB (Taf. I. Fig. XIII.) einen Fehler gemacht, so ist auch hier $AB = m \pm x$, und auch der übergreifende Bogen $ABCAB = p \pm x$, weil $ABCAB$ um eben so viel zu gross oder zu klein wird, als AB zu gross oder zu klein war.

Man theile $ABCAB$ durch Halbtheilung nach §. 2. und §. 1. so weit, dass man m Theile davon abnehmen kann. Der Fehler des einzelnen Theils wird sein $\frac{x}{p}$, und also der Fehler von m Theilen $\frac{mx}{p}$.

Man vergleiche die Länge $AB = m \pm x$ mit der darüber fallenden Länge $AB' = m \pm \frac{mx}{p}$. Ihre Differenz ist

$$BB' = d = (m \pm x) - (m \pm \frac{mx}{p}) = \pm x \mp \frac{mx}{p} = \pm \frac{p - m}{p} \times x,$$

und da

$$p - m = n,$$

so ist auch in diesem Falle:

$$d = \pm\frac{n}{p}.x \quad \text{und} \quad x = \pm\frac{p}{n} \times d.$$

Auch hier wird man den Bruch annähernd in einen sehr einfachen verwandeln, und so aus $BB' = d$ die richtige Grösse von $BB'' = x$ bestimmen. Hieraus folgt:

$$AB \pm BB'' = AB''$$

als der richtige Bogen für m Theile.

Man wird nunmehr den Bogen $ABCAB''$ nochmals in C' halbiren, ferner nochmals durch Halbtheilung von ABC' die Länge von m Theilen ermitteln, und treffen diese, wie der Fall sein wird, genau mit AB'' zusammen, so wird man die Theilung durch fortwährende Halbtheilung zu Ende führen.

Beispiel 7.

War der Kreis (Taf. I. Fig. XIV.) in 97 Theile zu theilen, so setzte man $97 = 128 - 31$. Man ermittelte zunächst den Bogen von 31 Theilen $= AB$ nach §. 3., indem man

$$AB = \frac{q \times 31}{97} \quad \text{etwa} \quad = \frac{64.31}{97} = 20\frac{44}{97}$$

setzte, und hierauf den erhaltenen Bogen von 31 Theilen nochmals aus der Halbtheilung von $p = ABCAB$ gleich 128 Theilen bestimmte, nämlich man musste theilen 64, 32, 16, 24, 28, 30, 31.

War bei der Bestimmung von AB aus q kein Fehler begangen worden, so mussten AB und AB' zusammenfallen.

War dagegen ein Fehler vorgekommen, so war (Tafel I. Fig. XIII.):

$$AB' = d = \frac{n}{p}.x = \frac{97}{128}.x$$

und

$$x = \frac{128}{97}.d = 1{,}32,$$

oder ziemlich $= \frac{4}{3}.d$.

Man musste also $BB' = d$ in 3 Theile theilen, und 4 dieser Theile von B über B' heraus nach B'' übertragen. Dadurch wurde $BB'' = x$, so dass man AB'' als den richtigen Bogen von 31 Theilen erhielt.

Nunmehr hatte man aus A und B' nochmals den Bogen $AC'B''$ in C'' zu halbiren, und zuletzt durch Halbtheilung von ABC' und $B''AC''$ zunächst wieder den Bogen von 31 Theilen, $AB = 97$ bis 31 in Taf. I. Fig. XIV. und schliesslich die einzelnen Theile zu finden, indem man zwischen 97 und 64 den Bogen ABC und gegenüber zwischen 31 und 64 über 97 hinweg den Bogen CAB $(97 - 64 + 31 = 64)$ bei 96 halbirte. Das Uebrige der Theilung hat keine Schwierigkeit.

Diese Erörterung zeigt, dass in allen Fällen, wo Kreise oder Kreisbogen getheilt werden sollen, der bei der Bestimmung von m begangene Fehler x gleich ist d, dem Unterschied aus den beiden Längen von m, multiplicirt mit einem Bruch, dessen Zähler p, und dessen Nenner n ist, wie dieses in §. 5. behauptet wurde *).

Die in §. 5. bis §. 7. entwickelte Berichtigungsmethode wird vornehmlich alsdnan Anwendung finden, wo der einzutheilende Kreis in der Art unterbrochen ist, dass sich eine fortgesetzte Halbirung von q nicht ausführen lässt, wie dieses z. B. der Fall ist, wenn ein Radmodell, oder ein fertiges Rad auf den Kämmen getheilt werden soll. In diesem Falle würden die Theilungspunkte aus der Halbirung von q zwischen die Kämme zu liegen kommen, während die Theilungspunkte aus der Halbirung von p sämmtlich auf die Kämme fallen.

§. 8.

Aufgabe.

Den Kreis oder einen Kreisbogen nach einem beliebigen Verhältniss in ungleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es seien die Theile, in welche der Kreis oder der Kreisbogen getheilt werden soll, r, s, t, u. Man bringe die Zahlen, wenn

*) Es sei übrigens bemerkt, dass eine Berichtigung von m seltener ja niemals nothwendig ein wird, sobald bei der Bestimmung aus der Halbtheilung des Kreises oder Bogens aus q vorsichtig verfahren worden, zumal wenn man die Punkte A und B mit Centrumzäpfchen armirt hatte. Die aus q gefundene Länge vom m Theilen stimmt mit der aus p gefundenen fast jederzeit überein, indem die sehr kleinen, bei der Halbirung zu begehenden Fehler in der Regel nach entgegengesetzten Seiten

Brüche vorhanden sind, auf gleiche Nenner, und setze die Summe der Zähler von $r+s+t+u=n$. Darauf theile man den Kreis oder Kreisbogen nach §. 7. in n Theile, indem man jedoch die Theilung nur so weit ausführt, dass die verlangten Theilungspunkte sich ergeben.

Beispiel 8.

Es sei der Kreis so einzutheilen, dass die Theilungen den Monatslängen in einem Jahr entsprechen. Man setze (Taf. I. Fig. XV.) $n=365$ (bezüglich 366) und theile nach §. 7. den Kreis so, als ob man 365 Theile erhalten wolle, bezeichne jedoch nur die Haupttheilungen, etwa je 16. Hierauf gebe man jedem Monat seine entsprechende Anzahl Tage, und führe auch die Theilung nur an den entsprechenden Stellen aus. Taf. I. Fig. XV. erklärt das Verfahren hinlänglich.

§. 9.

Wahl zwischen $n=p+m$ und $n=p-m$.

Man wird am bequemsten p so wählen, dass m möglichst klein ist.

Dieses geschieht, wenn man in allen Fällen, wo m kleiner als $\frac{p}{2}$ ist, $n=p+m$ setzt dagegen wo m grösser als $\frac{p}{2}$ sein würde, lieber $n=p-m$ wählt, wodurch dann wieder $m<\frac{p}{2}$ wird.

Nachfolgende Tabelle zeigt die für bestimmte Theilungen zu wählende Formel.

Es wird gewählt:

$n=p+m.$	$n=p-m.$
Für die Theilung 3.	Für die Theilung 3.
„ „ „ 5.	„ „ „ 7.
Zwischen 8 und 12.	Zwischen 12 und 16.
„ 16 „ 24.	„ 24 „ 32.

---

fallen, und sich darum aufheben und ausgleichen. Am leichtesten kommt ein Fehler dadurch vor, dass bei der Bestimmung von m aus q der Bruch am Ende des Werthes nicht richtig geschätzt wurde. Vergl. §. 11.

Zwischen	32	und	48.	Zwischen	48	und	64.
„	64	„	128.	„	128	„	256.
„	256	„	384.	„	384	„	512.
u. s. w.				u. s. w.			

Indess kann auch die entgegengesetzte Formel gebraucht werden, sobald m die Hälfte von p nicht allzuweit überschreitet.

§. 10.

Die Wahl der Ziffer für q.

Dieselbe richtet sich nach der Grösse des zu theilenden Kreises oder Kreisbogens, und ist im Uebrigen willkürlich, sobald nur q wie gesagt eine Potenz von 2 ist, d. h. sobald sich q durch Halbtheilung auf Eins theilen lässt. Die Ziffern welche q haben darf, sind also: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, u. s. w. Man wählt bequem etwa eine solche Ziffer, wobei die einzelnen Theile zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{4}$ Zoll fallen, damit man die Zahl der Theilungen gut daneben schreiben kann.

So würde man z. B. bei einem Kreise von 1 Fuss Durchmesser oder 150 Viertelzoll Umfang $q = 256$ setzen, bei einem Kreise von 10 Fuss Durchmesser $q = 2048$, u. s. w.

§. 11.

Der durch die Halbtheilung möglicher Weise zu begehende Fehler kann höchstens doppelt so gross werden, als derjenige, welcher bei der Halbtheilung eines einzelnen Bogens begangen werden kann.

Dieses erhellt aus folgender Betrachtung. Angenommen, es sei ein Kreis oder Kreisbogen z. B. in 128 Theile getheilt, so ist die Hälfte 64, das Viertheil 32, u. s. w., bis auf einen Theil herab musste 7mal getheilt werden.

Gesetzt, es sei der grösste, bei der Halbtheilung zu begehende Fehler w, und dieser Fehler sei bei jeder Halbirung begangen worden, gesetzt ferner, es fielen alle Fehler nach einer Seite hin, so wird die Summe aller dieser Fehler den am Ende begehenden Fehler darstellen.

Der, bei 64 begangene Fehler w wird 6mal halbirt, w wird also am Ende mit $\frac{w}{64}$ erscheinen.

Der bei 32 begangene, eben so grosse Fehler wird 5mal halbirt, erscheint also am Ende mit $\frac{w}{32}$.

Ebenso erscheint der bei 16 Theilen begangene Fehler am Ende mit $\frac{w}{16}$, der bei 8 begangene Fehler mit $\frac{w}{8}$, u. s. w. zuletzt der bei einem Theil begangene Fehler mit w.

Es ist also die Summe aller dieser Fehler, wenn sie alle auf eine Seite gefallen sein sollten

$$w + \frac{w}{2} + \frac{w}{4} + \frac{w}{8} + \frac{w}{16} + \frac{w}{32} + \frac{w}{64},$$

mithin nicht ganz $2w$.

Dieses würde auch für den Fall gelten, wenn man q grösser, z. B. 256, 512, u. s. w. angenommen gehabt hätte, immer würde der am Ende begangene Fehler unter w bleiben.

Aus dieser Darstellung erhellt zugleich, dass die zu begehenden Fehler um so wirksamer werden, wenn sie bei mehr vorgeschrittener Theilung begangen worden sind, und dass in der Praxis die Genauigkeit des Resultats hauptsächlich von der richtigen Schätzung des kleinen Bruchs am Ende abhängt, weil die kleinen, in der Halbirung begangenen Fehler theils an sich sehr unbedeutend sind, theils in der Regel nach entgegengesetzten Seiten fallen und sich ausgleichen werden.

§. 12.

Allgemeine Regeln*).

Man kann also die Theilung jedes Kreisbogens, und jedes ganzen Kreises nach folgenden Regeln ausführen:

1) Setze die Zahl der Theile $n = p \pm m$, wo p eine Zahl ist, welche sich durch Halbtheilung bis auf 1 theilen lässt, also 2, 4, 8, 16, 32, u. s. w. mit Berücksichtigung von §. 9.

---

*) Für Nichtmathematiker.

2) Bestimme die Länge von m Theilen, nach §. 3. aus der Halbtheilung des ganzen zu theilenden Kreises oder Kreisbogens q. Verwende insbesondere auf die Schätzung des letzten Bruchs die grösste Sorgfalt. Es darf q ebenfalls nur als eine der obigen Zahlen angenommen werden.

3) Finde die Länge von m Theilen nochmals, aber durch Halbtheilung des Bogens von p Theilen.

4) Stimmen beide Längen, wie wahrscheinlich, überein, so vollende die Theilung durch Halbirung von p.

Sollten beide Längen jedoch nicht genau übereinstimmen, so war m von Anfang unrichtig bestimmt. Dann

5) Finde die Differenz beider Bogen von m Theilen gleich d, indem du die Bogen von einander abziehest.

6) Aus dieser Differenz bestimme den bei m begangenen Fehler x, indem du d mit $\frac{p}{n}$ multiplicirst, also $x = \frac{p}{n} \times d$ setzest, wobei der Bruch verkleinert wird.

7) Nachdem so die richtige Länge von m Theilen ermittelt worden, theile den Bogen von p Theilen durch fortgesetzte Halbirung, wodurch auch der Bogen von m Theilen getheilt sein wird.

Auf die in vorstehendem erwähnte Weise können alle beliebigen Theilungen des Kreises oder eines Kreisbogens mit ganz gleicher Leichtigkeit und Genauigkeit ausgeführt werden.

Es mögen hier noch einige Aufgaben folgen:

9) Um z. B. den Kreisbogen in 3 Theile zu theilen, setze man (Taf. I. Fig. XVI.) $3 = 2 + 1$, denke den Bogen etwa in $q = 16$ Theile getheilt, und schneide $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ solcher Theile ab. Den übrig bleibenden Bogen theile man in $p = 2$ Theile, und vergleiche einen der Theile mit dem abgeschnittenen Bogen. Ist die Hälfte dem abgeschnittenen Bogen nicht gleich, so nehme man von dem Unterschied $\frac{2}{3}$, und es wird dadurch die richtige Länge eines Drittheils gefunden sein.

Man hätte auch $3 = 4 - 1$ setzen können, wo man dann den Bogen verlängern musste.

10) War etwa der Kreis (Taf. II. Fig. XVII.) in 7 Theile zu theilen, so würde man $7 = 8 - 1$ setzen, also $n = 7$, $p = 8$, $m = 1$. Man konnte nun den Kreis etwa in $q = 128$ Theile getheilt denken, und setzen:

$$z : 128 = 1 : 7,$$

woraus:

$$z = \frac{128}{7} = 18\frac{2}{7}$$

folgt.

Man würde also durch Halbtheilung des Kreises finden 128, 64, 32, 16, 24, 20, 18, 19 und zwischen 18 und 19 die Länge $\frac{2}{7} = 0{,}286$ schätzen, wie §. 3. am Ende gezeigt wurde*). Man halbirte nunmehr p; zwischen 1 und 7 und zwar 4, 2, 1. Traf dieser Theil wider Erwarten nicht auf die Länge m aus q, so ergäbe sich (Taf. I. Fig. XIII.) eine Differenz $BB' = d = \frac{7}{8}x$, und $x = \frac{8}{7}d$. Man würde also BB' in 7 Theile oder auch 8 Theile**) theilen, und davon 8 oder respective 9 Theile von B über B' hinaus nach B'' übertragen, und $x = BB''$ und auch $AB'' = m$ Abtheilungen erhalten.

11) Wäre ein andermal der Kreis (Taf. II. Fig. XVIII.) in 39 Theile zu theilen, so würde man

$$n = 39 = 32 + 7$$

setzen, und aus der Halbtheilung von vielleicht $q = 512$ finden:

$$z : 512 = 7 : 39,$$

also

$$z = \frac{512 \times 7}{39} = 91\frac{35}{39}.$$

Man würde den Kreis theilen 512, 256, 128, 64, 96, 80, 88, 92, 90, 91 und zwischen 91 und 92, vielleicht durch weitere Halbtheilung nach §. 3., den Bruch $\frac{35}{39}$ angeben, und so den Bogen für 7 Theile erhalten. Hierauf würde man p halbiren zwischen 7 und

*) Es sind hier und in den folgenden Beispielen grössere Kreise vorausgesetzt, als die Figuren angeben.

**) Was der Kleinheit wegen angeht.

39, nämlich 23, 15, 19, 17, 16, die so erhaltene Länge von 16 bis 23, also von 7 Theilen mit der Länge von 39 bis 7 vergleichen. Fände sich ein Unterschied, so würde man $x = \frac{32}{39} . d$ finden. Man würde, weil der Bruch unbequem ist, $\frac{32}{39} = \frac{32}{40}$, oder $\frac{4}{5}$ setzen, und $\frac{4}{5} . d$ von B aus gegen B' (Taf. I. Fig. XIII.) hin nach $BB'' = x$ übertragen und AB'' als den richtigen Bogen von $\frac{7}{39}$ erhalten.

Für die praktische Ausführung wird man bisweilen $BB'' = BB'$ setzen können, sobald BB' und m nur klein sind. So

12) wäre z. B. die Theilung des Kreises (Taf. II. Fig. XIX.) in $31 = 32 - 1$ Theile zu bewirken, so würde man:

$$z : 64 = 1 : 31,$$

also

$$z = \frac{64}{31} = 2\frac{2}{31}$$

bestimmen, darauf den übergreifenden Bogen 31, 1, 16, 31, 1 durch Halbirung theilen, nämlich 16, 8, 4, 2, 1, und wenn es nöthig wäre eine Differenz $BB' = d$ berichtigen, indem man

$$x = \frac{32}{31} . d = d$$

setzte.

13) Es sei hier noch die Theilung des Kreises (Taf. II. Fig. XX.) in 360 Grade angegeben. Da $360 = 8 \times 45$, so wird man den Kreis in 45 Theile zu theilen, und diese durch Halbtheilung auf 360 zu bringen haben.

Es ist $45 = 32 + 13$, also $n = 45$, $p = 32$, $m = 13$.

Man suche den Bogen für $\frac{13}{45}$, indem man erst die Länge dieses Bogens

$$z = \frac{q \times 13}{45} \quad \text{etwa} \quad z = \frac{64 \times 13}{45} = 18\frac{22}{45}$$

in $\frac{1}{64}$ des Kreises ausgedrückt findet, also $\frac{1}{4}$ des Kreises und noch $2\frac{22}{45}$ desselben. Den so erhaltenen Bogen für $\frac{13}{45}$ des Kreises nimmt man als m Theile, und verfährt weiter nach §. 4. bis 7.

14) Man sieht übrigens hieraus, dass es auf die Zahl der Theile gar nicht ankommt. Um z. B. den Kreis (Taf. II. Fig. XXI.) in 359 Theile zu theilen, welches eine Primzahl ist, so wurde $359 = 256 + 103$ gesetzt. Der Bogen von 103 Theilen wurde aus $q = 512$ gefunden, indem man

$$x = \frac{512 \times 103}{359} = 146\frac{316}{359} = 146{,}88$$

Abtheilungen des Kreises bestimmte, worauf man weiter nach §. 4. und §. 7. (erster Fall) verfuhr. Sind die Theile sehr klein, so wird man beim Zeichnen zuletzt mit dem Augenmass halbiren*).

Aus dem Gesagten erhellt, dass man sich durch das vorgeschlagene Verfahren, auch praktisch, der absolut richtigen Theilung des Kreises beliebig nähern kann. Je grösser die Kreise sind, desto grösser wird auch die zu erlangende Genauigkeit sein, weil die Grösse des möglichen Fehlers nur allein von der Möglichkeit abhängt, ihn noch wahrzunehmen. Es wird darum, ins Besondere für Mühlräder und deren Modelle, die Theilung eine Genauigkeit geben, wie sie selbst durch die besten jetzt gebrauchten Theilscheiben schwerlich zu erreichen sein möchte. Wenn man sich jedoch für die Erkennung und Bezeichnung der Theilungspunkte mikroskopischer und mechanischer Vorrichtungen bedienen wollte, so würde man gleichsam jeden beliebigen Grad von Genauigkeit erreichen können.

Theoretisch betrachtet, ist das Verfahren absolut richtig, sobald man einräumt, dass die sehr kleinen Bogen d und x für gerade Linien angesehen werden können, indem sich bekanntlich jede gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, also hier in n Theile theilen lässt. Ebenso folgt theoretisch die Richtigkeit aus dem Umstande, dass man sich der verlangten Genauigkeit ohne Ende nähern kann, da sich ein gegebenes Maass des Kreisbogens ohne Ende in engere und engere Grenzen einschliessen lässt. Diese Behauptungen gelten von beiden Methoden der Theilung, sowohl der in §. 3., als auch in der §. 6. und 7. entwickelten.

Das Verfahren ist gewissermassen einer unendlichen Reihe zu vergleichen, welche sehr schnell zusammenläuft.

Das Gesetz dieser Reihe für die Bestimmung von m, arith-

---

*) Eine Theilung des Kreises in 359 Theile dürfte mit den bis jetzt bekannten Hilfsmitteln, selbst mit Anwendung trigonometrischer Rechnungen, kaum ausführbar gewesen sein.

metisch ausgedrückt, wenn $\frac{P}{Q}$ die Länge des zu theilenden Kreisbogens, und P den Umfang des zu theilenden Kreises bedeutet (wobei also $Q = 1$ wird), würde sein:

$$m = \frac{P}{Q} \cdot \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{16} \cdots\right)$$

die Reihe fortgesetzt nach dem Bedürfniss der Genauigkeit.

Man würde sich mit Benutzung des so eben entwickelten Systems mit grossem Vortheil der Theilmaschine für astronomische Instrumente bedienen können, um davon Theilscheiben von grosser Genauigkeit abzunehmen.

Es enthalten diese Instrumente einen Fundamentalkreis, welcher auf den grösseren bis auf eine Minute, also in 21600 Theile unmittelbar getheilt ist, und jede Zwischenabtheilung lässt sich mit Hülfe von Mikrometerschrauben in grosser Vollkommenheit darstellen.

Man würde hiernach für jede beabsichtigte Theilung die Bogenlänge von m Theilen bezeichnen, und hierauf die einzelnen Theile durch Halbtheilung mit Hülfe der Theilmaschine aufritzen. In dieser Weise würde man eine Fundamentaltheilscheibe darstellen, von welcher alsdann gewöhnliche Theilscheiben abgenommen werden könnten.

XVI.

Bestimmung des Rauminhaltes desjenigen Theiles eines elliptischen Kegels, welcher zwischen zwei gegebenen Ebenen enthalten ist.

Von
Herrn *Franz Unferdinger*
Professor der Mathematik an der Oberrealschule
am Bauernmarkte in Wien.

Sind α und β die Verhältnisszahlen der Axen der elliptischen Grundfläche, so ist, wenn die Axe des Kegels die Axe der z vorstellt, die bekannte Gleichung des Kegels:

$$z^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}, \tag{1}$$

$$z = Ax + By + C, \tag{2}$$

$$z = A'x + B'y + C'. \tag{3}$$

(2) und (3) seien die beiden gegebenen Schnittebenen.

Haben C und C' entgegengesetzte Zeichen, so liegen die beiden Schnittebenen auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels. Sind wir im Stande, die Inhalte der beiden Kegel zu bestimmen, welche (2) und (3) einzeln von (1) abschneiden, so gibt die Differenz oder die Summe derselben den gesuchten Rauminhalt, je nachdem C und C' gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Zur Bestimmung der beiden Kegel bedienen wir uns des folgenden Lehrsatzes: Jede ein zweitheiliges Hyperboloid berüh-

rende Ebene schneidet von dessen Asymptotenfläche Kegel von constantem Inhalt ab $=\frac{1}{3}abc\pi$, wenn a, b, c die Halbaxen der Fläche sind. (S. meine Abhandlung im Archiv, Thl. XXVII. p. 476 und Thl. XXVIII. p. 92.)

Sind a, b, c die Halbaxen eines solchen Hyperboloides, welches den Kegel (1) zum Asymptotenkegel hat und die Ebene (2) berührt, so müssen nach den Lehren der analytischen Geometrie folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$(4)\qquad a=\alpha c,\quad b=\beta c,\quad C^2=c^2-a^2A^2-b^2B^2,$$

wodurch a, b, c bestimmt werden. So wird

$$(5)\qquad c^2=\frac{C^2}{1-\alpha^2A^2-\beta^2B^2},$$

folglich der Inhalt des Kegels, welchen die Ebene (2) von der Fläche (1) abschneidet, weil $abc=\alpha\beta c^3$ ist:

$$(6)\qquad V=\tfrac{1}{3}\alpha\beta c^3\pi;$$

ebenso findet man für die zweite Schnittebene und den zweiten Kegel:

$$(7)\qquad c'^2=\frac{C^2}{1-\alpha^2A'^2-\beta^2B'^2},$$

$$(8)\qquad V'=\tfrac{1}{3}\alpha\beta c'^3\pi;$$

und der gesuchte Inhalt ist daher:

$$(9)\qquad V-V'=\frac{\alpha\beta\pi}{3}(c^3-c'^3),$$

so dass nur c und c' nach (5) und (7) zu rechnen sind und ihre Vorzeichen übereinstimmen mit jenen von C und C'.

Anmerkung.

Wie man sieht, gibt die vorstehende Auflösung nur dann reelle Resultate, wenn $1-\alpha^2A^2-\beta^2B^2>0$, $1-\alpha^2A'^2-\beta^2B'^2>0$; diess sind aber auch zugleich die analytischen Bedingungen, dass die gegebenen Ebenen den Kegel in Ellipsen schneiden, wovon man sich leicht auf folgende Art überzeugt.

Legen wir durch den Scheitel eine zur gegebenen Ebene $z=Ax+By+C$ parallele Ebene, so ist $z=Ax+By$ ihre Gleichung. Der Schnitt dieser mit dem Kegel muss in geraden Linien

erfolgen, soll die erste Ebene den Kegel in einer Hyperbel oder Parabel schneiden oder, analytisch betrachtet, die Gleichung:

$$(Ax+By)^2 - \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) = 0$$

muss so beschaffen sein, dass ihr erster Theil in zwei reelle Factoren des 1ten Grades in Bezug auf x und y zerlegt werden kann. Wird die Gleichung geordnet, so steht:

$$(10) \quad \beta^2(\alpha^2 A^2 - 1)x^2 + 2\alpha^2\beta^2 ABxy + \alpha^2(\beta^2 B^2 - 1)y^2 = 0.$$

Damit die Zerfällung dieses Trinoms in zwei reelle Factoren des ersten Grades stattfinden kann, muss

$$(2\alpha^2\beta^2 AB)^2 > 4\beta^2(\alpha^2 A^2 - 1) . \alpha^2(\beta^2 B^2 - 1)$$

sein, woraus mit Leichtigkeit folgt:

$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 - 1 > 0.$$

Ist diese Grösse gleich Null, so ist (10) ein vollständiges Quadrat, obige Gleichung repräsentirt nur eine Gerade und der Schnitt der Ebene $z = Ax + By + C$ ist eine Parabel. Für die Ellipse als Schnitt bleibt noch die Bedingung

$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 - 1 < 0.$$

XVII.

Eine Aufgabe aus der Hydraulik.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Ein Körper besteht aus einem senkrechten Kreiszylinder vom Halbmesser r und der Höhe h, und daran ist befestigt ein Kegel von demselben Halbmesser und der Höhe h'. Der Zylinder ist innen zum Theil ausgehöhlt, so dass die Höhlung abermals einen senkrechten Kreiszylinder, mit derselben Axe wie der erste, bildet. Der Stoff des Körpers ist zwar spezifisch schwerer als Wasser, allein wegen der Höhlung schwimmt das Ganze doch im Wasser. Man bringt nun diesen Körper unter Wasser und überlässt ihn sich selbst, ohne ihm eine Anfangsgeschwindigkeit zu ertheilen. Man soll seine aufsteigende Bewegung untersuchen.

Sei S der Kubikinhalt des ganzen Zylinders, nS der Höhlung, wo also $n<1$; μ das Gewicht der Kubikeinheit des Stoffes; α das der Kubikeinheit des Wassers; s der Kubikinhalt des Kegels; g die Beschleunigung der Schwere; P das Gewicht des (ausgehöhlten) Körpers; p das Gewicht der durch ihn verdrängten Wassermasse. Alsdann ist:

$$S=r^2\pi h,\quad s=\tfrac{1}{3}r^2\pi h',\quad P=(1-n)S\mu+s\mu,\quad p=(S+s)\alpha,$$

natürlich Letzteres nur insoferne, als der ganze Körper untergetaucht ist.

Sei H der Abstand des Schwerpunkts des schwimmenden Körpers von der Kegelspitze; x der Abstand dieses Schwerpunkts zur Zeit t von seiner anfänglichen Lage. Die Gleichung der Bewegung ist:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=p-P-kv^2, \qquad (1)$$

wenn v die Geschwindigkeit zur Zeit t und k ein gewisser Koeffizient ist.

Was diesen letzteren anbelangt, so bestimmt er sich (Scheffler: Prinzipien der Hydrostatik und Hydraulik, II., p. 142.) in folgender Weise. Sei $\Delta\xi$ ein Element der Projektion der Kegelfläche auf seine Grundfläche, d. h. die Projektion eines Elements dieser Fläche auf die Grundfläche; φ der Neigungswinkel der erzeugenden Geraden gegen die Axe, so ist $k=1{\cdot}25\alpha.\Sigma\sin\varphi\Delta\xi$, wo das Summenzeichen sich auf den eingetauchten Theil des Kegels bezieht. Da φ konstant, so ist $k=1{\cdot}25\alpha\sin\varphi\xi$, wenn ξ die Projektion des eingetauchten Theils auf die Grundfläche.

So lange also der ganze Kegel noch unter Wasser sich befindet, ist $k=1{\cdot}25\alpha\sin\varphi r^2\pi$; ist aber ein Theil des Kegels bereits über Wasser und ist dessen Höhe $=z$ $(z<h')$, so ist ξ ein Ring, dessen Halbmesser gleich r und $z\operatorname{tg}\varphi$ sind, so dass jetzt

$$k=1{\cdot}25\alpha\pi\sin\varphi\,(r^2-z^2\operatorname{tg}^2\varphi)$$

ist, wo $z \overline{\overline{<}} h'$.

Die Gleichung (1), so lange der Kegel noch unter Wasser sich befindet, liefert, wenn

$$\frac{p-P}{P}g=a^2,\quad \frac{gk}{P}=b^2;\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=a^2-b^2v^2,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=a^2-b^2v^2:$$

$$\int\frac{\partial v}{a^2-b^2v^2}=t+C,\quad \frac{1}{2ab}\,l\left(\frac{a+bv}{a-bv}\right)=t+C,\quad C=0,$$

da $v=0$, wenn $t=0$:

$$\frac{a+bv}{a-bv}=e^{2abt},\quad v=\frac{a}{b}\cdot\frac{e^{abt}-e^{-abt}}{e^{abt}+e^{-abt}}. \qquad (2)$$

Also:

$$x=\frac{a}{b}\int_0^t\frac{e^{abt}-e^{-abt}}{e^{abt}+e^{-abt}}\partial t=\frac{1}{b^2}\,l\left(\frac{e^{abt}+e^{-abt}}{2}\right). \qquad (3)$$

Gesetzt nun, die Tiefe des Wasserspiegels über der anfänglichen Lage des Schwerpunkts sei E, so werden die Gleichungen (2) und (3) nur gelten, so lange noch $x<E-H$, da für $x=E-H$ die Kegelspitze an die Oberfläche tritt, also k nicht mehr dasselbe bleibt. Zugleich muss man übrigens auch bemerken, dass

während dieser Bewegung v nie negativ werden darf, da, so bald $v=0$ wird, alle Bewegung aufhört. Aus (2) ergibt sich aber offenbar, dass v für alle t positiv ist. Für $t=\infty$ würde $v=\frac{a}{b}$ und dann $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0$, so dass auch der Widerstand des Wassers nie grösser wird als der Auftrieb.

Sei τ der Werth von t für $x=E-H$, so ist:

$$b^2(E-H)=l\left(\frac{e^{ab\tau}+e^{-ab\tau}}{2}\right),\quad e^{ab\tau}=e^{b^2(E-H)}+\sqrt{e^{2b^2(E-H)}-1},$$

$$\tau=\frac{1}{ab}l[e^{b^2(E-H)}+\sqrt{e^{2b^2(E-H)}-1}]. \tag{4}$$

Die alsdann bestehende Geschwindigkeit sei V, so ist:

$$V=\frac{a}{b}\cdot\frac{e^{ab\tau}-e^{-ab\tau}}{e^{ab\tau}+e^{-ab\tau}}. \tag{4'}$$

Von jetzt an, bis x zu $E+h'-H$ geworden, verhalten sich die Dinge anders. Sei nämlich die Kegelspitze nach der Zeit t, von τ an gerechnet, um z ausserhalb des Wassers, so ist der Kubikinhalt des eingetauchten Körpers nur noch $S+s-\frac{z^3\operatorname{tg}^2\varphi}{3}\pi$, also das Gewicht der verdrängten Wassermasse

$$=(S+s-\frac{z^3\pi}{3}\operatorname{tg}^2\varphi)\alpha=p-\frac{\alpha z^3\pi}{3}\operatorname{tg}^2\varphi,$$

wenn p den vorigen Werth hat; die vorige Grösse k ist jetzt

$$1{\cdot}25\alpha\pi\sin\varphi(r^2-z^2\operatorname{tg}^2\varphi)=k-1{\cdot}25\alpha\pi\frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}z^2,$$

so dass, wenn x von dem vorigen Anfangspunkte gerechnet wird, wo also $x=E-H+z$:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=p-P+\frac{\alpha\pi\operatorname{tg}^2\varphi}{3}(E-H-x)^3$$
$$-[k-1{\cdot}25\alpha\pi\sin\varphi\operatorname{tg}^2\varphi(E-H-x)^2]\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2.$$

Setzt man $x=E-H+z$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2-\frac{\alpha\pi\operatorname{tg}^2\varphi}{3}\cdot\frac{g}{P}z^3-[b^2-1{\cdot}25\alpha\sin\varphi\operatorname{tg}^2\varphi\frac{g}{P}z^2]\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2,$$

was wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 - c^2 z^3 - (b^2 - f^2 z^2)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2. \tag{5}$$

Diese Gleichung muss nach dem in meiner **Differential- und Integralrechnung** (II. Aufl.) §. 118, II. integrirten Muster behandelt werden. Setzt man $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = y$, so ergibt sich:

$$\frac{\partial y}{\partial z} + 2(b^2 - f^2 z^2)y - (a^2 - c^2 z^3) = 0,$$

$$y = e^{-2(b^2 z - \frac{f^2 z^3}{3})}\left[C + \int (a^2 - c^2 z^3)\, e^{2(b^2 z - \frac{f^2 z^3}{3})}\partial z\right],$$

wo C aus der Bedingung zu bestimmen ist, dass $y = V^2$, wenn $z = 0$, so dass

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = e^{-2(b^2 z - \frac{f^2 z^3}{3})}\left[V^2 + \int_0^z (a^2 - c^2 z^3)\, e^{2(b^2 z - \frac{f^2 z^3}{3})}\partial z\right].$$

Die Geschwindigkeit V_1, welche im Augenblicke stattfindet, wenn der ganze Kegel aus dem Wasser getreten ist, wird hiernach aus der Gleichung

$$V_1^2 = e^{-2(b^2 h' - \frac{f^2 h'^3}{3})}\left[V^2 + \int_0^{h'} (a^2 - c^2 z^3)\, e^{2(b^2 z - \frac{f^2 z^3}{3})}\partial z\right] \tag{6}$$

erhalten. In der Unmöglichkeit, dieses Integral zu ermitteln, wollen wir eine Näherungsrechnung durchführen. In der Gleichung (5) nämlich wollen wir statt der veränderlichen Koeffizienten ihre mittleren Werthe (a. a. O. §. 39., IV.) einführen, also statt derselben setzen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{h'}\int_0^{h'} \left[a^2 - \frac{\alpha\pi \operatorname{tg}^2\varphi}{3}\cdot\frac{g}{P} z^3\right]\partial z$$
$$- \frac{1}{h'}\int_0^{h'} \left[b^2 - 1{\cdot}25\alpha \sin\varphi \operatorname{tg}^2\varphi \frac{g}{P} z^2\right]\partial z \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2.$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 - \frac{\alpha\pi \operatorname{tg}^2\varphi}{12}\cdot\frac{g}{P}h'^3 - \left[b^2 - \frac{1{\cdot}25\alpha \sin\varphi \operatorname{tg}^2\varphi g h'^2}{3P}\right]\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2,$$

oder zur Abkürzung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = A - B\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2, \quad A = a^2 - \frac{\alpha\pi \operatorname{tg}^2\varphi g h'^3}{12P},$$
$$B = b^2 - \frac{1{\cdot}25\alpha \sin\varphi \operatorname{tg}^2\varphi g h'^2}{3P}. \tag{7}$$

Wir wollen annehmen, es fallen A und B noch positiv aus. Alsdann ist für $\frac{\partial z}{\partial t}=v$:

$$\frac{1}{2\sqrt{AB}}l\left(\frac{A+Bv}{A-Bv}\right)=t+C,\quad C=\frac{1}{2\sqrt{AB}}l\left(\frac{A+BV}{A-BV}\right).$$

Würde man die Gleichung (7) behandeln, wie oben die Gleichung (5), so ergäbe sich für $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=y$:

$$\frac{\partial y}{\partial z}=2A-2Bz,\quad y=Ce^{-2Bz}+\frac{A}{B},$$

und da $y=V^2$ für $z=0$:

$$y=(V^2-\frac{A}{B})e^{-2Bz}+\frac{A}{B},$$

so dass also, wenn V_1 wieder die Bedeutung wie oben hat:

$$V_1^2=(V^2-\frac{A}{B})e^{-2Bh'}+\frac{A}{B}. \tag{8}$$

Dann ist weiter, da $\frac{\partial z}{\partial t}>0$:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\sqrt{(V^2-\frac{A}{B})e^{-2Bz}+\frac{A}{B}},\quad \int_0^z\frac{\partial z}{\sqrt{(V^2-\frac{A}{B})e^{-2Bz}+\frac{A}{B}}}=t,$$

da $t=0$ für $z=0$,

$$\frac{1}{2\sqrt{AB}}l\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(BV^2-A)e^{-2Bz}+A}}{\sqrt{A}-\sqrt{(BV^2-A)e^{-2Bz}+A}}\cdot\frac{\sqrt{A}-V\sqrt{B}}{\sqrt{A}+V\sqrt{B}}\right)=t.$$

Ist τ' die Zeit des Aufsteigens des Kegels, so ist also:

$$\tau'=\frac{1}{2\sqrt{AB}}l\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(BV^2-A)e^{-2Bh'}+A}}{\sqrt{A}-\sqrt{(BV^2-A)e^{-2Bh'}+A}}\cdot\frac{\sqrt{A}-V\sqrt{B}}{\sqrt{A}+V\sqrt{B}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AB}}l\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(BV^2-A)e^{-2Bh'}+A}}{\sqrt{A}+V\sqrt{B}}e^{2Bh'}\right). \tag{9}$$

Da V_1^2 aus (8) positiv ist, weil $\frac{A}{B}-\frac{A}{B}e^{-2Bh'}$ in dieser Lage, so wird der Körper sich ferner nach oben bewegen. Jetzt übt aber das Wasser keinen Widerstand mehr aus, wenn wir von der geringen Reibung absehen.

Sei nun wieder z die Höhe, bis zu welcher, nach der Zeit t von τ' aus gerechnet, der Zylinder aufgestiegen. Dann ist $x = E + z + h' - H$; die verdrängte Wassermasse wiegt noch $(S - r^2\pi z)\alpha$, so dass jetzt:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (S - r^2\pi z)\alpha - P = S\alpha - P - r^2\pi\alpha z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{r^2\pi\alpha g}{P} z + g - \frac{S\alpha g}{P} = 0.$$

Hieraus (a. a. O. §. 103, II.):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = V_1^2 - \left(\frac{r^2\pi\alpha g}{P} z^2 + 2gz - \frac{2S\alpha g}{P} z\right), \tag{10}$$

da für $z = 0$ sein muss $\frac{\partial z}{\partial t} = V_1$. Die zweite Seite dieser Gleichung, die für $z = 0$ gleich V_1^2 ist, darf nie negativ werden. Ist also

$$V_1^2 - \left(\frac{r^2\pi\alpha g}{P} h^2 + 2gh - \frac{2S\alpha g}{P} h\right) > 0,$$

so wird der ganze Zylinder sich aus dem Wasser heben und im Augenblicke des Austritts eine Geschwindigkeit

$$\sqrt{V_1^2 - \left(\frac{r^2\pi\alpha g}{P} h^2 + 2gh - \frac{2S\alpha g}{P} h\right)}$$

haben. Ist aber

$$V_1^2 - \left(\frac{r^2\pi\alpha g}{P} h^2 + 2gh - \frac{2S\alpha g h}{P}\right) < 0,$$

so hat man den Werth von z zu suchen, für den

$$V_1^2 = \frac{r^2\pi\alpha g}{P} z^2 + 2gz - \frac{2S\alpha g z}{P}, \tag{11}$$

und es wird der Zylinder nur bis zu dieser Höhe sich aus dem Wasser heben und darauf zurücksinken. Sei Letzteres etwa der Fall und ζ der fragliche Werth, so ist die Zeit τ'' des letzten Aufsteigens gegeben durch die Formel:

$$\tau'' = \int_0^\zeta \frac{\partial z}{\sqrt{\left[V_1^2 - \frac{r^2\pi\alpha g}{P} z^2 - 2gz + \frac{2S\alpha g z}{P}\right]}}, \tag{12}$$

so dass die Gesammtzeit der Bewegung $\tau + \tau' + \tau''$ ist. Die letzte Erhebung des Schwerpunkts über seine anfängliche Lage wäre $E + \zeta + h' - H$.

Von da an wäre nun die Gleichung der Bewegung, wenn jetzt die x von dieser Lage aus gerechnet werden:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=P-p'-1{\cdot}25\alpha\frac{r^2\pi}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

wo p' das Gewicht des aus der Stelle verdrängten Wassers. Wir wollen jedoch dies hier nicht weiter verfolgen, da es nach dem Obigen verhältnissmässig leicht durchführbar wäre.

Die Aufgabe selbst, wie sie uns gestellt wurde, enthielt die Zeit des Aufsteigens als gegeben und suchte den Werth von n. Begnügen wir uns mit (4) und setzen dort $H=0$, so ist:

$$\tau=\frac{1}{ab}\,l\left(e^{b^2 E}+\sqrt{e^{2b^2 E}-1}\right),$$

woraus, wenn man a und b einsetzt, durch Näherungsmethoden n zu suchen wäre.

XVIII.

Ueber die permanente Gestalt einer mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine Axe rotirenden Flüssigkeit.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Wir nehmen an, eine (ungleichartige) Flüssigkeit rotire mit der unveränderlichen Winkel-Geschwindigkeit α um eine feste Axe, die zur Axe der z gewählt werde. Die Gestalt der Oberfläche, so wie die relative Lage der inneren Theile sei permanent, während auf diese nur die Kräfte der gegenseitigen Anziehungen wirken.

Sei für einen Punkt (x, y, z) die Grösse V das Potential der Masse, so dass die auf den Punkt wirkenden (auf die Gewichtseinheit bezogenen Seiten-) Kräfte sind: $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$; die Seitengeschwindigkeiten desselben Punktes sind $-\alpha y$, αx, 0, wenn man die Rotation in dem Sinne: Axe der x gegen Axe der y, rechnet.

Daraus ergeben sich (meine „Integration der partiellen Differential-Gleichungen“, §. 26, I.):

$$\frac{g}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=g\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha^2 x,\quad \frac{g}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}=g\frac{\partial V}{\partial y}+\alpha^2 y,\quad \frac{g}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}=g\frac{\partial V}{\partial z};\quad (1)$$

wo ϱ die Dichte (= Gewicht der Kubikeinheit) in dem Punkte (x, y, z), p der dort herrschende Druck ist. Daneben besteht die Gleichung [a. a. O. §. 25., III., (6)]:

$$-y\frac{\partial \varrho}{\partial x}+x\frac{\partial \varrho}{\partial y}=0,\quad (2)$$

da sicher ϱ die Grösse t (Zeit) nicht entwickelt enthalten kann, sobald ein permanenter Zustand eingetreten.

Aus (2) ergibt sich (a. a. O. §. 4.):

$$\varrho=f(x^2+y^2, z),\quad (3)$$

d. h. ϱ ist nothwendig eine Funktion von x^2+y^2 und z, bleibt also dasselbe für Punkte, die in derselben auf der Rotationsaxe senkrechten Ebene liegen und denselben Abstand von derselben haben.

Die Gleichungen (1) heissen auch:

$$\frac{g}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[gV+\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2)\right],\quad \frac{g}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[gV+\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2)\right],$$

$$\frac{g}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[gV+\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2)\right].\quad (4)$$

Hieraus folgt, nach einem Satze, den wir zum Schlusse beweisen wollen, dass p und ϱ Funktionen von $gV+\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2)$ sind. Da nun nach (3) ϱ nur Funktion von x^2+y^2 und z sein kann, x^2+y^2 in dieser Lage auch ist, so muss V bloss Funktion von x^2+y^2 und z sein, d. h. man hat nothwendig auch

$$V=F(x^2+y^2, z),\quad (5)$$

so dass also ϱ, p, V nur unter den Formen $\varphi(x^2+y^2, z)$ erscheinen.

Sobald $gV + \frac{\alpha^2}{2}(x^2 + y^2)$ konstant ist, sind auch p und ϱ, als Funktionen dieser Grösse, konstant und sonst nicht. In der Fläche

$$gV + \frac{\alpha^2}{2}(x^2 + y^2) = C, \qquad (6)$$

wo C eine (beliebige) Konstante, herrscht also immer und überall derselbe Druck und dieselbe Dichte; lässt man C eine Reihe von Werthen durchlaufen, so erhält man eine Reihe solcher Flächen, in denen Druck und Dichte nur von Fläche zu Fläche sich ändern.

Die Fläche (6) ist, wegen (5), nothwendig eine Rotationsfläche mit der Axe der z als Rotationsaxe. Daraus folgt, dass alle Flächen von gleichem Druck (und gleicher Dichte) nothwendig Rotationsflächen sind, entstanden durch Rotation einer Kurve um die Axe, um welche die Flüssigkeit rotirt. Ist hiernach der Druck auf die freie Oberfläche ein konstanter (für alle Punkte derselbe), so ist diese Oberfläche nothwendig eine Rotationsfläche.

Setzen wir den letzten Fall, so ordnet sich hiernach von aussen nach innen die Flüssigkeit von selbst in Schichten von gleicher Dichte, die sämmtlich Rotationsflächen sind. Die Gleichungen der Kurven, durch deren Rotation diese Flächen entstanden, sind:

$$gF(x^2, z) + \frac{\alpha^2}{2}x^2 = C, \qquad (6)$$

wo F die Bedeutung von (5) hat.

Die Ermittlung der Gestalt der Oberfläche selbst ist mit Hilfe dieser Gleichungen kaum möglich, da der Werth von V sich erst berechnen lässt, wenn man die Gestalt kennt. Der Fall, da die Oberfläche nahezu eine Kugel ist, wurde von Laplace (Mécanique céleste) behandelt; eine im Allgemeinen klare Darstellung dieser Untersuchungen enthält auch der „Treatise on Attractions“ von Pratt (Cambridge, 1860).

Beweis des angeführten Hilfssatzes.

Seien p, φ, ϱ Funktionen von x, y, z, so beschaffen, dass

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (7)$$

Man setze $\varphi(x, y, z) = \mu$, ziehe hieraus z als Funktion von x, y, μ

und führe diesen Werth in ϱ ein, wodurch $\varrho = f(x, y, \mu)$ werde. Alsdann ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}. \tag{8}$$

Nun folgt aus (7):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z};$$

woraus

$$\frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varrho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varrho}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Setzt man aus (8) hier ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \frac{\partial \mu}{\partial z};$$

d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Da nun $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ nicht Null ist, weil φ nothwendig z enthält, so folgt aus (9):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

d. h. f enthält bloss μ, oder es ist ϱ bloss eine Funktion von φ. Alsdann ist:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

mithin

$$p = \int f(\varphi) \partial \varphi,$$

d. h. auch p ist eine Funktion nur von φ.

XIX.

Die Periode der forstlichen Haubarkeit.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Ein Wald werde jetzt angelegt. Die Holzzuwächse, die er im Laufe des ersten, zweiten,...., $n$ten Jahres erhält, seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$, so dass also am Schlusse des $n$ten Jahres der Holzbestand $= z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ ist, wenn wir den anfänglichen Satz nicht beachten oder mit in z_1 einrechnen. Die Grössen $z_1, z_2, \ldots$ bilden eine Reihe, die anfänglich steigt, ein Maximum erreicht und dann fällt.

Denken wir uns nun, von Anfang an gerechnet sei die Zeit t verflossen; z eine Funktion von t, so beschaffen, dass, wenn der Wald in der Zeit 1 (= ein Jahr) genau in derselben Weise fortwüchse, wie er es zur Zeit t thut, die Zunahme in dieser Zeiteinheit $= z$ wäre. In der unendlich kleinen Zeit Δt, die auf t folgt, beträgt hiernach der Zuwachs wirklich $z\Delta t$, da man für diese Zeit z als konstant anzusehen hat; ist $z = f(t)$, so hat man also, wenn T den Bestand zur Zeit t bezeichnet:

Bestand zur Zeit $t + \Delta t$: $T + f(t)\Delta t$,

„ „ „ $t + 2\Delta t$: $T + f(t)\Delta t + f(t+\Delta t)\Delta t$,

„ „ „ $t + 3\Delta t$: $T + f(t)\Delta t + f(t+\Delta t)\Delta t + f(t+2\Delta t)\Delta t$,

u. s. w.

Daraus folgt ganz von selbst, dass der Bestand zur Zeit $t + \tau$ sein werde:

$$T + \int_t^{t+\tau} z\partial t, \qquad (1)$$

Demnach ist der Zuwachs in der Zeit τ (von t an gerechnet) gleich $\int_t^{t+\tau} z\partial t$. Daraus folgt, dass

$$z_1 = \int_0^1 z\partial t, \quad z_2 = \int_1^2 z\partial t, \ldots.$$

Ist A der anfängliche Satz, den wir ganz wohl besonders hervorheben können, so ist hiernach der Bestand am Ende der Zeit t, von Anfang an gerechnet:

$$A + \int_0^t z\partial t. \tag{2}$$

Will man den mittleren Werth von z für die Zeit t haben, so ist derselbe (meine Diff. u. Integr. §. 39., IV.):

$$Z = \frac{1}{t}\int_0^t z\partial t. \tag{3}$$

Ist z der laufende Zuwachs, Z also der mittlere, so ergibt sich aus (3), d. h. aus der Bedeutung des Begriffs eines mittleren Werthes, dass der Waldbestand am Ende der Zeit t thatsächlich derselbe sein würde, wenn z beständig $= Z$ gewesen wäre, wie wenn z die oben gemeinte Funktion von t ist.

Wir wollen uns nun die Frage stellen, wann Z ein Maximum sei. Alsdann ist:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0, \text{ d. h. } -\frac{1}{t^2}\int_0^t z\partial t + \frac{z}{t} = 0, \text{ also } z = \frac{1}{t}\int_0^t z\partial t. \tag{4}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass Z dann ein Maximum sei, wenn der laufende Zuwachs dem mittleren gleich ist (natürlich letzterer bis zur betreffenden Zeit gerechnet). Zugleich ist

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{2}{t^3}\int_0^t z\partial t - \frac{2z}{t^2} + \frac{1}{t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

wegen (4). So lange z wächst mit t, ist immer das letzte z das grösste; man hat also noch nicht einmal das grösste z, viel weniger das grösste Z erreicht; daraus folgt, dass für unseren Fall nothwendig z abnimmt, mithin $\frac{\partial z}{\partial t} < 0$, also Z wirklich ein Maximum ist, was freilich eines Beweises kaum bedarf.

Schlägt man nun den Wald zur Zeit, da Z ein Maximum ist,

pflanzt ihn wieder neu an u. s. w., so erhält man Hauperioden, in denen jeweils das mittlere Jahreserträgniss das grösste ist.

Dass aber bei solcher Bewirthschaftung wirklich das Erträgniss ein grösstes ist, kann man auch in folgender Art einsehen.

Sei k eine lange Zeit, während der der Wald mehrfach gehauen und wieder neu angepflanzt wurde. Die Periode einer solchen Aenderung sei τ, so dass also der Wald in der Zeit k im Ganzen $\frac{k}{\tau}$-mal abgehauen wurde (k ein Vielfaches von τ). Das Erträgniss jeder einzelnen Periode ist $\int_0^\tau z\partial t$, wenn wir vom anfänglichen Baumsatze absehen; also ist es für die Zeit k gleich $\frac{k}{\tau}\int_0^\tau z\partial t$, und wird ein Maximum, wenn τ so gewählt ist, dass $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau z\partial t$ ein Maximum ist. Dies ist aber unsere obige Auflösung.

Unsere Auflösung fällt zusammen mit derjenigen der folgenden Aufgabe.

Sei ABC eine Kurve, welche in A durch den Koordinatenanfang geht und von da an (nach der Richtung der positiven x) über der Abszissenaxe bleibt. Man konstruirt von A aus eine zweite Kurve so, dass die Ordinaten der letzteren je die mittleren Werthe sind aller Ordinaten der ersteren (bis zu dem betreffenden Punkte). Wann erreicht die Ordinate der zweiten Kurve ihr Maximum?

Die Auflösung ergibt, dass dies im Durchschnittspunkte beider Kurven stattfindet.

XX.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

In den meisten Lehrbüchern wird ausgesprochen, dass die Grösse $\int \Sigma mvds$ ein Minimum sei, wenn das Integral zwischen zwei festen Gränzen genommen sei, v die Geschwindigkeit, ds das Element der Bahn, m die Masse bedeute und Σ sich auf alle materiellen Punkte des Systems beziehe. Man vergleiche etwa: Poisson, Mechanik, §. 160.; Duhamel, Mechanik, II., §. 76.; Sturm, Cours de Mécanique, II., §. 641., obgleich bereits Lagrange, Mécanique analytique, IIIme édition, pag. 281. darauf aufmerksam macht, dass es eigentlich $=\int \Sigma mv^2dt$ sei, was übrigens Poisson a. a. O. §. 573. wiederholt.

Da mir ein Beweis, der einfach auf die Regeln der Variationsrechnung zurückgeht, nicht bekannt ist, da Stegmann (Variationsrechnung, pag. 413.) nur einen einzelnen Fall betrachtet und die Sache ohnehin nicht allgemein darstellt, so mögen die nachstehenden Betrachtungen vielleicht nicht unerwünscht sein.

1.

Im Archiv, Thl. XVIII. habe ich nach Vieille gezeigt, wie die Gleichungen der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten auf die von Lagrange aufgestellte Form (a. a. O. p. 291.) gebracht werden können. Ich habe diese Gleichungen in anderer Form abgeleitet in meiner Schrift über die Integration der partiellen Differentialgleichungen §. 10., IV., indem ich der Darstellung gefolgt bin, welche Bertrand in der sechsten Note zu seiner Ausgabe der Mécanique analytique eingehal-

ten. Es mag mir hier gestattet sein, mich auf meine Schrift zu beziehen.

Darnach hat man das Folgende als erwiesen anzusehen:

Seien m materielle Punkte zu einem System vereinigt; die (rechtwinkligen) Koordinaten des $r$ten Punktes seien x_r, y_r, z_r; die Seitenkräfte der auf ihn wirkenden Kraft (Vereinigung aller Einzelkräfte) X_r, Y_r, Z_r; es bestehen ferner zwischen den $3m$ Koordinaten die Gleichungen:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_\mu = 0; \tag{1}$$

wo natürlich $\mu < 3m$, die F aber t entwickelt enthalten können. Mittelst der (1) drücke man μ der Koordinaten durch die $3m - \mu = n$ übrigen aus, oder überhaupt drücke man die $3m$ Koordinaten durch n neue Grössen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \quad (n = 3m - \mu) \tag{2}$$

aus, so werden zwischen den ξ keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen, wenn man begreiflich bei dieser Auflösung die Gleichungen (1) beachtete und sich noch n weitere Gleichungen gab.

Setzt man

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi', \quad Q_s = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \left(X_\varrho \frac{\partial x_\varrho}{\partial \xi_s} + Y_\varrho \frac{\partial y_\varrho}{\partial \xi_s} + Z_\varrho \frac{\partial z_\varrho}{\partial \xi_s}\right), \tag{3}$$

so sind die Gleichungen zur Bestimmung der Grössen (2), also zur Bestimmung der Bewegung des Systems:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_r} - Q_r = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n; \tag{4}$$

wo

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} M_\varrho (x_\varrho'^2 + y_\varrho'^2 + z_\varrho'^2), \tag{5}$$

M_ϱ die Masse des ϱten Punktes, also T die lebendige Kraft des Systems ist.

Ist V eine Funktion der Koordinaten x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ, ohne die Geschwindigkeiten x_ϱ', y_ϱ', z_ϱ', und zugleich:

$$X_\varrho = \frac{\partial V}{\partial x_\varrho}, \quad Y_\varrho = \frac{\partial V}{\partial y_\varrho}, \quad Z_\varrho = \frac{\partial V}{\partial z_\varrho}; \tag{6}$$

so ist

$$Q_s = \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_\varrho} \cdot \frac{\partial x_\varrho}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_\varrho} \cdot \frac{\partial y_\varrho}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_\varrho} \cdot \frac{\partial z_\varrho}{\partial \xi_s}\right) = \frac{\partial V}{\partial \xi_s}, \tag{7}$$

und die (4) werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_r'}\right)-\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_r}=0, \tag{4'}$$

wo durch d die vollständigen, durch ∂ die partiellen Differenzirungen bezeichnet sind. V heisst bekanntlich die Kräftefunktion, auch wohl das Kräftepotential.

Die Voraussetzungen, welche zu (4') geführt, sollen im Folgenden wesentlich festgehalten werden, und es gilt Alles nur unter denselben.

2.

Seien a und b zwei Werthe der Zeit t ($b > a$); seien ferner für diese Augenblicke die ξ und ξ' als fest angesehen, so behaupte ich, dass

$$\int_a^b (T+V)dt \tag{8}$$

den Bedingungen des Maximums oder Minimums genügt *).

Denn es ist $T+V$ eine Funktion von ξ_1 und ξ_1', ξ_2 und ξ_2', ..., ξ_n und ξ_n', indem natürlich in T und V die Grössen x, y, z: x', y', z' durch ihre Werthe in ξ, ξ' ersetzt sind; ferner sind an den Gränzen des Integrals die Werthe von ξ, ξ' unveränderlich, die Aenderungen derselben also Null. Demnach führt die Variationsrechnung (Stegmann, pag. 197.) unmittelbar zu folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_1'}=0, \ldots, \frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_n}-\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_n'}=0,$$

die aber, da V von den ξ' frei ist, indem V anfänglich nur x, y, z enthielt und diese sich nur durch ξ ausdrücken, ganz unmittelbar die (4') sind. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Dies setzt übrigens voraus, dass alle andere Funktionen, die man bei den Variationen mit den ξ vergleicht, dieselben Anfangs- und Endwerthe haben wie ξ und ξ'; dass ferner die Gleichungen (1) die Geschwindigkeiten nicht enthalten und dass auch V in dieser Lage sei.

Der hier bewiesene Satz ist die allgemeine Formel für das **Prinzip der kleinsten Wirkung**, und so ist wohl keine Un-

*) Ob es wirklich ein Minimum sei, bleibe unentschieden.

klarheit darin, obwohl vielleicht allerlei metaphysische Künsteleien davon wegfallen, die eben in der unklaren Fassung wurzeln. Es ist eine Folgerung aus den allgemeinen Sätzen und kein Prinzip, mag aber als Folgerung zuweilen von Nutzen sein, insofern namentlich der Satz (8) die Gleichungen (4') unmittelbar liefert, also dem Gedächtnisse zu Hilfe kommen kann.

3.

Enthalten die F in (1) die Zeit t nicht entwickelt, so ist natürlich T in derselben Lage; enthält dann weiter die V ebenfalls die Zeit nicht entwickelt, so kann man aus den (4') folgern:

$$\xi_r' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \xi_r'} - \xi_r' \frac{\partial T}{\partial \xi_r} = \xi_r' \frac{\partial V}{\partial \xi_r},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\xi_r' \frac{\partial T}{\partial \xi_r'}\right) - \xi_r'' \frac{\partial T}{\partial \xi_r'} - \xi_r' \frac{\partial T}{\partial \xi_r} = \xi_r' \frac{\partial V}{\partial \xi_r},$$

woraus

$$\frac{d}{dt}\left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \dots + \xi_n' \frac{\partial T}{\partial \xi_n'}\right) - \left(\xi_1'' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \dots + \xi_n'' \frac{\partial T}{\partial \xi_n'}\right)$$

$$- \left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \dots + \xi_n' \frac{\partial T}{\partial \xi_n}\right) = \xi_1' \frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \dots + \xi_n' \frac{\partial V}{\partial \xi_n},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \dots + \xi_n' \frac{\partial T}{\partial \xi_n'}\right) - \frac{dT}{dt} = \frac{dV}{dt}.$$

Aber nach (5) ist sicher T eine homogene Funktion der ξ' des zweiten Grades, da ja

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \xi_1' + \dots + \frac{\partial x}{\partial \xi_n} \xi_n', \text{ u. s. w.,}$$

so dass

$$\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \dots + \xi_n' \frac{\partial T}{\partial \xi_n'} = 2T,$$

und folglich:

$$2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dV}{dt}, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{dV}{dt},$$

$$T = V + C, \tag{9}$$

wenn C eine Konstante (nach t) ist. Die (9) wird als Prinzip der lebendigen Kräfte in der Mechanik aufgeführt, gilt aber natürlich nur unter den gemachten Voraussetzungen.

4.

Unter den Voraussetzungen des §. 3., d. h. der (9), wird die Grösse (8) zu

$$\int_a^b (T + T - C)\,dt = \int_a^b 2T\,dt - C(b-a),$$

und man kann also sagen, dass der Minimumwerth von $\int_a^b (T + V)\,dt$ in diesem Falle die oben angegebene Grösse sei.

Desshalb aber kann man nicht eigentlich sagen, es sei $\int_a^b 2T\,dt$ ein Minimum, da dazu die klare Bestimmung fehlt. Es ist — wie angegeben — $\int_a^b 2T\,dt - C(b-a)$ der Werth von $\int_a^b (T + T)\,dt$, und weiter Nichts.

Mit der obigen Darstellung mag freilich die Art Mystik, die an das „Prinzip der kleinsten Wirkung" sich geheftet, nicht recht verträglich sein. Es geht eben hier, wie in vielen anderen Fällen. Das berührte Prinzip in seiner wirklichen Fassung erscheint hiernach als eine jener in letzter Zeit wieder vielfach beliebten Künsteleien, Probleme der Mechanik als solche der Variationsrechnung erscheinen zu lassen.

XXI.

Ueber das Zusammenfallen des ordentlich gebrochenen und des ausserordentlich gebrochenen Strahls im einaxigen Kristalle der Richtung nach.

Von

dem Lehrer Herrn *C. Cavan*

am Königl. Pädagogium bei Züllichau.

Fällt ein Lichtstrahl auf die Schnittfläche eines einaxigen Kristalls, so wird er im Allgemeinen durch die Brechung in zwei Strahlen zerlegt, von denen der eine, der ordentlich gebrochene Strahl, in der Einfallsebene liegt und überhaupt alle Gesetze der gewöhnlichen Brechung befolgt, der andere, der ausserordentlich gebrochene Strahl, im Allgemeinen ausserhalb der Einfallsebene liegt. Sollen nun beide Strahlen der Richtung nach zusammenfallen, so muss der einfallende Strahl im Hauptschnitte liegen, d. h. in der durch die Hauptaxe des Kristalls senkrecht zur Schnittebene gelegten Ebene.

Es sei b die Geschwindigkeit der ordentlich gebrochenen Strahlen, a die Geschwindigkeit der ausserordentlich gebrochenen Strahlen, mit welcher sie sich rechtwinklig zur Hauptaxe im Kristalle fortpflanzen, wobei für a und b die Geschwindigkeit g des Lichts in dem vorhergehenden Medium die Einheit sein mag. Für den Fall des sogenannten negativen Kristalls, den wir zunächst nur berücksichtigen, ist $a > b$.

Zur Auffindung der Richtungen der gebrochenen Strahlen dient die Huyghens'sche Construction. Ist (Taf. III. Fig. 5.) KK' die Durchschnittsgerade der Kristallebene und des Hauptschnitts, OC die Richtung der Hauptaxe, SO ein im Hauptschnitte liegender und in O auf die Kristallebene fallender Lichtstrahl, so construire man um O als Mittelpunct mit dem Radius $OC = b$ einen Kreis, und mit den Halbaxen $OC = b$ und $OA = a$ eine Ellipse. (Die

Theile der Figur, die ausserhalb des Kristalls liegen, sind punctirt gezeichnet). Darauf ziehe man OE senkrecht OS und EF senkrecht OE, so dass $EF = g = 1$ ist, lege vom Puncte F aus die Tangenten FT und FT' an Kreis und Ellipse, so geben die Radien OT und OT' resp. die Richtung des ordentlich und des ausserordentlich gebrochenen Strahls an. Für unser Problem des Zusammenfallens müssen also OT und OT' dieselbe Richtung haben.

Sieht man vom einfallenden Strahle ab, dessen Richtung leicht aus der des ordentlich gebrochenen gefunden werden kann, so handelt es sich darum, wenn (Taf. III. Fig. 6.) ein Ellipse und Kreis gemeinsamer Durchmesser KK' gegeben ist, einen beiden Figuren gemeinsamen Durchmesser TT_1 zu finden, so dass die Tangenten in den Endpuncten T und T' sich auf KK' schneiden, oder umgekehrt.

Sind OC, d. h. die Richtung der Hauptaxe ausserhalb des Kristalls, und OA, d. h. die auf OC senkrechte und in den Kristall fallende Richtung, die Richtungen der positiven x- und y-Axe, $\angle AOK = \lambda$, mithin $90^\circ - \lambda$ der Neigungswinkel des Kristallschnitts gegen die Hauptaxe, $\angle AOT = \varphi$, mithin $90^\circ - \varphi$ die Neigung des gebrochenen Strahls gegen die Hauptaxe, so sind die Coordinaten des Punctes T':

$$\frac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}}, \quad \frac{ab\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}};$$

oder, wenn wir der Kürze halber $\sqrt{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2} = w$ setzen, wo w wesentlich positiv ist:

$$\frac{ab\cos\varphi}{w}, \quad \frac{ab\sin\varphi}{w}.$$

Die Coordinaten des Punctes T sind:

$$b\cos\varphi, \quad b\sin\varphi.$$

Die Gleichung der Tangente im Puncte T' der Ellipse ist demnach:

$$b^2x\cos\varphi + a^2y\sin\varphi = abw,$$

und die Gleichung der Tangente im Puncte T des Kreises:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = b.$$

Für die Coordinaten des Durchschnitts beider Tangenten hat man:

$$x = ab\frac{a-w}{(a^2-b^2)\cos\varphi}, \quad y = b\frac{aw-b^2}{(a^2-b^2)\sin\varphi}.$$

Wenn nun dieser Durchschnitt auf dem Durchmesser KK' liegen soll, dessen Glefchung ist $y = x\operatorname{tg}\lambda$, so muss sein:

$$aw - b^2 = a(a-w)\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\lambda,$$

woraus folgt:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{aw-b^2}{a(a-w)}\operatorname{ctg}\lambda,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{aw-b^2}{a(a-w)}\operatorname{cotg}\varphi.$$

Nun sind $\operatorname{ctg}\lambda$ und, wie man sich leicht überzeugt, $aw-b^2$ und $a-w$ positiv, folglich auch $\operatorname{tg}\varphi$ stets positiv, d. h. es kann Durchmesser TT_1 der verlangten Eigenschaft nur im ersten und dritten Quadranten geben. Es ist aber ersichtlich, dass, wenn z. B. der Radius OT der genannten Bedingung entspricht, auch seine Verlängerung OT_1 im dritten Quadranten genügt, so dass es für unser physicalisches Problem hinreichen würde, die Lösungen unserer Aufgabe für den ersten Quadranten aufzustellen und diejenigen, welche in den vom Kristalle nicht erfüllten Raum COK fallen, nach dem vom Kristalle erfüllten Raume $C'O'K'$ des dritten Quadranten zu übertragen. In diesem Falle müsste sich ergeben $\lambda < \varphi$, welcher Fall aber, wie man sich leicht überzeugen kann, nicht eintritt. Es giebt also nur Lösungen unserer physicalischen Aufgabe im ersten Quadranten.

Aus der Gleichung (2) ergiebt sich leicht:

$$\text{für } \varphi = 0 \text{ wird } \lambda = 90^0,$$
$$\text{„} \quad \varphi = 90^0 \text{ „} \quad \lambda = 90^0;$$

woraus hervorgeht, dass λ ein Minimum haben muss.

Um dieses Minimum, sowie zunächst den correspondirenden Werth des φ zu erhalten, setzen wir den Differentialquotienten von (2) gleich Null und erhalten:

$$-\frac{(aw-b^2)(a-w)}{\sin\varphi^2} + (a^2-b^2)\operatorname{ctg}\varphi\frac{dw}{d\varphi} = 0,$$

oder, da $\frac{dw}{d\varphi} = \frac{(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{w}$ ist:

$$-(aw-b^2)(a-w) + \frac{(a^2-b^2)\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{w} = 0,$$

oder, indem wir $\sin\varphi^2 = \frac{w^2 - b^2}{a^2 - b^2}$ substituiren,

$$(aw - b^2)(a - w)w - (a^2 - w^2)(w^2 - b^2) = 0,$$

oder

$$(a - w)(ab^2 - w^3) = 0.$$

Für $a - w = 0$ erhält man $\varphi = 90^0$, also grade das Maximum; für das Minimum hat man also:

$$w = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Aus $w = \sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}$ hat man $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{w^2 - b^2}{a^2 - w^2}}$, mithin für den dem Minimum von λ entsprechenden Werth des φ, den wir mit Φ bezeichnen,

$$\operatorname{tg}\Phi = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2b^4} - b^2}{a^2 - \sqrt[3]{a^2b^4}}},$$

für das Minimum von λ also, das wir mit Λ bezeichnen, aus Gleichung (2):

$$\operatorname{tg}\Lambda = \frac{a\sqrt[3]{ab^2} - b^2}{a(a - \sqrt[3]{ab^2})} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt[3]{a^2b^4}}{\sqrt[3]{a^2b^4} - b^2}}$$

$$= \frac{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{a}, \text{ oder, wenn wir } \frac{b}{a} = e \text{ setzen,}$$

$$= (1 + e^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Für das entsprechende Minimum des φ hat man:

$$\sin\Phi = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{e^2}} - 1}{\frac{1}{e^2} - 1}.$$

Liegt λ also zwischen 90^0 und Λ, so giebt es auch Radien, welche die verlangte Eigenschaft haben.

Man sieht, während φ von 0^0 bis 90^0 wächst, geht λ von 90^0 bis Λ und kehrt von hier zu 90^0 zurück, vorausgesetzt, dass zu einem bestimmten Werthe des λ zwei Werthe φ gehören. Es giebt also für irgend einen Kristallschnitt, der unter dem Winkel

$90^\circ - \lambda$ gegen die Hauptaxe geneigt ist, zwei Richtungen, nach welchen der gebrochene Strahl nicht zerlegt wird, vorausgesetzt, dass λ grösser ist als der „Grenzwinkel" $\varDelta$.

Zur Berechnung der Werthe λ, welche gegebenen Werthen φ entsprechen, erhält man aus (2) nach einigen Umformungen die Gleichung:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\sqrt{1 + e^2 \operatorname{ctg}\varphi^2}}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\lambda.$$

Ist λ gegeben, so findet man zur Berechnung der zugehörigen Winkel φ aus Gleichung (2) zunächst:

$$(b^4 + 2a^2b^2 \operatorname{tg}\lambda \operatorname{tg}\varphi + a^4 \operatorname{tg}\lambda^2 \operatorname{tg}\varphi^2)(1 + \operatorname{tg}\varphi^2)$$
$$= a^2(1 + 2\operatorname{tg}\lambda \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\lambda^2 \operatorname{tg}\varphi^2)(b^2 + a^2 \operatorname{tg}\varphi^2).$$

Die Glieder in $\operatorname{tg}\varphi^4$ heben sich, woraus hervorgeht, dass eine Wurzel der vorstehenden Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, also $\varphi = 90^\circ$, für jeden Werth des λ ist; d. h. in der Richtung der Hauptaxe fallen, wie bekannt ist, die gebrochenen Strahlen zusammen, welches auch die Neigung des Kristallschnitts gegen die Hauptaxe sein mag.

Durch Reduction der Gleichung erhält man:

$$2\operatorname{tg}\varphi^3 . a^2 \operatorname{tg}\lambda + \operatorname{tg}\varphi^2(a^2 + b^2 - a^2 \operatorname{tg}\lambda^2) + b^2 = 0,$$

oder noch umgeformt:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{ctg}\varphi^3 - \operatorname{ctg}\varphi \frac{\operatorname{tg}\lambda^2 - (1 + e^2)}{e^2} + \frac{2\operatorname{tg}\lambda}{e^2} = 0,$$

indem wieder $\frac{b}{a} = e$ gesetzt ist.

Diese Gleichung hat für $\operatorname{tg}\lambda > (1 + e^2)^{\frac{3}{2}}$ stets drei reelle Wurzeln, und zwar zwei positive und eine negative. Letztere ist für unser physicalisches Problem nicht brauchbar, sie hat nur geometrische Bedeutung. Der daraus abgeleitete Werth des φ ergiebt einen Durchmesser tt_1 (Taf. III. Fig. 7.) des zweiten und vierten Quadranten. Die Tangenten an den Durchschnittspuncten mit Kreis und Ellipse schneiden sich zwar auch auf dem Durchmesser KK', aber nicht die an diese Figuren auf derselben Seite gezogenen Tangenten, sondern auf entgegengesetzten, also die Tangenten in t' und t_1, und gleichfalls die Tangenten in t und t_1'.

Früher waren, wie es für unser physicalisches Problem nur statthaft ist, die Puncte T und T' (Taf. III. Fig. 6.) stillschweigend

als auf derselben Seite des Durchmessers liegend angenommen und desshalb die Coordinaten beider Puncte mit demselben Zeichen versehen. Für das allgemeinere geometrische Problem muss aber noch der Fall berücksichtigt werden, dass die Puncte auf verschiedenen Seiten des Durchmessers liegen. Man hat dann den Coordinaten des einen Punctes die denen des andern Punctes entgegengesetzten Zeichen zu geben. Nehmen wir also z. B. an als Coordinaten von T': $\frac{ab\cos\varphi}{w}$, $\frac{ab\sin\varphi}{w}$; so werden die des auf der andern Seite liegenden Durchschnitts mit dem Kreise sein: $-b\cos\varphi$, $-b\sin\varphi$, und die Gleichung (2) wird dann:

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{aw+b^2}{a(a+w)}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ wird $\operatorname{tg}\lambda = -\infty$, für $\varphi = 90^0$ wird $\operatorname{tg}\lambda = 0$, woraus hervorgeht, dass in diesem Falle λ kein Minimum hat.

Diese letzte Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (2) nur durch das Vorzeichen von w. Macht man sie rational, so wird man dieselbe kubische Gleichung (4) erhalten, welche also auch die Lösungen in sich schliesst, welche nur geometrische Bedeutung haben.

Zur numerischen Berechnung der Wurzeln der Gleichung (4) setze man:

$$\sin 3A = \frac{e\operatorname{tg}\lambda}{\frac{1}{3}\{\operatorname{tg}\lambda^2-(1+e^2)\}\sqrt{\frac{1}{3}\{\operatorname{tg}\lambda^2-(1+e^2)\}}}$$

$$= \frac{e\operatorname{tg}\lambda}{\frac{1}{3}\{\operatorname{tg}\lambda+(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}.\{\operatorname{tg}\lambda-(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}\sqrt{\frac{1}{3}\{\operatorname{tg}\lambda+(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}.\{\operatorname{tg}\lambda-(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}}},$$

so sind die beiden positiven Wurzeln der kubischen Gleichung gegeben durch:

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{2\sin A\sqrt{\frac{1}{3}\{\operatorname{tg}\lambda+(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}.\{\operatorname{tg}\lambda-(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}}}{e},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{2\sin(60^0-A)\sqrt{\frac{1}{3}\{\operatorname{tg}\lambda+(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}.\{\operatorname{tg}\lambda-(1+e^2)^{\frac{1}{2}}\}}}{e}.$$

Entnimmt man $\operatorname{tg}\lambda$ selbst aus den Tafeln, so ist, da $(1+e^2)^{\frac{1}{2}}$ für denselben Kristall constant ist, die Berechnung ziemlich bequem.

Beispiel für den Kalkspath.

Für den Kalkspath ist $a = 0{,}64717$, $b = 0{,}60449$, wenn die

Geschwindigkeit des Lichts in der Luft die Einheit ist. Darnach findet man für die Grösse des Gegenwinkels: $\Lambda = 69^\circ\, 32'\, 39''$ und für den zugehörigen Werth des φ: $\Phi = 33^\circ 47' 46''$.

Die erste der folgenden Tabellen giebt die aus Gleichung (4) berechneten Werthe φ, die zweite die aus Gleichung (3) berechneten Werthe λ. In beiden Tabellen schreiten die Argumente nach ganzen Graden fort.

I.

λ	φ_1			φ_2		
39°32′ 39″	33° 47′ 46″					
70°	39°	54′	8″	28°	10′	57″
71	45	7	22	24	2	38
72	48	54	5	21	20	57
73	52	6	55	19	13	17
74	55	0	30	17	24	59
75	57	41	26	15	49	26
76	60	13	21	14	22	59
77	62	38	31	13	3	24
78	64	58	26	11	49	8
79	67	14	13	10	39	7
80	69	26	37	9	32	31
81	71	36	18	8	28	44
82	73	43	43	7	27	15
83	75	49	18	6	27	41
84	77	53	22	5	29	40
85	79	56	13	4	32	55
86	81	58	5	3	37	11
87	83	59	12	2	42	14
88	85	59	46	1	47	51
89	87	59	58	0	53	50
90	90	0	0	0	0	0

II.

φ	λ			φ	λ		
0°	90°	0′	0″	46°	71°	12′	48″
1	88	53	8	47	71	28	16
2	87	46	33	48	71	44	35
3	86	40	31	49	72	1	43
4	85	35	19	50	72	19	39
5	84	31	13	51	72	38	20
6	83	28	27	52	72	57	43
7	82	27	14	53	73	17	47
8	81	27	47	54	73	38	30
9	80	30	17	55	73	59	49
10	79	34	54	56	74	21	44
11	78	41	46	57	74	44	11
12	77	50	59	58	75	7	10
13	77	2	40	59	75	30	39
14	76	16	52	60	75	54	37
15	75	33	39	61	76	19	1
16	74	53	2	62	76	43	51
17	74	15	3	63	77	9	5
18	73	39	40	64	77	34	42
19	73	6	54	65	78	0	41
20	72	36	43	66	78	27	0
21	72	9	4	67	78	53	39
22	71	43	54	68	79	20	36
23	71	21	11	69	79	47	50
24	71	0	51	70	80	15	20
25	70	42	49	71	80	43	6
26	70	27	1	72	81	11	5
27	70	13	24	73	81	39	18
28	70	1	53	74	82	7	44
29	69	52	23	75	82	36	21
30	69	44	51	76	83	5	9
31	69	39	10	77	83	34	7
32	69	35	18	78	84	3	13
33	69	33	10	79	84	32	29
34	69	32	41	80	85	1	51
35	69	33	48	81	85	31	21
36	69	36	25	82	86	0	57
37	69	40	30	83	86	30	38
38	69	45	59	84	87	0	24
39	69	52	47	85	87	30	14
40	70	0	51	86	88	0	7
41	70	10	7	87	88	30	3
42	70	20	33	88	89	0	1
43	70	32	5	89	89	30	0
44	70	44	41	90	90	0	0
45	70	58	16				

Der Fall des positiven Kristalls erfordert keine besondere Untersuchung. Da in diesem Falle $a < b$ ist, werden $aw - b^2$

und $a-w$ stets negativ, also auch (Gleichung (2)) $\operatorname{tg}\varphi$ wiederum stets positiv. Sämmtliche Folgerungen bleiben demnach ungeändert.

Die Behandlung desselben Problems für zweiaxige Kristalle behalte ich einer späteren Untersuchung vor.

XXII.

Berücksichtigung der Refraktion und Correktion der Fehler bei dem Stundenzeiger von Eble.

Von

Herrn Doctor *Nell*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbeschule in Darmstadt.

Dieses ausgezeichnet sinnreiche Instrument, dem der Herr Erfinder den Namen: Horoskop gegeben hat, löst die Aufgabe, für irgend einen Moment die Zeit aus der Höhe der Sonne zu bestimmen, mit einer solchen Leichtigkeit, dass in dieser Beziehung kaum etwas zu wünschen übrig bleibt. Im Bande XXXVII. des Archivs hat Herr Professor Grunert eine vollständige Theorie des Instruments gegeben, weshalb wir uns nicht dabei aufhalten, sondern sogleich dazu übergehen wollen, zu zeigen, wie man den Einfluss der Strahlenbrechung unschädlich machen und auch die Fehler des Instruments korrigiren kann.

I. Die Refraktion bei dem Instrument von Eble.

Der Einfluss der Refraktion ist hier insofern nicht unwesentlich, als man während eines grossen Theils des Jahres die Beobachtung bei ziemlich tiefem Sonnenstande anstellen muss, um ein etwas sicheres Resultat zu erhalten. Denn man erhält natürlich die Zeit um so genauer, je rascher die Höhenänderung der Sonne von statten geht. Um zu wissen, wann diess geschieht, so bezeichne β die Polhöhe des Orts, δ die Deklination, h die Höhe und σ den Stundenwinkel der Sonne, so ist bekanntlich:

$$\sin h = \sin\beta \sin\delta + \cos\beta \cos\delta \cos\sigma.$$

Differentiirt man in Bezug auf h und σ, so wird:

$$\frac{dh}{d\sigma} = -\frac{\cos\beta \cos\delta \sin\sigma}{\cos h}.$$

Setzt man ausserdem das Azimuth der Sonne $= \alpha$, so haben wir die Gleichung:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\sigma} = \frac{\cos\delta}{\cos h},$$

also auch:

$$\frac{dh}{d\sigma} = -\cos\beta \sin\alpha.$$

Dieser Ausdruck erlangt, vom Zeichen abgesehen, seinen grössten Werth für $\alpha = 90^0$, d. h. die Sonne ändert ihre Höhe am schnellsten, wenn sie im ersten Vertikale steht. Diess tritt bekanntlich um die Zeit der Nachtgleichen des Vor- und Nachmittags um 6 Uhr oder zur Zeit des Sonnenauf- und Untergangs ein. In den Wintermonaten steht die Sonne unter dem Horizonte, wenn sie in den ersten Vertikal gelangt, dagegen kann man in den Sommermonaten die Beobachtung wirklich zu einer Zeit anstellen, dass man auch eine etwas grössere Genauigkeit erhält. Um jedesmal zu wissen, wann diess der Fall, dient die sehr einfach nachzuweisende Gleichung:

$$\cos\sigma = \cot\beta \operatorname{tg}\delta.$$

Z. B. um die Zeit des Solstitiums ist $\delta = 23^0 27'$, setzt man ausserdem $\beta = 50^0$, so findet sich $\sigma = 4^h 35^m$, oder man macht um diese Zeit unter dem 50sten Breitengrade die Beobachtung am besten des Morgens um 7 U. 25 M. oder Nachmittags 4 U. 35 M., wobei es natürlich auf eine Viertelstunde früher oder später gar nicht ankommt, indem bekanntlich jede Grösse in der Nähe ihres Maximums oder Minimums sich nur langsam ändert.

Die Formel $\frac{dh}{d\sigma} = -\cos\beta \sin\alpha$ gibt für $\alpha = 0$, $\frac{dh}{d\sigma} = 0$, d. h. zur Mittagszeit würde die Beobachtung ein ganz unsicheres Resultat geben. Im Allgemeinen wird man gut thun, mindestens 3 Stunden vor oder nach 12 Uhr zu beobachten. Diess setzt jedoch voraus, dass man den Fehler, welcher durch die Refraktion verursacht wird, unschädlich macht. Führen wir in unserer obigen Gleichung für $\sin h$ statt der Deklination der Sonne ihre Poldistanz $= p$ ein, so wird sie:

$$\sin h = \sin\beta \cos p + \cos\beta \sin p \cos\sigma,$$

Bezeichne r die Refraktion der Sonne, wenn sie die wahre Höhe h zeigt, so ist $h+r$ ihre scheinbare Höhe, und man kann dafür die Gleichung anschreiben:

$$\sin(h+r) = \sin\beta \cos p' + \cos\beta \sin p' \cos\sigma,$$

welche jedenfalls dadurch befriedigt werden kann, dass dem p' ein geeigneter Werth beigelegt wird. Wir können daher die Frage stellen: Welche Correktion φ muss man an die wirkliche Poldistanz p der Sonne anbringen, dass obige Gleichung für die scheinbare Sonnenhöhe noch den gleichen Stundenwinkel σ wie vorher gibt. Wir haben hier offenbar $p' = p + \varphi$; da nun φ und r kleine Winkel sind, die immer kleiner bleiben als 1^0, so setze man den Sinus gleich dem Bogen, den Cosinus $= 1$ und erhält damit

$$\varphi = -\frac{r \cos h}{\sin\beta \sin p - \cos\beta \cos p \cos h}.$$

Man müsste hiernach, um den Einfluss der Refraktion unschädlich zu machen, für den beiläufig bekannten Stundenwinkel σ nach der Formel $\sin h = \sin\beta \cos p + \cos\beta \sin p \cos\sigma$ die Höhe der Sonne berechnen, dazu aus einer Refraktionstafel das r entnehmen, und dann φ berechnen. Allein diess wäre ziemlich umständlich und würde dem Zweck des Instruments geradezu widersprechen, da man beim Gebrauch desselben jeder trigonometrischen Rechnung überhoben sein soll. Berechnet man sich übrigens ein für allemal eine Tabelle, aus welcher man die Grösse φ sogleich entnehmen kann, so verursacht diess bei jeder Beobachtung eine ganz unbedeutende Mühe. Wir theilen hier eine solche Tabelle mit, welche für $\beta = 50^0$ berechnet ist:

Tabelle

zur Correktion des Polabstandes der Sonne, um beim Gebrauch des Stundenzeigers den Einfluss der Refraktion unschädlich zu machen. Für den 50sten Grad der Breite.

Vormittags-Stunden.	Nachmittags-Stunden.	Polabstand der Sonne. 66° 33'	70°	75°	80°	85°	90°	95°	100°	105°	110°	113° 27'	Die mit starken Linien eingefassten Ziffern geben den Moment an, wann der Sonnenmittelpunkt ohne Rücksicht auf Refraktion im Horizonte steht.
U. M.	U. M.	'	'	'	'	'	'	'	'	'	'	'	
12 0	12 0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	
11 0	1 0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	
10 0	2 0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	
9 0	3 0	1	1	2	2	2	2	2	3	4	6	8	
8 30	3 30	2	2	2	2	2	3	3	4	6	9	15	
8 20	3 40	2	2	2	2	2	3	4	5	7	12	19	
8 10	3 50	2	2	2	2	3	3	4	5	8	14	27	
8 0	4 0	2	2	2	2	3	3	4	6	9	19	35	$3^h 55^m$
7 50	4 10	2	2	2	3	3	4	5	7	11	27		
7 40	4 20	2	2	3	3	4	4	6	8	12	36	$4^h 17^m$	
7 30	3 40	2	2	3	3	4	5	7	10	20			
7 20	4 40	2	2	3	3	4	5	8	12	29			
7 10	4 50	2	3	3	4	5	6	9	16	37	$4^h 45^m$		
7 0	5 0	3	3	3	4	5	7	11	23				
6 50	5 10	3	3	4	4	6	8	14	34				
6 40	5 20	3	3	4	5	7	10	19	38	$5^h 11^m$			
6 30	5 30	3	4	5	6	8	13	29					
6 20	5 40	3	4	5	6	9	17	38	$5^h 36^m$				
6 10	5 50	4	4	5	7	12	24						
6 0	6 0	4	5	6	8	15	38	$6^h 0^m$					
5 50	6 10	4	5	7	11	21							
5 40	6 20	5	6	8	13	31							
5 30	6 30	5	7	10	18	38	$6^h 24^m$						
5 20	6 40	6	8	12	26								
5 10	6 50	7	9	16	38	$6^h 49^m$							
5 0	7 0	8	11	21									
4 50	7 10	9	13	30									
4 40	7 20	11	16	37	$7^h 15^m$								
4 30	7 30	13	22										
4 20	7 40	16	32										
4 10	7 50	20	36	$7^h 43^m$									
4 0	8 0	29											
3 55	8 5	35	$8^h 5^m$										

Die in dieser Tafel enthaltenen Zahlen bedeuten Bogenminuten und sind jederzeit von dem wahren Polabstand der Sonne in Abzug zu bringen.

Um aber diese Tabelle berechnen zu können, ist es nöthig, den Betrag der Refraktion für die wahre Höhe der Sonne zu kennen, während die Refraktionstafeln denselben immer für die scheinbare, oder durch Beobachtung erhaltene Sonnenhöhe angeben. Man muss desshalb aus einer solchen Tafel den Werth von r beiläufig bestimmen, dann ist $h+r$ die scheinbare Höhe, für welche man also den Werth von r genauer erhält; würde der letztere von jenem stark abweichen, so müsste man das Verfahren wiederholen. Doch wird man durch Benutzung der folgenden Tafel dieser etwas umständlichen Arbeit überhoben, indem solche die Refraktion für die wirkliche Höhe angiebt. Sie ist in Minuten und Zehnteln derselben ausgedrückt.

Wahre Höhe.	Refraktion.	Wahre Höhe.	Refraktion.	Wahre Höhe.	Refraktion.	Wahre Höhe.	Refraktion.
−0° 35'	34',9	4° 0'	11',3	11°	4',8	51°	0',8
30	34,1	10	11,0	12	4,4	52	0,8
25	33,2	20	10,6	13	4,1	53	0,7
20	32,3	30	10,4	14	3,8	54	0,7
15	31,5	40	10,1	15	3,5	55	0,7
10	30,7	50	9,8	16	3,3	56	0,6
−0 5	30,0	5 0	9,4	17	3,1	57	0,6
0 0	29,2	10	9,2	18	2,9	58	0,6
+0 5	28,5	20	9,0	19	2,8	59	0,6
10	27,8	30	8,8	20	2,6	60	0,6
15	27,1	40	8,6	21	2,5	61	0,5
20	26,4	50	8,4	22	2,4	62	0,5
25	25,7	6 0	8,2	23	2,3	63	0,5
+0 30	25,1	10	8,0	24	2,2	64	0,5
35	24,5	20	7,9	25	2,1	65	0,5
40	23,9	30	7,7	26	2,0	66	0,4
45	23,3	40	7,5	27	1,9	67	0,4
50	22,8	50	7,4	28	1,8	68	0,4
55	22,3	7 0	7,2	29	1,7	69	0,4
1 0	21,8	10	7,1	30	1,7	70	0,4
5	21,3	20	6,9	31	1,6		
10	20,8	30	6,8	32	1,5		
15	20,3	40	6,7	33	1,5		
20	19,9	50	6,5	34	1,4		
25	19,5	8 0	6,4	35	1,4		
1 30	19,1	10	6,3	36	1,3		
40	18,3	20	6,2	37	1,3		
50	17,5	30	6,1	38	1,2		
2 0	16,9	40	6,0	39	1,2		
10	16,3	50	5,9	40	1,1		
20	15,7	9 0	5,8	41	1,1		
30	15,1	10	5,7	42	1,1		
40	14,5	20	5,6	43	1,0		
50	14,0	30	5,5	44	1,0		
3 0	13,5	40	5,4	45	1,0		
10	13,1	50	5,3	46	0,9		
20	12,7	10 0	5,2	47	0,9		
30	12,3	10	5,1	48	0,9		
40	11,9	20	5,1	49	0,8		
50	11,6	30	5,0	50	0,8		
4 0	11,3	40	4,9				
		50	4,9				
		11 0	4,8				

Um nun zu beurtheilen, welchen Fehler man begeht, wenn man bei der Zeitbestimmung mit dem Instrument von Eble die Refraktion ganz vernachlässigt, so differentiire man die Gleichung:

$$\sin h = \sin\beta\cos p + \cos\beta\sin p\cos\sigma.$$

in Bezug auf h und σ.

Dadurch findet sich, wenn man ausserdem noch $dh = r$ setzt:

$$d\sigma = -\frac{r\cos h}{15\cos\beta\sin p\sin\sigma}.$$

in Zeitminuten z. B. $\beta = 50^0$, $p = 90^0$, $\sigma = 6^h$ oder $= 90^0$. Dafür ist $h = 0$, also $r = 29',2$ und $d\sigma = -3{,}03$ Minuten.

II. Untersuchung der Fehler des Instruments.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen übrig, wie man die Fehler des Instruments korrigiren könne. Dasselbe besteht (siehe Archiv, Theil 37, Seite 429) aus 2 Haupttheilen, wovon der erste AB die Gestalt eines T, der andere CD Aehnlichkeit mit einem L hat. Auf AB finden sich 2 Skalen, wovon die eine nach Graden für die Poldistanzen der Sonne, die andere nach Stunden und Minuten getheilt ist. Die Richtigkeit beider Eintheilungen kann leicht vermittelst eines geradlinigen Massstabes und einer trigonometrischen Tafel geprüft und also auch nöthigenfalls korrigirt werden, indem bei der ersten Skala die Abstände der Theilungspunkte von der Mittellinie sich wie die Tangenten der um 90 Grad verminderten Poldistanzen, und bei der Stundenskala sich wie die Cosinus der ebenfalls um 90 Grad verminderten Stundenwinkel verhalten müssen. Ausserdem fordert die Theorie des Instruments, dass beide Skalen rechtwinkelig zu einer geraden Linie stehen, welche man sich von der Mitte der oberen Skala nach demjenigen Punkt gezogen denkt, auf welchen man beim Gebrauche das Loth einspielen lässt. Bezeichnet K (Taf. III. Fig. 1.) diesen Punkt und ist H die Mitte, G und J die Endpunkte der oberen Skala, so ist:

$$\angle HKJ = \angle HKG = 25^0,$$

daher:

$$HK = HJ.\cot 25^0 = 2{,}1445.HJ$$

und:

$$KJ = KG = \frac{HJ}{\sin 25^0} = 2{,}3662.HJ.$$

Hat man sich daher zuerst überzeugt, dass HJ gleich HG ist, so beschreibe man von den Punkten J und G aus mit KJ als Halbmesser zwei Kreisbögen, die sich in K durchschneiden wer-

den, und überzeuge sich, ob HK eben so gross ist, als es die Rechnung verlangt. Man kann hiernach die Lage des Punktes K nöthigenfalls verbessern. Endlich bleibt noch zu untersuchen übrig, ob die durch die Mitte zwischen den beiden Löchelchen bei K (siehe die Abbildung des Instruments Taf. III. Bd. 37) und die Linie auf dem Plättchen l gedachte Ebene mit der Geraden im einen rechten Winkel bildet. Diese Untersuchung ist wohl die wichtigste, indem ein kleiner Fehler sogleich einen sehr merklichen Einfluss auf das Resultat der Beobachtung ausübt; man wird sie um so mehr vornehmen müssen, als man nicht voraussetzen kann, dass das aus Holz verfertigte Instrument seine Form unverändert beibehält. Hier wird uns ein Verfahren, welches auf der „Methode der korrespondirenden Sonnenhöhen" beruht, am sichersten zum Ziele führen. Hat man nämlich vermittelst eines Spiegelsextanten oder irgend eines anderen Instruments, das zur Messung von Höhenwinkeln eingerichtet ist, Vor- und Nachmittags gleiche Höhen seines Gestirns, das seine Deklination nicht ändert, beobachtet nnd dabei jedesmal die Uhrzeit notirt, so ist es gar nicht nöthig, den Höhenwinkel zu kennen, sondern man braucht nur das Mittel aus beiden Uhrzeiten zu nehmen, um den Moment der Culmination zu erhalten. Bei Beobachtungen der Sonne muss, um den wahren Mittag zu finden, an das Mittel der Zeiten noch die sogenannte Mittagsverbesserung angebracht werden, weil dieselbe ihre Deklination im Laufe mehrerer Stunden schon merklich ändert. Man könnte natürlich die Mittagsverbesserung auch dadurch bestimmen, dass man bei jeder Beobachtung die Höhe am Instrument ablesen, sodann mit Zuziehung der richtigen Deklination und Polhöhe den Zeitmoment der Beobachtung berechnen und das Mittel der Uhrzeiten vom Mittel der berechneten Zeiten subtrahiren würde. Bezeichnet man die berechneten Zeiten Vor- und Nachmittags durch t und t', die Uhrzeiten durch τ und τ' so findet man also die Mittagsverbesserung:

$$v = \frac{t + t'}{2} - \frac{\tau + \tau'}{2}.$$

Zweckmässiger ist es jedoch, an t und t' den Betrag der Zeitgleichung z und z' anzubringen, um die wahre Sonnenzeit auf mittlere zu reduciren, da eine Uhr nur nach letzterer regulirt werden kann. Danach ist also:

$$v = \frac{t + z + t' + z' - \tau - \tau'}{2},$$

welches sich auch schreiben lässt:

$$v = \tfrac{1}{2}\{(t + z - \tau) + (t' + z' - \tau')\}.$$

Nun ist $(t + z - \tau)$ der **Stand der Uhr**, man versteht näm-

lich darunter die Anzahl Minuten und Secunden, welche zu der Zeit, welche die Uhr gerade zeigt, hinzugefügt, die richtige Zeit geben. Würde nun das Winkelmessinstrument die Höhen fehlerfrei geben, so müssten die beiden Ausdrücke $(t+z-\tau)$ und $(t'+z'-\tau')$ auch genau übereinstimmen; diess wird jedoch in der Regel nicht der Fall sein, dann erhält man aber nach dem Vorhergehenden in dem Mittel aus beiden, ein von den Fehlern des Instruments unabhängiges Resultat. Man sieht nun leicht ein, dass, wenn auch die am Nachmittag genommene Höhe etwas von der vormittägigen verschieden ist, man dennoch durch dieselbe Rechnungsmethode ein gutes Resultat erhält, indem bei nahe liegenden Beobachtungen kleine Fehler des Instruments in ganz ähnlichem Sinne wirken. Diese Beobachtungen auf das Horoskop angewandt, erhält man folgende Vorschriften: Man macht am Vormittage, am besten 4 oder 5 Stunden vor 12 Uhr, mit dem Instrument eine Beobachtung, dessgleichen Nachmittags beiläufig ebensoviel Zeit nach 12 Uhr, und berechnet aus beiden Beobachtungen den Stand der Uhr, das Mittel daraus gibt den richtigen Werth; zugleich sieht man, dass, je mehr beide Werthe von einander abweichen, um so grösser der Fehler des Instruments sein müsse. Es wurde bei diesen Betrachtungen übrigens keine Rücksicht auf den täglichen Gang der Uhr genommen. Man versteht nämlich darunter den Unterschied zweier innerhalb 24 Stunden bestimmter Uhrstände, und nimmt das Zeichen desselben so an, dass ein positiver Gang ein zu langsames, ein negativer ein zu schnelles Gehen der Uhr bedeutet. Um den täglichen Gang der Uhr zu bestimmen, macht man auch am folgenden Tage wieder um dieselbe Vormittagsstunde eine Beobachtung, so erhält man durch Vergleichung der beiden Vormittagsbeobachtungen einen richtigen Werth für den täglichen Gang, indem dabei wieder die Fehler des Instruments ganz in dem gleichen Sinne wirken. Man kann dann die Beobachtung am Nachmittage leicht so reduciren, als wenn die Uhr ganz richtig gegangen wäre. Freilich muss man sich auf einen gewissen regelmässigen Gang der Uhr innerhalb 24 Stunden verlassen können, sonst wäre eine solche hierzu nicht zu gebrauchen. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass man sich nicht mit einer einzigen Beobachtung begnügen wird, sonderndass man jedesmal eine Reihe von Beobachtungen rasch hintereinander machen wird, und das Mittel daraus nimmt, um das Resultat von Beobachtungsfehlern freier zu machen.

Hat sich nun durch eine derartige Untersuchung herausgestellt, dass der Strich auf dem Plättchen *l* eine unrichtige Lage habe, so kommt es jetzt darauf an, dieselbe zu korrigiren. Zu dem Ende

ziehe man (Taf. III. Fig. 2.) ober- und unterhalb von jenem Striche in gleichen Abständen (am zweckmässigsten von etwa 1 Millimeter) mit scharf gespitztem Bleistift parallele Striche und mache nun an jedem der drei Striche Beobachtungen nach der eben beschriebenen Methode. Wie man dann weiter verfährt, ersieht man am besten aus folgendem Beispiel.

Wir bezeichnen die drei Striche durch (1), (2), (3), und zwar sei (1) der untere, (2) der mittlere (alte) Strich, (3) der obere.

Beobachtung am 1. Juli 1863. Vormittags nach 7 Uhr.
Poldistanz der Sonne $= 66^\circ 47'$, Zeitgleichung $z = +3{,}4^m$.

Beobachtung am Strich (1):

$t =$	$7^h\ 1{,}3^m$	$7^h\ 3{,}5^m$	$7^h\ 8{,}2^m$	$7^h\ 9{,}7^m$	$7^h\ 12{,}3^m$
$z =$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
$t + z =$	7 4,7	7 6,9	7 11,6	7 13,1	7 15,7
$\tau =$	7 9,0	7 11,4	7 16,1	7 17,8	7 20,2
$t + z - \tau =$	−4,3	−4,5	−4,5	−4,7	−4,5

Beobachtung am Strich (2):

$t =$	$7^h\ 14{,}6^m$	$7^h\ 17{,}7^m$	$7^h\ 19{,}8^m$	$7^h\ 21{,}6^m$	$7^h\ 25{,}9^m$	$7^h\ 27{,}4^m$
$z =$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
	7 18,0	7 21,1	7 23,2	7 25,0	7 29,3	7 30,8
$\tau =$	7 21,5	7 24,4	7 26,7	7 28,3	7 32,6	7 34,0
$t + z - \tau =$	−3,5	−3,3	−3,5	−3,3	−3,3	−3,2

Beobachtung am Strich (3):

$t =$	$7^h\ 30{,}7^m$	$7^h\ 32{,}7^m$	$7^h\ 36{,}2^m$	$7^h\ 38{,}3^m$	$7^h\ 39{,}8^m$
$z =$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
$=$	7 34,1	7 36,1	7 39,6	7 41,7	7 43,2
$\tau =$	7 36,4	7 38,4	7 42,0	7 44,0	7 45,5
$t + z - \tau =$	−2,3	−2,3	−2,4	−2,3	−2,3

Man erhält hiernach:

Stand der Uhr am 1. Juli Vormittags:

nach Strich (1)	$-4{,}50^m$	um	$7^h\ 10^m$	oder	$7{,}2^h$,
" " (2)	$-3{,}35$	"	7 25	"	7,4,
" " (3)	$-2{,}32$	"	7 40	"	7,7.

Beobachtung am 1. Juli. Nachmittags nach 4 Uhr.

Poldistanz der Sonne = 66° 50′. Zeitgleichung = + $\overset{m}{3{,}4}$.

Strich (3):

	h m	h m	h m	h m	h m	h m
$t =$	4 5,3	4 7,8	4 9,9	4 11,4	4 13,6	4 16,2
$z =$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
$t + z =$	4 8,7	4 11,2	4 13,3	4 14,8	4 17,0	4 19,6
$\tau =$	4 12,5	4 15,0	4 17,2	4 18,7	4 20,8	4 23,5
$t + z - \tau =$	−3,8	−3,8	−3,9	−3,9	−3,8	−3,9

Strich (2):

	h m	h m	h m	h m	h m	h m
$t =$	4 19,6	4 21,3	4 23,5	4 25,8	4 27,7	4 29,3
$z =$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
	4 23,0	4 24,7	4 26,9	4 29,2	4 31,1	4 32,7
$\tau =$	4 25,7	4,27,4	4 29,4	4 31,9	4 33,8	4 35,4
$t + z - \tau =$	−2,7	−2,7	−2,5	−2,7	−2,7	−2,7

Strich (1):

	h m	h m	h m	h m	h m	h m
$t =$	4 34,2	4 35,2	4 36,6	4 37,5	4 41,3	4 42,7
$z =$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
	4 37,6	4 38,6	4 40,0	4 40,9	4 44,7	4 46,1
$\tau =$	4 39,2	4 40,2	4 41,5	4 42,4	4 46,2	4 47,8
$t + z - \tau =$	−1,6	−1,6	−1,5	−1,5	−1,5	−1,7

Hiernach Stand der Uhr am 1. Juli Nachmittags.

Nach Strich (3) . . . . −3,85 um 4,2,
- - (2) . . . . −2,67 - 4,5,
- - (1) . . . . −1,57 - 4,7.

Beobachtung am 2. Juli. Vormittags nach 7 Uhr.

Poldistanz der Sonne = 66° 51′. Zeitgleichung = + $\overset{m}{3{,}6}$.

Strich (1):

	h m	h m	h m	h m	h m	h m
$t =$	7 5,2	7 6,4	7 8,2	7 9,3	7 11,3	7 13,1
$z =$	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	7 8,8	7 10,0	7 11,8	7 12,9	7 14,9	7 16,7
$\tau =$	7 13,2	7 14,7	7 16,3	7 17,5	7 19,5	7 21,4
$t + z - \tau =$	−4,4	−4,7	−4,5	−4,6	−4,6	−4,7

Strich (2):

	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
$t =$	7 17,6	7 19,2	7 20,3	7 21,9	7 24,2	7 25,6	7 28,7	7 30,3
$z =$	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	7 21,2	7 22,8	7 23,9	7 25,5	7 27,8	7 29,2	7 32,3	7 33,9
$\tau =$	7 24,6	7 26,2	7 27,6	7 29,0	7 31,0	7 32,5	7 35,9	7 37,2
$t+z-\tau =$	−3,4	−3,4	−3,7	−3,5	−3,2	−3,3	−3,6	−3,3

Strich (3):

	h m	h m	h m	h m	h m	h m
$t =$	7 36,1	7 37,5	7 40,7	7 41,9	7 44,1	7 45,7
$z =$	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
	7 39,7	7 41,1	7 44,3	7 45,5	7 47,7	7 49,3
$\tau =$	7 41,9	7 43,4	7 46,8	7 48,0	7 49,8	7 51,4
$t+z-\tau =$	−2,2	−2,3	−2,5	−2,5	−2,1	−2,1

Hiernach Stand der Uhr am 2. Juli Vormittags:

Nach Strich (1) . . . . —4,58 (m) um 7,2 Uhr.
- - (2) . . . . —3,43 - 7,5 -
- - (3) . . . . —2,28 - 7,7 -

Die Vergleichung mit der Beobachtung am 1. Juli Vormittags ergibt:

Täglichen Gang nach Strich (1) . . . . —0,08 (m),
- - - - (2) . . . . —0,08,
- - - - (3) . . . . +0,04.

Das Mittel daraus ist = —0,04 (m) oder die Uhr ist vom 1. zum 2. Juli um 2½ Secunden vorgeeilt.

Diese Beobachtungen wurden mit einem Taschenchronometer gemacht, doch hätte auch eine gute Cylinder- oder Ankeruhr hinreichende Genauigkeit gewährt.

Wir wollen nun die Nachmittagsbeobachtungen so reduciren, als wenn die Uhr gar nicht vorgeeilt wäre.

Beobachtung am 1. Juli.

Strich (1) um $7^h,2$ Vormittag - - - 4,7 Nachmittag	Zeitintervall	= 9,5 Stunden.
Strich (2) - 7,4 Vormittag - - - 4,5 Nachmittag	-	= 9,1 -
Strich (3) - 7,7 Vormittag - - - 4,2 Nachmittag	-	= 8,5 -

$$\text{Gang der Uhr in } 9^h,5 = -\frac{0{,}04 \,.\, 9{,}5}{24} = -0^h{,}02,$$

$$\text{- - - - } 9{,}1 = -\frac{0{,}04 \,.\, 9{,}1}{24} = -0{,}02,$$

$$\text{- - - - } 8{,}5 = -\frac{0{,}04 \,.\, 8{,}5}{24} = -0{,}01.$$

Wäre daher die Uhr nicht vorgeeilt, so hätte sich bei den Nachmittagsbeobachtungen der Stand derselben gezeigt:

Strich (1) . . $-1^m,55$, Strich (2) . . $-2^m,65$, Strich (3) . . $-3^m,84$.

Bei den Vormittagsbeobachtungen fanden sich die Zahlen:

$-4,50$, $-3,25$, $-2,32$.

Die Mittel aus den Vor- und Nachmittagsbeobachtungen sind:

$-3,03$, $-3,00$, $-3,08$.

Nimmt man endlich noch das Mittel aus diesen drei Werthen, so erhält man für den Stand der Uhr am 1. Juli Vormittags um 7,4 Uhr $= -3,04^m$.

Die Vergleichung mit den obigen Zahlen zeigt sogleich, dass der richtige Strich AB (Taf. III. Fig. 3.) zwischen (2) und (3) zu liegen kommen wird. Um seine Lage festzusetzen, setzen wir $CD = a$, $CA = x$. Nun fand sich:

Stand der Uhr nach Strich (2) $= -3,35$, daher Fehler $= +0,31$,
- - - - - (3) $= -2,32$, - - $= -0,72$.

Wir erhalten daher die Proportion:

$$0{,}31 - (-0{,}72) : a = 0{,}31 : x,$$

$$x = \frac{0{,}31a}{1{,}03} = 0{,}301a.$$

Hiernach ist die Lage des Striches zu verbessern.

XXIII.

Summation reciproker Potenzreihen mittelst der Formel

$$\frac{1}{s^a}=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty e^{-sx}x^{a-1}dx.$$

Von

Herrn Doctor *Gustav Ferdinand Meyer*
in Hannover.

In seiner algebraischen Analysis — Note X, Seite 433—447 — hat mein verehrter Lehrer, Herr Professor Stern in Göttingen, eine Anzahl interessanter Sätze über gewisse Doppelreihen aufgestellt, die eine Anwendung der so wichtigen Formel

$$\text{1.}\qquad \frac{1}{s^a}=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty e^{-sx}x^{a-1}dx$$

gestatten. Die Sätze selbst sind folgende — a. a. O. S. 446—447 —:

„Wenn man die Einheit sowohl als Basis, wie als Exponent ausschliesst, so ist die Summe der

1. reciproken Potenzen aller ganzen Zahlen $=1$,
2. reciproken geraden Potenzen aller ganzen Zahlen $=\frac{3}{4}$,
3. reciproken ungeraden Potenzen aller ganzen Zahlen $=\frac{1}{4}$,
4. reciproken Potenzen aller geraden Zahlen $=\log 2$,
5. reciproken geraden Potenzen aller geraden Zahlen $=\frac{1}{2}$,
6. reciproken ungeraden Potenzen aller geraden Zahlen $=\log 2-\frac{1}{2}$,
7. reciproken Potenzen aller ungeraden Zahlen $=1-\log 2$,
8. reciproken geraden Potenzen aller ungeraden Zahlen $=\frac{1}{4}$,

mittelst der Formel $\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{a-1} dx$.

9. reciproken ungeraden Potenzen aller ungeraden Zahlen $= \frac{3}{4} - \log 2$,

10. reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n+3$ $= \frac{\pi}{8} - \frac{\log 2}{2}$,

11. reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+3 = \frac{1}{4} . \log 2$,

12. reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n+1$ $= \frac{3}{4} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{8}$,

13. reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+1 = \frac{1}{4}(1 - \log 2)$,

14. reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n+2 = \frac{\log 2}{4}$,

15. reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+2 = \frac{\pi}{8}$,

16. reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n = \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{2}$,

17. reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$."

Des Interesses halber, welches ohne Zweifel diesen Sätzen an sich zukommt, möge es mir erlaubt sein, in dem Folgenden den Beweis derselben auf die erwähnte Weise zu liefern.

Wenn man in I. statt s zunächst die Zahlen 2, 3, 4, 5, ... setzt, so ergiebt sich offenbar:

I^a.

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \ldots = \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty x^{a-1} dx \, [e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots]$$
$$= \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty \frac{e^{-2x} x^{a-1} dx}{1 - e^{-x}}$$
$$= \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{a-1} dx}{e^x - 1}.$$

Schreibt man nun für a ebenfalls sämmtliche ganze Zahlen von 2 an, so entspringt weiter:

1)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\\ +\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{e^x-1}\left[x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1..3}+\ldots\right]$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}dx=1,$$

d. h. der erste der zu beweisenden Sätze.

Auf dieselbe Weise wird man offenbar auch den allgemeinen Satz beweisen können, den Stern a. a. O. S. 434. anführt. Substituirt man nämlich in I. statt s die Werthe $p+1$, $p+2$, $p+3$,..., wo p eine positive Zahl ausdrückt; so gewinnt man aus I:

$$\frac{1}{(p+1)^a}+\frac{1}{(p+2)^a}+\frac{1}{(p+3)^a}+\ldots$$
$$=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty x^{a-1}dx e^{-(p+1)x}[1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots]$$
$$=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{a-1}dx}{e^x-1}.$$

Mithin wird:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\frac{1}{(p+3)^2}+\ldots\\ +\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+2)^3}+\frac{1}{(p+3)^3}+\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\int_0^\infty e^{-px}dx=\frac{1}{p}.$$

Der zweite der oben erwähnten Sätze ergiebt sich, indem man in I^a. für a die geraden Zahlen 2, 4... wählt. Man erhält so:

2)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\\ +\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{e^x-1}\left[x+\frac{x^3}{1\ldots3}+\frac{x^5}{1\ldots5}+\ldots\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(e^x-e^{-x})dx}{e^x-1}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}(e^x+1)dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}dx=\tfrac{3}{4}.$$

mittelst der Formel $\frac{1}{s^a}=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty e^{-sx}x^{a-1}dx$.

Werden dagegen in I^a. für a die ungeraden Zahlen 3, 5,.... genommen, so kommt:

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots \\ +\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\dots \\ +\dots\dots\dots \end{array}\right\}=\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{e^x-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}dx=\tfrac{1}{4},$$

ein Resultat, das sofort durch Subtraction der beiden ersten Sätze erhellt.

Nun setze man in I. für s alle geraden Zahlen. Dadurch wird:

I^b.

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{6^a}+\dots=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty\frac{e^{-2x}.x^{a-1}dx}{1-e^{-2x}}=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{e^{2x}-1},$$

folglich für $a=2, 3, 4,\dots$:

$$4)\quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots \\ +\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\dots \\ +\dots\dots\dots \end{array}\right\}=\int_0^\infty\frac{dx}{e^{2x}-1}(e^x-1)$$

$$=\int_0^\infty dx\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)=\int_0^\infty dx-\int_0^\infty\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=\lg 2\ ^{*}).$$

---

*) Hier ist offenbar $\infty-\infty=0$, indem $x=\lg e^x$, also

$$x-\lg(e^x+1)=\lg\frac{e^x}{e^x+1}=-\lg(e^{-x}+1)$$

ist, dieser Ausdruck aber für $x=\infty$ den Werth 0 giebt.

Auch kann man, wenn man will, das Integral $\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+1}$ unter der Form $[-\lg(1+e^{-x})]_{0,\infty}$ sofort darstellen, da offenbar $\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+1}$ mit

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\int_0^\infty\frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$$

identisch ist.

Nimmt man aber $a = 2, 4, 6, \ldots$, so folgt aus I^b.:

5)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots \\ +\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}-1}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{2}.$$

Die Werthe $a = 3, 5, 7, \ldots$ hingegen liefern die Beziehung:

6)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\ldots \\ +\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{e^x+1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} + \frac{1}{2}\int_0^\infty d(e^{-x}) = \lg 2 - \frac{1}{2},$$

was offenbar sogleich durch Subtraction der Sätze 4) und 5) gewonnen werden kann.

Um den 7ten der obigen Sätze zu erlangen, wollen wir in I. statt s zuvörderst alle ungeraden Zahlen setzen. Hierdurch gewinnen wir die Gleichung:

I^c.

$$\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{7^a}+\ldots = \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty \frac{e^{-3x}}{1-e^{-2x}}x^{a-1}dx$$

$$= \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{a-1}dx}{e^{2x}-1}.$$

Hieraus aber fliesst, wenn man $a = 2, 3, 4, \ldots$ schreibt:

7)
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots \\ +\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{e^{2x}-1}\cdot(e^x-1) = [-e^{-x}+\lg(1+e^{-x})]_{0,\infty} = 1 - \lg 2.$$

mittelst der Formel $\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{a-1}\, dx.$

Natürlich kann dieses Resultat unmittelbar aus 1) und 4) abgelesen werden.

Weiter erhält man aus der Formel I^c.:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots \\ &+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots \\ &+\dots\dots\dots \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(e^x-e^{-x})}{e^{2x}-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}\right.$$

Endlich giebt die Gleichung I^c. für $a = 3, 5, 7, \dots$:

$$9)\quad \left.\begin{aligned} & \frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\dots \\ &+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\dots \\ &+\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{e^{2x}-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{e^x+1} - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\,dx}{e^x+1} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{e^x+1} - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx.$$

Aber

$$\int \frac{e^{-x}\,dx}{e^x+1} = -e^{-x} + \log(1+e^{-x}) + \text{const.}$$

und

$$-\tfrac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = \tfrac{1}{4}e^{-2x} + \text{const.},$$

sonach:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{e^x+1} - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \tfrac{3}{4} - \log 2,$$

ein Ergebniss, das schon aus dem blossen Anblicke der Gleichungen 7) und 8) zu erkennen ist.

Wenn wir jetzt in I. statt s alle Zahlen von der Form $4n+3$ substituiren, so bekommen wir zunächst die Beziehung:

I^d.

$$\frac{1}{3^a}+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{11^a}+\dots=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty x^{a-1}dx.\frac{e^{-3x}}{1-e^{-4x}}$$

$$=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty\frac{e^x x^{a-1}dx}{e^{4x}-1}.$$

Sonach wird:

10)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}+\dots\\+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{11^5}+\dots\\+\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}=\int_0^\infty\frac{e^x dx}{e^{4x}-1}.\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int_0^\infty\frac{e^x dx}{e^{4x}-1}.$$

Nun ist aber:

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{e^{2x}-1}=\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-2x}dx}{1-e^{-2x}}=\tfrac{1}{4}\int\frac{d(1-e^{-2x})}{1-e^{-2x}}=\tfrac{1}{4}\lg(1-e^{-2x})+\text{const.}$$

und

$$\int\frac{e^x dx}{e^{4x}-1}=-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x dx(1-e^{2x}+1+e^{2x})}{1-e^{4x}}=-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x dx}{1-e^{2x}}=-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x-\frac{1}{2i}\operatorname{arctg}(ie^x)+\text{const.},$$

d. g. wegen $\operatorname{arctg}vi=\frac{1}{2i}\log\frac{1-v}{1+v}$:

$$\int\frac{e^x dx}{e^{4x}-1}=-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x+\tfrac{1}{4}\log\frac{1-e^x}{1+e^x}+\text{const.}$$

Daher

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int\frac{e^x dx}{e^{4x}-1}=\tfrac{1}{4}\log(1-e^{-2x})+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x-\tfrac{1}{4}\log\frac{1-e^x}{1+e^x}+\text{const.}$$

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)^2+\text{const.}$$

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x+\tfrac{1}{2}\log\frac{1+e^x}{e^x}+\text{const.},$$

und somit:

mittelst der Formel $\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{a-1}\, dx.$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}-1} - \int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{e^{4x}-1} = \frac{\pi}{8} - \frac{\log 2}{2}\ *).$$

Ferner folgt aus I^d.:

11)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots \\ +\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\, dx}{e^{-2x}+1}$$

$$= [-\tfrac{1}{4}\log(1+e^{-2x})]_{0,\infty} = \tfrac{1}{4}\log 2.$$

Indem man in I. statt s alle Zahlen der Form $4n+1$ setzt, gewinnt man:

I^e.

$$\frac{1}{5^a}+\frac{1}{9^a}+\frac{1}{13^a}+\ldots = \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty x^{a-1}\, dx.\frac{e^{-5x}}{1-e^{-4x}}$$

$$= \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{a-1}\, dx}{e^{4x}-1}.$$

Demnach ist:

12)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{13^3}+\ldots \\ +\frac{1}{5^5}+\frac{1}{9^5}+\frac{1}{13^5}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\, dx}{e^{2x}-1} - \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{e^{4x}-1}.$$

Weil aber

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-2x}\, dx}{e^{2x}-1} = -\tfrac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{e^{2x}-1} = \tfrac{1}{4}e^{-2x} + \tfrac{1}{4}\log(1-e^{-2x})$$
$$+ \text{const.}$$

---

*) Dass $\operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ ist, ergiebt sich sofort aus der Formel

$$\overline{\operatorname{arctg}}\, z = \operatorname{arctg} z \pm l\pi,$$

in welcher $\operatorname{arctg} z$ den kleinsten Werth der vieldeutigen Function $\overline{\operatorname{arctg}}\, z$ und l jede ganze Zahl bezeichnet.

und

$$\int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{4x}-1} = -\int e^{-x}\,dx + \int \frac{e^{3x}\,dx}{e^{4x}-1} = e^{-x} + \int \frac{e^{x}\,dx}{e^{2x}+1} + \int \frac{e^{x}\,dx}{e^{4x}-1};$$

so entspringt mit Rücksicht auf die Betrachtungen unter 10):

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-2x}\,dx}{e^{2x}-1} - \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{4x}-1}$$

$$= \tfrac{1}{4}e^{-2x} + \tfrac{1}{4}\log(1-e^{-2x}) - e^{-x} - \tfrac{1}{4}\log\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{x} + \text{const.},$$

folglich nach einigen leichten Rechnungen:

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-2x}\,dx}{e^{2x}-1} - \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{4x}-1} = \tfrac{1}{4}e^{-2x} - e^{-x} - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{x} + \tfrac{1}{2}\log(1+e^{-x})$$
$$+ \text{const.}$$

Und sonach wird:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\,dx}{e^{2x}-1} - \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{e^{4x}-1} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{8}.$$

Wählt man für a alle geraden Zahlen, so fliesst aus Ic.:

13)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots \\ + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{13^4} + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\,dx}{e^{2x}+1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{2x}} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{d(1+e^{-2x})}{1+e^{-2x}} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\log 2.$$

Für a mögen jetzt Zahlen von der Form $4n+2$ gewählt werden. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich vorerst:

V.

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{10^a} + \cdots = \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty x^{a-1}\,dx\cdot\frac{e^{-2x}}{1-e^{-4x}}$$

$$= \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty \frac{e^{2x}x^{a-1}\,dx}{e^{4x}-1}.$$

Schreibt man nun für a die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, ..., so erhält man:

mittelst der Formel $\frac{1}{s^a}=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty e^{-sx}x^{a-1}\,dx.$

14)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{10^3}+\ldots\\ +\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{10^5}+\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\int_0^\infty\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}-\int_0^\infty\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-1}.$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}-\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-1}=\tfrac{1}{4}\log\frac{1-e^x}{1+e^x}-\tfrac{1}{4}\log\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}+\text{const.}$$

$$=\tfrac{1}{4}\log\frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}+\text{const.}=\tfrac{1}{4}\log\frac{1+e^{-2x}}{(1+e^{-x})^2}+\text{const.},$$

also

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}-\int_0^\infty\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-1}=-\tfrac{1}{4}\log\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}\log 2.$$

Die Voraussetzung $a=2, 4, 6, \ldots$ hingegen giebt:

15)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots\\ +\frac{1}{2^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{10^4}+\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\int_0^\infty\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x\right]_{0,\infty}=\frac{\pi}{8}.$$

Endlich giebt die Formel I. für $s=4, 8, \ldots 4n, \ldots$:

16.

$$\frac{1}{4^a}+\frac{1}{8^a}+\frac{1}{12^a}+\ldots=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int x^{a-1}dx\cdot\frac{e^{-4x}}{1-e^{-4x}}$$

$$=\frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{e^{4x}-1}.$$

Hieraus folgen dann wieder zwei Sätze, jenachdem für a die ungeraden oder die geraden Zahlen genommen werden. Für jene bekommt man:

16)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{12^3}+\cdots\\+&\frac{1}{4^5}+\frac{1}{8^5}+\frac{1}{12^5}+\cdots\\+&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}=\int_0^\infty\frac{dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{e^{2x}-1}-\int_0^\infty\frac{e^{-4x}dx}{1-e^{-4x}}.$$

Da aber die Beziehung gilt:

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{-x}dx}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\int d(e^{-x})+\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}dx}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{4}\log\frac{1-e^x}{1+e^x}+\text{const.}$$

und

$$\int\frac{e^{-4x}dx}{1-e^{-4x}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(e^{-4x}-1)}{e^{-4x}-1}=\frac{1}{4}\log(e^{-4x}-1)+\text{const.},$$

so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{-x}dx}{e^{2x}-1}-\int\frac{e^{-4x}dx}{1-e^{-4x}}=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{4}\log\frac{1-e^x}{1+e^x}-\frac{1}{4}\log(e^{-4x}-1)+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{4}\log\frac{e^{-2x}-1}{(e^{-x}+1)^2}-\frac{1}{4}\log(e^{-4x}-1)+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\log(1+e^{-x})-\frac{1}{4}\log(1+e^{-2x})+\text{const.}$$

Mithin

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{e^{2x}-1}-\int_0^\infty\frac{e^{-4x}dx}{1-e^{-4x}}=\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{2}.$$

Für $a=2, 4, 6, \ldots$ dagegen fliesst aus I*a*.:

17)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots\\+&\frac{1}{4^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{12^4}+\cdots\\+&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}=\int_0^\infty\frac{dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{e^{2x}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x\right]_{0,\infty}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

Wie schon aus einer nur oberflächlichen Betrachtung sich ergiebt, so bieten die in dem Vorstehenden bewiesenen Sätze noch manche interessanten Resultate dar. So folgt z. B. sofort, dass die Summe der reciproken ungeraden Potenzen aller ganzen Zahlen gleich ist der Summe der reciproken geraden Potenzen aller ungeraden Zahlen (3) und 8)), dass ferner die Summe der reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+3$ der Summe der reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n+2$ gleich ist (11) und 14)). Ebenso ersieht

man, dass die Summe der reciproken Potenzen aller ungeraden Zahlen das Vierfache von der Summe der reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+1$ beträgt (7) und 13)). U. s. w.

Das in dem Vorhergehenden gezeigte Verfahren könnten wir nun noch zur Herleitung anderer Sätze, welche Stern an demselben Orte aufgestellt hat, benutzen. Indessen möchten wir doch durch derartige Betrachtungen die Geduld der geehrten Leser gar zu sehr auf die Probe stellen, und erlauben uns daher nur noch, die schönen Entwickelungen Stern's sehr zur gefälligen Kenntnissnahme zu empfehlen.

XXIV.

Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

Von

Herrn Doctor *Ludwig Matthiessen*

in Jever.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Nehmen wir an, es sei der Ausdruck $x^2+(\frac{1}{2}a+v)x+y$ ein trinomischer Factor der Function von x, so erhält man durch Division derselben den anderen trinomischen Factor

$$x^2+(\tfrac{1}{2}a-v)x+\left(v^2-y-\left[\frac{a^2}{4}-b\right]\right)$$

und einen Rest von der Form $px+q$, nämlich:

$$\left\{-v^3-\tfrac{1}{2}av^2+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)v+2yv+\tfrac{1}{8}(a^3-4ab+8c)\right\}x$$

$$-\left\{yv^2-y^2-\left(\frac{a^2}{4}-b\right)y-d\right\}.$$

Setzt man jene trinomischen Factoren einzeln gleich Null, also:

$$x^2+(\tfrac{1}{2}a+v)x+y=0, \qquad (1)$$

$$x^2+(\tfrac{1}{2}a-v)x+\left(v^2-y-\left[\frac{a^2}{4}-b\right]\right)=0, \qquad (2)$$

so muss auch jener Rest gleich Null sein; da aber die Ausdrücke zwei willkührliche Grössen y und v enthalten, so kann man diese mittelst der Annahme $p=0$ und $q=0$ bestimmen; also:

$$-v^3-\tfrac{1}{2}av^2+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)v+2yv+\tfrac{1}{8}(a^3-4ab+8c)=0, \qquad (3)$$

$$-yv^2+y^2+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)y+d=0. \qquad (4)$$

Multiplicirt man (3) mit y, (4) mit v, so ist die Differenz:

$$-\tfrac{1}{2}ayv^2+y^2v+\tfrac{1}{8}(a^3-4ab+8c)y-dv=0.$$

Multiplicirt man noch (4) mit $\frac{1}{2}a$ und subtrahirt das Product von der Differenz, so erhält man:

$$(v-\tfrac{1}{2}a)(y^2-d)+cy=0 \text{ oder } \frac{-c}{v-\frac{1}{2}a}=y-\frac{d}{y}. \qquad (5)$$

Aus (4) folgt auch:

$$v^2=(y+\frac{d}{y})+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)=z+\left(\frac{a^2}{4}-b\right), \qquad (6)$$

aus (3):

$$2v[y-\tfrac{1}{2}(v^2-\left[\frac{a^2}{4}-b\right])]=\tfrac{1}{2}a(y+\frac{d}{y})-c=\tfrac{1}{2}az-c, \qquad (7)$$

aus (4):

$$y[y-(v^2-\left[\frac{a^2}{4}-b\right])]=-d$$

oder

$$(8)$$

$$\{y-\tfrac{1}{2}(v^2-\left[\frac{a^2}{4}-b\right])\}^2=\tfrac{1}{4}(v^2-\left[\frac{a^2}{4}-b\right])^2-d=\tfrac{1}{4}(z^2-4d).$$

Verbindet man die Gleichungen (6), (7) und (8) mit einander, indem man das Quadrat von (7) dem vierfachen Producte von (6) und (8) gleichsetzt, so erhält man:

$$(\tfrac{1}{2}az-c)^2=(z^2-4d).(z+\left[\frac{a^2}{4}-b\right])$$

oder

$$z^3-bz^2+(ac-4d)z-(a^2d+c^2-4bd)=0. \qquad (9)$$

Substituirt man für z wieder den früheren Werth $y+\frac{d}{y}$, so resultirt hieraus die reciproke Gleichung:

$$y^6-by^5+(ac-d)y^4-(a^2d+c^2-2bd)y^3$$
$$+d(ac-d)y^2-bd^2y+d^3=0, \qquad (10)$$

welche zu Wurzeln hat folgende sechs Werthe:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \frac{d}{y_0},\ \frac{d}{y_1},\ \frac{d}{y_2}.$$

Aus der Gleichung (1) geht ferner hervor, dass y_0 das Product zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung ist, mithin im Allgemeinen:

$$y_0 = x_0 x_1, \quad \frac{d}{y_0} = x_2 x_3;$$

$$y_1 = x_0 x_2, \quad \frac{d}{y_1} = x_1 x_3;$$

$$y_2 = x_0 x_3, \quad \frac{d}{y_2} = x_1 x_2.$$

Die Wurzeln sind alsdann:

$$x_0 = \pm \frac{y_0 y_1 y_2}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}}, \quad x_1 = \pm \frac{y_0 d}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}}, \quad x_2 = \pm \frac{y_1 d}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}},$$

$$x_3 = \pm \frac{y_2 d}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}};$$

jenachdem

$$\frac{y_0 y_1 y_2 + (y_0 + y_1 + y_2) d}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}} = \mp a;$$

oder

$$x_0 = \pm \frac{\sqrt{y_0 y_1 y_2} \cdot d}{y_0 y_1 y_2}, \quad x_1 = \pm \frac{\sqrt{y_0 y_1 y_2}}{y_0}, \quad x_2 = \pm \frac{\sqrt{y_0 y_1 y_2}}{y_1},$$

$$x_3 = \pm \frac{\sqrt{y_0 y_1 y_2}}{y_2},$$

jenachdem

$$\frac{y_0 y_1 y_2 + (y_0 + y_1 + y_2) d}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}} = \mp \frac{c}{\sqrt{d}}.$$

Um das Vorhergehende an einem Beispiele zu erläutern, sei

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Die Resolvente ist $z^3 - 14z^2 + 48 = 0$; man findet hieraus $z_0 = 2$, z_1 und $z_2 = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Es folgt nun weiter aus (10):

$$y_0 = 4, \qquad \frac{d}{y_0} = -2;$$

$$y_1 = (1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{5}), \quad \frac{d}{y_1} = (1 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{5});$$

$$y_2 = (1 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{5}), \quad \frac{d}{y_2} = (1 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{5}).$$

Da nun

$$\frac{y_0 y_1 y_2 + (y_0 + y_1 + y_2) d}{\sqrt{y_0 y_1 y_2 d}} = -(3+\sqrt{5}) - (3-\sqrt{5}) - (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3}).$$

$$= -8,$$

so ist:

$$x_0 = 3 + \sqrt{5}, \quad x_1 = 3 - \sqrt{5}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_3 = 1 - \sqrt{3}.$$

XXV.

Note über lineare Differentialgleichungen.

Von
Herrn *Simon Spitzer*,
Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

Wiederholt habe ich über die Integration linearer Differentialgleichungen der Formen:

$$y^{(n)} = x^m(Axy' + By),$$
$$y^{(n)} = x^m(Axy'' + Bxy' + Cy),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

geschrieben. Auf ganz ähnliche Art, als sich diese Gleichungen behandeln lassen, lassen sich auch Differentialgleichungen der folgenden Formen:

$$Axy^{(n)} + By^{(n-1)} = x^m y,$$
$$Ax^2y^{(n)} + Bxy^{(n-1)} + Cy^{(n-2)} = x^m y,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

behandeln, und diess soll hier in einem speciellen Falle gezeigt werden. Betrachtet man nämlich die Differentialgleichung:

$$Axy^{(n)} + By^{(n-1)} = x^m y, \qquad (1)$$

deren Integrale abhängig gemacht werden soll von dem Integrale der Differentialgleichung

$$Axz^{(n)} = x^m z, \qquad (2)$$

und zwar auf nachstehende Weise:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\, V du, \qquad (3)$$

vorausgesetzt, dass

$$z = \psi(x) \qquad (4)$$

das Integral der Gleichung (2) ist (welche sich einfacher auch so schreiben lässt: $Az^{(n)} = x^{m-1}z$), V eine Function von u und u_1, u_2 constante Zahlen bezeichnen.

Um diess zu beweisen, führe ich das in (3) stehende y in die Gleichung (1) ein, und erhalte dann:

$$\int_{u_1}^{u_2} V[Axu^n\psi^{(n)}(ux) + Bu^{n-1}\psi^{(n-1)}(ux) - x^m\psi(ux)]\,du = 0. \tag{5}$$

Nun ist vermöge der Gleichung (2):

$$Aux\psi^{(n)}(ux) = u^m x^m \psi(ux),$$

und bestimmt man hieraus $x^m\psi(ux)$ und führt den gefundenen Werth in (5) ein, so erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} V[Ax(u^n - u^{1-m})\,\psi^{(n)}(ux) + Bu^{n-1}\psi^{(n-1)}(ux)]\,du = 0. \tag{6}$$

Es ist aber:

$$Ax\int_{u_1}^{u_2} V(u^n - u^{1-m})\,\psi^{(n)}(ux)\,du = A\{V(u^n - u^{1-m})\,\psi^{(n-1)}(ux)\}_{u_1}^{u_2}$$
$$- A\int_{u_1}^{u_2} \psi^{(n-1)}(ux)\frac{d}{du}[V(u_n - u^{1-m})]\,du,$$

und daher gestattet die Gleichung (6) auch folgende Schreibweise:

$$A\{V(u^n - u^{1-m})\,\psi^{(n-1)}(ux)\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+\int_{u_1}^{u_2} \psi^{(n-1)}(ux)\{Bu^{n-1}V - A\frac{d}{du}[V(u^n - u^{1-m})]\}\,du = 0, \tag{7}$$

und dieser Gleichung genügt man, wenn man V so wählt, dass

$$Bu^{n-1}V = A\frac{d}{du}[V(u^n - u^{1-m})] \tag{8}$$

wird, und u_1, u_2 so, dass

$$V(u^n - u^{1-m})\,\psi^{(n-1)}(ux) = 0 \tag{9}$$

ist. Aus (8) folgt:

$$\frac{V'}{V} = \frac{(B - An)u^{m+n-1} - A(m-1)}{A(u^{m+n} - u)},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{V'}{V} = \frac{m-1}{u} + \frac{[B + A - (m+n)A]u^{m+n-2}}{A(u^{m+n-1} - 1)};$$

folglich ist:

$$V = u^{m-1}(1-u^{m+n-1})^{\frac{B}{A(m+n-1)}-1} \tag{10}$$

und

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\, u^{m-1}(1-u^{m+n-1})^{\frac{B}{A(m+n-1)}-1} du$$

das Integral der vorgelegten Gleichung. Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Gleichung

$$(1-u^{m+n-1})^{\frac{B}{A(m+n-1)}} \psi^{(n-1)}(ux) = 0.$$

Beispiel. Sei

$$A=1, \quad B=5, \quad m=3, \quad n=3;$$

so hat man die Differentialgleichung:

$$xy''' + 5y'' = x^3 y.$$

Ist nun

$$\psi'''(x) = x^2 \psi(x),$$

so ist:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^2 \psi(ux)\, du.$$

Diess lässt sich einfacher darstellen, denn man hat:

$$u^2 x^2 \psi(ux) = \psi'''(ux),$$

folglich ist:

$$y = \frac{1}{x^2}\int_{u_1}^{u_2} \psi'''(ux)\, du = \left\{\frac{\psi''(ux)}{x^3}\right\}_{u_1}^{u_2};$$

u_1, u_2 ergeben sich aus der Gleichung

$$(1-u^5)\,\psi''(ux) = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgen für u fünf Werthe, nämlich die fünf Wurzeln der Einheit. Es lässt sich leicht nachweisen, dass auch

$$y = \frac{\psi''(x)}{x^3}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$xy''' + 5y'' = x^3 y$$

sei. Denn aus obigem y folgt:

$$y' = \frac{x\psi'''(x) - 3\psi''(x)}{x^4} = \frac{x^3\psi(x) - 3\psi''(x)}{x^4},$$

$$y'' = \frac{-4x^3\psi(x) + x^4\psi'(x) + 12\psi''(x)}{x^5},$$

$$y''' = \frac{20x^3\psi(x) - 5x^4\psi'(x) + (x^5 - 60)\psi''(x)}{x^6};$$

und diese machen, in die vorgelegte Gleichung eingeführt, selbe zu einer identischen.

XXVI.

Miscellen.

Ueber eine elementare geometrische Aufgabe.

Von dem Herausgeber.

Vor Kurzem hatte ich Veranlassung, mich einige Augenblicke mit der folgenden leichten geometrischen Aufgabe zu beschäftigen:

Ein gleichschenkliges Dreieck soll construirt und berechnet werden aus der auf einer der beiden gleichen Seiten senkrecht stehenden Höhe h und aus der Geraden m, welche den Halbirungspunkt derselben Seite mit der Gegenecke verbindet.

Die mir vorliegenden geometrischen und trigonometrischen Auflösungen waren zum Erschrecken weitläufig und brachten Transversalen nebst den Verhältnissen der Abschnitte derselben, merkwürdige Punkte des Dreiecks und, Gott weiss, was sonst noch für Spitzfindigkeiten der neueren Geometrie, ferner bei der trigonometrischen Auflösung den berühmten Tangentensatz und viele sinnreiche Combinationen von Dreiecken in Anwendung. Ich dachte im Stillen an die alte Phrase: dass doch so viele Menschen vor den Bäumen den Wald nicht sehen, und löste die Aufgabe auf folgende Art, was vielleicht auch schon anderwärts geschehen ist, worauf es jetzt nicht ankommen kann.

Es sei ABC in Taf. III. Fig. 8. das gesuchte Dreieck mit den gleichen Seiten AC und BC, E der Mittelpunkt von AC, BD die von B auf AC gefällte Senkrechte, also $BD=h$ und $BE=m$ gegeben. Fällt man von E auf BC die Senkrechte EF, so sind die Dreiecke ECF und BCD offenbar einander ähnlich, also: $EF:BD=CE:BC=1:2$, folglich $EF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}h$, worin die ganze Weisheit besteht.

Um nun die Aufgabe durch Construction zu lösen, ziehe man, wie Taf. III. Fig. 9. zeigt, eine Gerade $BE=m$, beschreibe über derselben als Durchmesser einen Kreis, trage in denselben $BD=h$ und $EF=\frac{1}{2}h$ als Sehnen ein, ziehe DE und BF, bis diese Linien sich in C schneiden, mache $CA=CB$ und ziehe AB, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis und Determination ergeben sich von selbst. Auch auf die Betrachtung einzelner Fälle lasse ich mich bei solchen Dingen hier natürlich gar nicht weiter ein.

Zur trigonometrischen Lösung bezeichne man den Winkel BED durch φ, den Winkel ACB an der Spitze des zu bestimmenden gleichschenkligen Dreiecks durch ψ, so ist:

$$\sin\varphi = \frac{h}{m}, \quad \sin(\varphi - \psi) = \frac{h}{2m} = \tfrac{1}{2}\sin\varphi;$$

und die höchst einfachen Formeln, in denen die ganze Auflösung enthalten ist, sind also:

$$\sin\varphi = \frac{h}{m}, \quad \sin(\varphi - \psi) = \tfrac{1}{2}\sin\varphi;$$

wodurch man ψ findet. Bezeichnet man die beiden gleichen Schenkel durch x, die Grundlinie durch y; so ist:

$$x = \frac{h}{\sin\psi}, \quad y = 2x\sin\tfrac{1}{2}\psi = \frac{h}{\cos\tfrac{1}{2}\psi}.$$

Setzen wir, um einen besonderen Fall zu betrachten, $h = 35$ und $m = 48$, so erhält die sehr einfache Rechnung die folgende Form, wobei ich mich der trefflichen fünfstelligen Tafeln von Hoüel*) bediene, die namentlich auch Schulen nicht dringend genug, und weit mehr als alle sonst noch bis jetzt erschienenen fünfstelligen Tafeln, empfohlen werden können:

$\log h = 1{,}54407$	
$\log m = 1{,}68124$	
$\log\sin\varphi = 9{,}86283$	
$\log 2 = 0{,}30103$	$\varphi = 46^\circ.49'$
$\log\sin(\varphi-\psi) = 9{,}56180$	$\varphi - \psi = 21\ .23$
$\log\sin\psi = 9{,}63292$	$\psi = 25\ .26$
$\log\cos\tfrac{1}{2}\psi = 9{,}98921$	$\tfrac{1}{2}\psi = 12\ .43$
$\log x = 1{,}91115$	$x = 81{,}50-$
$\log y = 1{,}55486$	$y = 35{,}88+$

Ich habe absichtlich nur bis auf Minuten und ohne Proportionaltheile gerechnet. Man rechnet mit den schönen Tafeln von Hoüel innerhalb des ihnen angewiesenen Kreises der Genauigkeit mit sehr grosser Sicherheit, und muss nur auch stets die Rechnungen auf eine zweckmässige Weise, indem man möglichst wenig schreibt, anordnen, worauf namentlich auch bei dem Unterrichte auf Schulen weit mehr Rücksicht und Bedacht genommen werden sollte; thäten die Lehrer dies, dann würde man von praktischen und technischen Behörden nicht so oft die Klage hören, dass die bei ihnen eintretenden Zöglinge nicht rechnen können.

*) Tables de Logarithmes à cinq décimales. Par J. Hoüel. Paris. 1858. 8°.

Endlich wird man algebraisch die Aufgabe auf folgende Art lösen. Es ist:

$$CF:CD = CE:BC = 1:2,$$

also $CD = 2.CF$; aber, wenn wir der Kürze wegen $x = 2u$ setzen:

$$CD = CE + DE = u + \sqrt{m^2 - h^2},$$

$$CF = BC - BF = 2u - \sqrt{m^2 - \tfrac{1}{4}h^2};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$u + \sqrt{m^2 - h^2} = 4u - 2\sqrt{m^2 - \tfrac{1}{4}h^2},$$

woraus:

$$3u = \sqrt{m^2 - h^2} + 2\sqrt{m^2 - \tfrac{1}{4}h^2},$$

oder:

$$3u = \sqrt{(m-h)(m+h)} + 2\sqrt{(m - \tfrac{1}{2}h)(m + \tfrac{1}{2}h)},$$

nach welcher, freilich zur bequemen logarithmischen Rechnung nicht sehr geeigneten Formel man auf folgende Art rechnet, wenn der Kürze wegen:

$$v = \sqrt{(m-h)(m+h)}, \quad w = 2\sqrt{(m - \tfrac{1}{2}h)(m + \tfrac{1}{2}h)};$$

also:

$$3u = v + w$$

gesetzt wird:

$$\begin{array}{rlrl}
m = & 48,0 & & \\
h = & 35,0 & & \\
\tfrac{1}{2}h = & 17,5 & & \\
m - h = & 13,0 & m - \tfrac{1}{2}h = & 30,5 \\
m + h = & 83,0 & m + \tfrac{1}{2}h = & 65,5 \\
\log(m-h) = & 1,11394 & \log(m - \tfrac{1}{2}h) = & 1,48430 \\
\log(m+h) = & 1,91908 & \log(m + \tfrac{1}{2}h) = & 1,81624 \\
\hline
 & 3,03302 & & 3,30054 \\
\log v = & 1,51651 & & 1,65027 \\
 & & \log 2 = & 0,30103 \\
\hline
 & & \log w = & 1,95130
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
v = & 32,85 \\
w = & 89,39 \\
\hline
3u = & 122,24 \\
6u = & 244,48 \\
x = & 81,49 +
\end{array}$$

also sehr nahe ganz wie oben, wo $x = 81,50-$ gefunden wurde, wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die Rechnung, wie schon bemerkt, ohne alle Proportionaltheile oder Differenzen geführt worden ist. Die Bequemlichkeit und Genauigkeit der ausgezeichneten Tafeln von Hoüel hat sich mir bei allen Rechnungen, wo ich sie gebraucht habe, bewährt, und ich kann dieselben daher nur in jeder Weise nochmals empfehlen.

Wie man algebraisch y findet, ist klar, weil

$$AD = u - \sqrt{m^2 - h^2} = u - v, \quad \text{also} \quad y = \sqrt{h^2 + (u-v)^2}$$

ist. Weil in dem obigen besonderen Falle

$$h=35;\quad u=40{,}75;\quad v=32{,}85;\quad u-v=7{,}9$$

ist; so ist:

$$y=\sqrt{1287{,}41}=35{,}88$$

wieder ganz wie oben.

Solche ganz elementare Mittheilungen wie die vorstehende entspringen bloss dem mir eigenen lebhaften pädagogischen und didaktischen Interesse, sind aber den Zwecken des Archivs keineswegs entgegen und sollen daher künftig noch öfter als bisher einen Platz finden, wenn sich irgend Gelegenheit dazu darbietet.

Ich wünschte durch das Obige zugleich bei Gelegenheit einer ganz elementaren Aufgabe namentlich auch den höheren Schulanstalten die trefflichen fünfstelligen Tafeln von Hoüel, die eine Verpflanzung auf deutschen Boden sehr verdienten, von Neuem in Erinnerung zu bringen und dringend zu empfehlen.

Für die Besitzer der drei ersten Stereotyp-Ausgaben von **Schrön's siebenstelligen Logarithmen.**

Nachstehend verzeichnete Fehler sind bis jetzt in Schrön's siebenstelligen Logarithmen aufgefunden und in der so eben erschienenen vierten Stereotyp-Ausgabe berichtigt worden.

I. In der ersten Ausgabe (in der zweiten und dritten bereits berichtigt):

1) Taf. I. Seite 29. Fusstafel, Spalte ° ′ ″, Z. 1. statt 3.35.40 lies: 0.35.40.
2) „ I. „ 174. Fusstafel, Spalte ° ′ ″, Z. 1. statt 1.15.40 lies: 0.15.40.
3) „ I. „ 174. Fusstafel, Spalte ° ′ ″, Z. 3. statt 0.36.40 lies: 2.36.40.
4) „ II. „ 324. Differ. zwisch. log. sin. 20° 6′ 30″ und 40″ statt 675 lies: 575.
5) „ I. „ 136. log. 75000 statt 8750613 lies: 875061$\bar{3}$.

Im Texte. In der Einleitung zu Taf. I. II.

a) S. 8. linke Spalte, §. 50., Z. 2. statt 0,334238 lies: ,0334238.
b) S. 13. rechte Spalte, §. 77. 4., Z. 4. statt $D=D\pm 1$ lies: $D=D_r\pm 1$.

II. In der zweiten Ausgabe (in der dritten bereits berichtigt):

6) Taf. I. Seite 9. unter PP. zu 366. Z. 8. statt 222,8 lies: 292,8. In der ersten und in der ungarischen Ausgabe befindet sich die richtige Zahl 292,8.

III. In den ersten drei Ausgaben:

7) Taf. III. Seite 76. log. nat. 1,0009 statt 0,00089 95952 42836 0 lies: 0,00089 95952 42836 1.
8) „ II. „ 236. Differ. zwisch. log tang 5° 29′ 10″ und 20″ statt 2112 lies: 2212.

XXVII.

Wichtiger allgemeiner Satz von den Flächen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

In der Abhandlung Thl. XL. Nr. XXI. habe ich S. 313. gesagt, dass ich auf das dort für das Ellipsoid bewiesene Theorem von den arithmetischen Mitteln der reciproken Krümmungshalbmesser und der Krümmungshalbmesser der Normalschnitte späterhin in allgemeinerer Beziehung zurückkommen und namentlich untersuchen würde, in wie fern dieses Theorem, welches ich in mehrfacher Rücksicht für wichtig und merkwürdig halte, einer Verallgemeinerung und Erweiterung auf Flächen überhaupt fähig sei. Dieses Versprechen zu erfüllen, ist die Bestimmung der vorliegenden Abhandlung. Ich könnte mich dabei unmittelbar an die in meiner Abhandlung über die „Allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen" in Thl. XXVIII. Nr. VIII. gegebenen allgemeinen Ausdrücke für den Krümmungskreis eines beliebigen Normalschnitts einer Fläche anschliessen, halte es aber, um die vorliegende Abhandlung möglichst selbstständig für sich und durch sich selbst verständlich zu machen, für besser und auch dem Zwecke des Archivs entsprechend, hier nicht bloss auf jene Abhandlung zu verweisen, sondern einige der dort gegebenen Entwickelungen, so weit sie hier Anwendung finden, kurz zu wiederholen, wodurch kein grosser Raum in Anspruch genommen werden wird.

§. 2.

Indem wir immer bloss ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde legen und die veränderlichen oder laufenden Coordinaten stets durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen, sei

$$1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

im Allgemeinen die Gleichung der gegebenen Fläche.

Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt dieser Fläche sei (xyz), so dass also auch

$$2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z) = 0$$

ist; wenn aber $f(x, y, z)$ im Allgemeinen bloss als eine Function dreier veränderlicher Grössen betrachtet wird, soll im Folgenden

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = f(x, y, z)$$

gesetzt werden, wobei wir noch besonders bemerken, dass alle späterhin vorkommende Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind.

Die Gleichung der Berührungsebene der Fläche im Punkte (xyz) ist nach den allgemeinen Lehren der analytischen Geometrie (Thl. XXX. S. 425. Nr. 61)):

$$4) \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x) + \frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y) + \frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z) = 0.$$

Die Gleichung einer beliebigen durch den Punkt (xyz) gelegten Ebene sei:

$$5) \ldots\ldots \quad A(\mathfrak{x}-x) + B(\mathfrak{y}-y) + C(\mathfrak{z}-z) = 0.$$

Dann sind die Gleichungen der Berührenden der Curve, in welcher die Fläche von dieser Ebene geschnitten wird, in dem Punkte (xyz) dieser Curve:

$$6) \ldots \quad \begin{cases} A(\mathfrak{x}-x) + B(\mathfrak{y}-y) + C(\mathfrak{z}-z) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x) + \dfrac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y) + \dfrac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$7) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{x}-x = G\left(B\dfrac{\partial u}{\partial z} - C\dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{y}-y = G\left(C\dfrac{\partial u}{\partial x} - A\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{z}-z = G\left(A\dfrac{\partial u}{\partial y} - B\dfrac{\partial u}{\partial x}\right); \end{cases}$$

also sind:

$$8) \ldots \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}$$

die Gleichungen der in Rede stehenden Berührenden, wobei wir bemerken, dass wir die Curve, in welcher die Fläche von der durch die Gleichung 5) charakterisirten Ebene geschnitten wird, im Folgenden der Kürze wegen überhaupt den Schnitt nennen wollen.

Ist nun:

$$9) \ldots \quad A'(\mathfrak{x}-x)+B'(\mathfrak{y}-y)+C'(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der Normalebene des Schnitts in dem Punkte (xyz), welche also auf der durch die Gleichungen 8) charakterisirten Berührenden des Schnitts senkrecht steht; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$10) \ldots \quad \begin{cases} A'=G'(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}), \\ B'=G'(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}), \\ C'=G'(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}); \end{cases}$$

und folglich nach 9):

$$11) \quad (B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{x}-x)+(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{y}-y)+(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der Normalebene des Schnitts in dem Punkte (xyz).

Also sind:

$$12) \quad \begin{gathered} A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0, \\ (B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{x}-x)+(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{y}-y)+(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{z}-z)=0 \end{gathered}$$

die Gleichungen der Normale des Schnitts in dem Punkte (xyz); und folglich, wenn G'' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$13) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}-x=G''\{B(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})-C(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})\}, \\ \mathfrak{y}-y=G''\{C(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})-A(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})\}, \\ \mathfrak{z}-z=G''\{A(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})-B(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})\} \end{cases}$$

oder:

14)

$$\mathfrak{x}-x=G''\{A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}\},$$

$$\mathfrak{y}-y=G''\{B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}\},$$

$$\mathfrak{z}-z=G''\{C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}\};$$

also sind:

$$15)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathfrak{x}-x}{A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}}\\[2ex]=\dfrac{\mathfrak{y}-y}{B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}}\\[2ex]=\dfrac{\mathfrak{z}-z}{C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}}\end{array}\right.$$

die Gleichungen der Normale des Schnitts in dem Punkte (xyz) desselben.

§. 3.

Für einen zweiten Punkt $(x_1y_1z_1)$ des Schnitts, wo also:

$$16) \ldots . \quad f(x_1, y_1, z_1)=0, \quad u_1=f(x_1, y_1, z_1)$$

und:

$$17) \ldots . \quad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

ist, sind die Gleichungen der Normale des Schnitts in diesem Punkte ganz eben so wie vorher:

$$18)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathfrak{x}-x_1}{A(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}\\[2ex]=\dfrac{\mathfrak{y}-y_1}{B(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}\\[2ex]=\dfrac{\mathfrak{z}-z_1}{C(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial z_1}};\end{array}\right.$$

und setzen wir also der Kürze wegen:

19)

$$U = A(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z}) - (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$V = B(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z}) - (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$W = C(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z}) - (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial u}{\partial z}$$

und

20)

$$U_1 = A(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + C\frac{\partial u_1}{\partial z_1}) - (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$V_1 = B(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + C\frac{\partial u_1}{\partial z_1}) - (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial u_1}{\partial y_1},$$

$$W_1 = C(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + C\frac{\partial u_1}{\partial z_1}) - (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial u_1}{\partial z_1};$$

so sind die Gleichungen der beiden Normalen des Schnitts in den Punkten (xyz) und $(x_1y_1z_1)$:

$$21) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}-x}{U} = \dfrac{\mathfrak{y}-y}{V} = \dfrac{\mathfrak{z}-z}{W}, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{x}-x_1}{U_1} = \dfrac{\mathfrak{y}-y_1}{V_1} = \dfrac{\mathfrak{z}-z_1}{W_1}; \end{cases}$$

oder:

$$22) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}-x}{U} = \dfrac{\mathfrak{y}-y}{V} = \dfrac{\mathfrak{z}-z}{W}, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{x}-x-(x_1-x)}{U_1} = \dfrac{\mathfrak{y}-y-(y_1-y)}{V_1} = \dfrac{\mathfrak{z}-z-(z_1-z)}{W_1}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man, wenn X, Y, Z die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Normalen bezeichnen:

$$23) \quad \frac{X-x}{U} = \frac{Y-y}{V} = \frac{Z-z}{W} = \frac{V_1(x_1-x) - U_1(y_1-y)}{UV_1 - VU_1},$$

oder, wie man nach einer leichten Transformation findet:

24)

$$\frac{X-x}{U}=\frac{Y-y}{V}=\frac{Z-z}{W}=\frac{V-U\frac{y_1-y}{x_1-x}+(V_1-V)-(U_1-U)\frac{y_1-y}{x_1-x}}{U\frac{V_1-V}{x_1-x}-V\frac{U_1-U}{x_1-x}}.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist:

$$u_1-u=\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(z_1-z)+R,$$

wo R eine Grösse bezeichnet, die, wie aus der Form des Restes der Taylor'schen Reihe *) und aus der allgemeinen Form des vollständigen Differentials von selbst erhellet, in Bezug auf die Grössen

$$x_1-x,\quad y_1-y,\quad z_1-z$$

von der zweiten Ordnung ist. Weil nun aber nach dem Obigen $u_1-u=0$ ist, so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(z_1-z)=-R,$$

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0;$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}=-\frac{R}{x_1-x},$$

$$A+B\frac{y_1-y}{x_1-x}+C\frac{z_1-z}{x_1-x}=0;$$

aus denen sich leicht:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\frac{CR}{x_1-x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}-\frac{\frac{BR}{x_1-x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}$$

ergiebt. Weil R in Bezug auf x_1-x, y_1-y, z_1-z von der zweiten Ordnung ist, so nähern die Grössen

*) M. s. meine „Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. I. S. 185. und S. 186."

$$\frac{BR}{x_1-x} \text{ und } \frac{CR}{x_1-x}$$

sich offenbar der Null, wenn x_1-x sich der Null nähert, und nach dem Obigen ist also, immer unter der Voraussetzung, dass x_1-x sich der Null nähert:

$$\text{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}, \quad \text{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$U_1-U=A\{A\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\}$$
$$-(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$V_1-V=B\{A\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\}$$
$$-(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist aber:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(z_1-z)+R_x,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(z_1-z)+R_y,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_1-z)+R_z;$$

wo die Grössen

$$R_x,\quad R_y,\quad R_z$$

in Bezug auf

$$x_1-x,\quad y_1-y,\quad z_1-z$$

von der zweiten Ordnung sind. Weil nun:

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}+\frac{R_x}{x_1-x},$$

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}+\frac{R_y}{x_1-x},$$

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}+\frac{R_z}{x_1-x}$$

und, immer unter der Voraussetzung, dass x_1-x sich der Null nähert:

$$\operatorname{Lim}\frac{R_x}{x_1-x}=0,\quad \operatorname{Lim}\frac{R_y}{x_1-x}=0,\quad \operatorname{Lim}\frac{R_z}{x_1-x}=0$$

ist, so ist:

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x};$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Wenn wir nun der Kürze wegen:

25)

$$Q^2=(A^2+B^2+C^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})^2$$

$$=(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})^2+(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})^2+(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})^2,$$

wo Q eine positive Grösse bezeichnen soll, und:

$$26) \ldots \quad \Theta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y})^2$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(C\frac{\partial u}{\partial x} - A\frac{\partial u}{\partial z})^2$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(A\frac{\partial u}{\partial y} - B\frac{\partial u}{\partial x})^2$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y})(C\frac{\partial u}{\partial x} - A\frac{\partial u}{\partial z})$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(C\frac{\partial u}{\partial x} - A\frac{\partial u}{\partial z})(A\frac{\partial u}{\partial y} - B\frac{\partial u}{\partial x})$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(A\frac{\partial u}{\partial y} - B\frac{\partial u}{\partial x})(B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y})$$

setzen, so ergiebt sich mittelst des Obigen nach leichter Rechnung:

$$V - U \operatorname{Lim} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{CQ^2}{B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y}}$$

und

$$U \operatorname{Lim} \frac{V_1 - V}{x_1 - x} - V \operatorname{Lim} \frac{U_1 - U}{x_1 - x} = \frac{C(A^2 + B^2 + C^2)\Theta}{B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Weil aber bekanntlich der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (xyz) desselben die Gränze ist, welcher der Durchschnittspunkt der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Normale mit der dem Punkte (xyz) entsprechenden Normale sich nähert, wenn der Punkt $(x_1y_1z_1)$ in dem Schnitte dem Punkte (xyz) immer näher und näher rückt, also $x_1 - x$ sich der Null nähert, und unter dieser Voraussetzung offenbar

$$\operatorname{Lim}(U_1 - U) = 0, \quad \operatorname{Lim}(V_1 - V) = 0;$$

also auch:

$$\operatorname{Lim}(U_1 - U). \operatorname{Lim} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0$$

ist; so ist nach 24), wenn die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (xyz) durch $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ bezeichnet werden, offenbar:

$$\frac{\mathrm{X} - x}{U} = \frac{\mathrm{Y} - y}{V} = \frac{\mathrm{Z} - z}{W} = \frac{V - U \operatorname{Lim} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}}{U \operatorname{Lim} \frac{V_1 - V}{x_1 - x} - V \operatorname{Lim} \frac{U_1 - U}{x_1 - x}}.$$

also nach dem Obigen:

$$27) \ldots \frac{\mathrm{X}-x}{U}=\frac{\mathrm{Y}-y}{V}=\frac{\mathrm{Z}-z}{W}=\frac{Q^2}{(A^2+B^2+C^2)\Theta}.$$

Wenn R den Halbmesser des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (xyz) bezeichnet, so ist:

$$R^2=(\mathrm{X}-x)^2+(\mathrm{Y}-y)^2+(\mathrm{Z}-z)^2,$$

also:

$$R^2=\frac{(U^2+V^2+W^2)Q^4}{(A^2+B^2+C^2)^2\Theta^2}.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber, dass

$$U^2+V^2+W^2=(A^2+B^2+C^2)Q^2$$

ist; also ist:

$$28) \ldots\ldots\ldots R^2=\frac{Q^6}{(A^2+B^2+C^2)\Theta^2},$$

und folglich:

$$29) \ldots\ldots\ldots R=\pm\frac{Q^3}{\Theta\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Θ eine positive oder eine negative Grösse ist.

§. 4.

Wenn die durch die Gleichung

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

charakterisirte Ebene einen Normalschnitt bestimmen, also auf der durch die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0$$

charakterisirten Berührungsebene der Fläche senkrecht stehen soll, so muss nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$30) \ldots\ldots\ldots A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

sein. Daher ist nach 19) in diesem Falle:

$$31) \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} U &= -(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x},\\ V &= -(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y},\\ W &= -(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\right.$$

und nach 25):

$$32) \ldots Q^2=(A^2+B^2+C^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\};$$

also nach 27):

33)

$$\mathbf{X}-x=-\frac{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{\Theta},$$

$$\mathbf{Y}-y=-\frac{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{\Theta},$$

$$\mathbf{Z}-z=-\frac{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{\Theta}$$

und nach 28):

$$34) \quad R^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^3}{\Theta^2},$$

also:

$$35) \quad R=\pm\frac{(A^2+B^2+C^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\Theta},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem Θ eine positive oder eine negative Grösse ist.

Nehmen wir an, dass der Normalschnitt durch die, durch die Gleichungen:

$$36) \ldots\ldots\ldots \frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirte Gerade bestimmt werde, durch welche Gerade also die durch die Gleichung

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

charakterisirte Normalebene gelegt ist; so haben wir die beiden Geichungen:

$$37) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0, \\ A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0; \end{array} \right.$$

und können also:

$$38) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} A=\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}, \\ B=\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}, \\ C=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right.$$

setzen, woraus sich:

$$A^2+B^2+C^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial z})^2$$

ergiebt. Nehmen wir aber die durch die Gleichungen 36) charakterisirte Gerade in der Berührungsebene an, so ist:

$$39) \ldots\ldots \quad \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

und folglich:

$$A^2+B^2+C^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

also nach 33):

$$40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta}, \\ \mathrm{Y}-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta} \\ \mathrm{Z}-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta}; \end{array} \right.$$

und nach 34):

$$41) \ldots \quad R^2=\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^5}{\Theta^2},$$

also:

$$42) \ldots \quad R=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{5}{2}}}{\Theta},$$

das obere oder untere Vorzeichen genommen, jenachdem Θ positiv oder negativ ist.

Nun ist aber, wie man mit Rücksicht auf die Gleichung 39) leicht findet:

$$B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}=-\cos\theta\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}=-\cos\omega\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos\overline{\omega}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\};$$

also, wenn der Kürze wegen:

$$43) \ldots \quad \Omega=\cos\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos\overline{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

gesetzt wird, nach 26):

$$44) \ldots \quad \Theta=\Omega\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2,$$

und folglich nach 40):

$$45) \ldots \quad X-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\Omega},\quad Y-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\Omega},\quad Z-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\Omega};$$

und nach 41):

$$46) \ldots \quad R^2=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\Omega^2},$$

also:

$$47) \ldots \quad R=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}{\Omega},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die Grösse Ω positiv oder negativ ist.

§. 5.

Von dem Punkte (xyz) lassen wir jetzt eine Gerade, die als gegeben oder als fest und unveränderlich betrachtet wird, ausgehen, und bezeichnen deren Gleichungen durch:

$$48) \ldots\ldots\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\beta}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\gamma},$$

wo α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel sind, welche diese Gerade mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einschliesst; soll aber diese Gerade in der Berührungsebene liegen, so muss:

$$49) \ldots\ldots\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=0$$

sein.

Von dem Punkte (xyz) lassen wir eine zweite durch die Gleichungen:

$$50) \ldots\ldots\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirte Gerade ausgehen, wo θ, ω, $\overline{\omega}$ die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel sind; soll aber auch diese Gerade in der Berührungsebene liegen, so muss:

$$51) \ldots\ldots\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega}=0$$

sein.

Den Winkel, welchen die Gerade 50) mit der Geraden 48) einschliesst, indem wir diesen Winkel von der Geraden 48) an, nach einer bestimmten Richtung hin, von 0 bis 360° zählen, wollen wir durch w bezeichnen; so ist nach einer bekannten Formel, w mag zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegen:

$$52) \ldots\quad \cos w=\cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\overline{\omega},$$

und wir haben daher die drei folgenden Gleichungen:

$$53) \ldots \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega}=0, \\ \cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\overline{\omega}=\cos w, \\ \cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1; \end{array}\right.$$

aus denen wir jetzt $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ bestimmen wollen.

Zu dem Ende setzen wir:

$$\mathfrak{A}=\cos\alpha\cos w,$$
$$\mathfrak{B}=\cos\beta\cos w,$$
$$\mathfrak{C}=\cos\gamma\cos w;$$

dann ist offenbar:

$$\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$
$$\mathfrak{A}\cos\alpha+\mathfrak{B}\cos\beta+\mathfrak{C}\cos\gamma=\cos w;$$

und setzen wir nun ferner:

$$\cos\theta=\mathfrak{A}+\mathfrak{X},$$
$$\cos\omega=\mathfrak{B}+\mathfrak{Y},$$
$$\cos\bar{\omega}=\mathfrak{C}+\mathfrak{Z};$$

so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\bar{\omega}$$
$$=\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{Z},$$

$$\cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\bar{\omega}$$
$$=\mathfrak{A}\cos\alpha+\mathfrak{B}\cos\beta+\mathfrak{C}\cos\gamma+\cos\alpha.\mathfrak{X}+\cos\beta.\mathfrak{Y}+\cos\gamma.\mathfrak{Z};$$

und folglich offenbar:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{Z}=0,$$
$$\cos\alpha.\mathfrak{X}+\cos\beta.\mathfrak{Y}+\cos\gamma.\mathfrak{Z}=0;$$

also, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\mathfrak{X}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right),$$
$$\mathfrak{Y}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right),$$
$$\mathfrak{Z}=G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right);$$

folglich:

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2$$
$$=G^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)^2\right\}$$
$$=G^2\left\{\begin{array}{c}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right](\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\\ -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)^2\end{array}\right\},$$

woraus:

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=G^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$

folgt. Ferner ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X}+\mathfrak{B}\mathfrak{Y}+\mathfrak{C}\mathfrak{Z}=(\cos\alpha.\mathfrak{X}+\cos\beta.\mathfrak{Y}+\cos\gamma.\mathfrak{Z})\cos w,$$

also:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X}+\mathfrak{B}\mathfrak{Y}+\mathfrak{C}\mathfrak{Z}=0;$$

und weil nun:

$$\cos\theta^2=\mathfrak{A}^2+2\mathfrak{A}\mathfrak{X}+\mathfrak{X}^2,$$
$$\cos\omega^2=\mathfrak{B}^2+2\mathfrak{B}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}^2,$$
$$\cos\overline{\omega}^2=\mathfrak{C}^2+2\mathfrak{C}\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}^2$$

ist; so erhält man durch Addition:

$$1=(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)+(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2),$$

also:

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2),$$

folglich, weil nach dem Obigen:

$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2=(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\cos w^2=\cos w^2$$

ist:

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=\sin w^2.$$

Daher hat man die Gleichung:

$$G^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}=\sin w^2,$$

woraus sich:

$$G=\pm\frac{\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\mathfrak{X}=\pm\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\mathfrak{y}=\pm\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\mathfrak{z}=\pm\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}};$$

und daher:

54)

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos w\pm\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\omega=\cos\beta\cos w\pm\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\bar{\omega}=\cos\gamma\cos w\pm\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

ergiebt, wo nun eine Bestimmung wegen der Vorzeichen erforderlich ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch die Normale des Punktes (xyz) und die feste Gerade 48) eine Ebene gelegt, deren Gleichung:

$$55) \quad \ldots\ldots \quad A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

sein mag, wo wir nun die beiden Gleichungen:

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0$$

haben, aus denen sich ergiebt, dass

56)

$$A=\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta,\quad B=\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma,\quad C=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha;$$

und daher nach 54), wenn der Kürze wegen noch

$$56^*) \ldots\ldots \quad P=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

gesetzt wird:

$$57) \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\theta \;=\cos\alpha\cos w \pm \frac{A}{P}\sin w, \\ \cos\omega = \cos\beta\cos w \pm \frac{B}{P}\sin w, \\ \cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos w \pm \frac{C}{P}\sin w \end{array}\right.$$

gesetzt werden kann.

Die Winkel w wollen wir nun von der Geraden 48) an nach der Seite der durch diese Gerade und die Normale des Punktes (xyz) gelegten Ebene hin, auf welcher der Anfangspunkt der Coordinaten nicht liegt, von 0 bis 360° zählen.

Die Entfernung eines beliebigen Punktes in der von dem Punkte (xyz) ausgehenden Geraden 50) von dem Punkte (xyz) sei ϱ, so sind die Coordinaten des durch diese Entfernung bestimmten Punktes in der in Rede stehenden Geraden:

$$x+\varrho\cos\theta,\quad y+\varrho\cos\omega,\quad z+\varrho\cos\overline{\omega}.$$

Setzt man für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Werthe 0, 0, 0 und $x+\varrho\cos\theta$, $y+\varrho\cos\omega$, $z+\varrho\cos\overline{\omega}$; so erhält die Function

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)$$

respective die Werthe:

$$-(Ax+By+Cz) \quad \text{und} \quad \varrho(A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega});$$

also, weil nach 55) offenbar

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0$$

ist, nach 57) respective die Werthe:

$$-(Ax+By+Cz) \quad \text{und} \quad \pm\frac{\varrho(A^2+B^2+C^2)\sin w}{P}.$$

Diese Werthe müssen nach einem bekannten Satze offenbar entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben, jenachdem $0<w<180^\circ$ oder $180^\circ<w<360^\circ$, also jenachdem $\sin w$ positiv oder negativ ist. Ist nun $Ax+By+Cz$ positiv, folglich $-(Ax+By+Cz)$

negativ, so muss man offenbar das obere Vorzeichen nehmen; ist dagegen $Ax+By+Cz$ negativ, folglich $-(Ax+By+Cz)$ positiv, so muss man offenbar das untere Vorzeichen nehmen. Also sind unter der gemachten Voraussetzung in den Formeln:

$$57^*) \ldots \left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \cos\alpha\cos w \pm \frac{A}{P}\sin w, \\ \cos\varpi = \cos\beta\cos w \pm \frac{B}{P}\sin w, \\ \cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos w \pm \frac{C}{P}\sin w \end{array}\right.$$

die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, jenachdem die Grösse:

$$58) \ldots\ldots\ldots\ldots Ax+By+Cz$$

$$= x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right) + z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z\cos\beta - y\cos\gamma) + \frac{\partial u}{\partial y}(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + \frac{\partial u}{\partial z}(y\cos\alpha - x\cos\beta)$$

$$= \left(y\frac{\partial u}{\partial z} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\alpha + \left(z\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\beta + \left(x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\gamma$$

positiv oder negativ ist.

§. 6.

Setzen wir wie früher:

$$59) \ldots \Omega = \cos\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos\varpi^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos\overline{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ 2\cos\theta\cos\varpi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\cos\varpi\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + 2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$

so ist nach 57*):

$$\Omega = \left(\cos\alpha\cos w \pm \frac{A}{P}\sin w\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+ \left(\cos\beta\cos w \pm \frac{B}{P}\sin w\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+ \left(\cos\gamma\cos w \pm \frac{C}{P}\sin w\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ 2\left(\cos\alpha\cos w \pm \frac{A}{P}\sin w\right)\left(\cos\beta\cos w \pm \frac{B}{P}\sin w\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$+ 2\left(\cos\beta\cos w \pm \frac{B}{P}\sin w\right)\left(\cos\gamma\cos w \pm \frac{C}{P}\sin w\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$
$$+ 2\left(\cos\gamma\cos w \pm \frac{C}{P}\sin w\right)\left(\cos\alpha\cos w \pm \frac{A}{P}\sin w\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$

und folglich, wie man nach gehöriger Entwickelung leicht findet, wenn der Kürze wegen:

60)

$$L = \cos\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ 2\cos\alpha\cos\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\cos\beta\cos\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\cos\gamma\cos\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

$$M = \mathrm{A}\cos\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{B}\cos\beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{C}\cos\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ (\mathrm{A}\cos\beta + \mathrm{B}\cos\alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$
$$+ (\mathrm{B}\cos\gamma + \mathrm{C}\cos\beta) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$
$$+ (\mathrm{C}\cos\alpha + \mathrm{A}\cos\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

$$N = \mathrm{A}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{B}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{C}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ 2\mathrm{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\mathrm{BC} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\mathrm{CA} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

gesetzt wird:

61) $$P^2\Omega = P^2 L \cos w^2 \pm 2PM \sin w \cos w + N \sin w^2,$$

oder, wenn wir:

62) . . . . . $$F = P^2 L, \quad G = \pm 2PM, \quad H = N$$

setzen, wo immer das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem die Grösse 58) positiv oder negativ ist:

63) . . . $$P^2\Omega = F\cos w^2 + G \sin w \cos w + H \sin w^2.$$

Bezeichnen wir wieder die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises des Normalschnitts in dem Punkte (xyz) durch X, Y, Z und den Krümmungshalbmesser durch R; so ist nach 45):

64)

$$\mathrm{X} - x = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x} P^2}{F\cos w^2 + G\sin w \cos w + H \sin w^2},$$

$$\mathrm{Y} - y = - \frac{\frac{\partial u}{\partial y} P^2}{F\cos w^2 + G\sin w \cos w + H \sin w^2},$$

$$Z-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}p^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

oder nach 56*):

65)

$$X-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2},$$

$$Y-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2},$$

$$Z-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2};$$

und nach 47):

$$66) \ldots R=\pm\frac{p^3}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

oder:

$$67) \ldots R=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die Grösse

$$F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2$$

positiv oder negativ ist.

Weil

$$\cos(w+180^0)=-\cos w, \quad \sin(w+180^0)=-\sin w$$

ist, so braucht man, wie aus den Formeln 64), 65) und 66), 67) auf der Stelle erhellet, den Winkel w bloss zwischen 0 und 180° zu nehmen oder bloss von 0 bis 180° wachsen zu lassen, was man im Folgenden stets festzuhalten hat.

§. 7.

Für die in 56) durch A, B, C bezeichneten Grössen gelten einige bemerkenswerthe Relationen, die wir hier sogleich entwickeln wollen, weil sie uns späterhin von Nutzen sein werden.

Weil nach 49) bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=0$$

ist, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta=-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

also:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2(\cos\gamma^2+\cos\alpha^2)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

und folglich, wie man sogleich übersieht, wenn man in den folgenden Gleichungen die Quadrate entwickelt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\gamma^2+\cos\alpha^2)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\alpha^2+\cos\beta^2)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)^2;$$

also:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\alpha^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\beta^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\gamma^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

oder nach 56) und 56*):

$$68)\ \ldots\ldots \begin{cases} A^2=P^2\sin\alpha^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \\ B^2=P^2\sin\beta^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \\ C^2=P^2\sin\gamma^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2. \end{cases}$$

Ferner findet man, wenn man die Producte:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)$$

entwickelt, und in den Entwickelungen der Reihe nach:

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta=-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha\right)$$

setzt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)$$
$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\alpha\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)$$
$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\beta\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta\right)$$
$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\gamma\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$

also nach 56) und 56*):

$$69) \ldots \begin{cases} AB = -P^2 \cos\alpha \cos\beta - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ BC = -P^2 \cos\beta \cos\gamma - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \\ CA = -P^2 \cos\gamma \cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

§. 8.

Wir wollen nun die Grösse

$$70) \ldots \quad U = F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2$$

einer genaueren Untersuchung unterwerfen, und wollen zunächst untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen diese Grösse verschwinden kann, wenn man sich w in dem Intervalle 0 und 180°, innerhalb welches man bekanntlich w bloss zu nehmen braucht, stetig verändern lässt.

Man kann U auf folgende Art ausdrücken:

$$U = \cos w^2 (F + G\tan w + H\tan w^2),$$

und wird nun

$$F + G\tan w + H\tan w^2 = 0$$

gesetzt, so ergiebt sich durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung in Bezug auf tang w als unbekannte Grösse:

$$71) \ldots\ldots \quad \tan w = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 - 4FH}}{2H}.$$

Wenn nun

$$G^2 - 4FH < 0$$

ist, so hat die Gleichung:

$$F + G\tan w + H\tan w^2 = 0$$

nur imaginäre Wurzeln, und die Grösse

$$F + G\tan w + H\tan w^2$$

kann also niemals verschwinden, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt. Wenn, wie wir vorausgesetzt haben,

$$G^2 - 4FH < 0$$

ist, so kann offenbar keine der beiden Grössen F, H verschwin-

den, und diese beiden Grössen müssen auch nothwendig gleiche Vorzeichen haben. Die Grösse

$$U = \cos w^2 (F + G \operatorname{tang} w + H \operatorname{tang} w^2)$$

könnte nun auch noch verschwinden für $\cos w = 0$; für $\cos w = 0$ erhält aber die Grösse

$$U = F \cos w^2 + G \sin w \cos w + H \sin w^2$$

offenbar den Werth H, und könnte also nur verschwinden, wenn $H = 0$ wäre, was, wie schon erinnert, unter der gemachten Voraussetzung nicht der Fall sein kann. Wenn also

$$G^2 - 4FH < 0$$

ist, so kann U niemals verschwinden, wenn man w sich von 0 bis 180° stetig verändern lässt, woraus ferner unmittelbar und ganz von selbst hervorgeht, dass auch, wenn man w sich in der angegebenen Weise verändern lässt, U niemals sein Zeichen ändern kann. Für $w = 0$ und $w = 180°$ und für $w = 90°$ wird respective $U = F$ und $U = H$, woraus sich ergiebt, dass U, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt, mit F und H, welche, wie wir schon wissen, selbst gleiche Vorzeichen haben, stets gleiches Vorzeichen hat.

Wenn ferner

$$G^2 - 4FH \overset{=}{>} 0$$

ist, so hat die Gleichung

$$F + G \operatorname{tang} w + H \operatorname{tang} w^2 = 0$$

eine *) reelle Wurzel oder zwei reelle Wurzeln, und die Grösse

$$F + G \operatorname{tang} w + H \operatorname{tang} w^2,$$

also auch die Grösse U, wird folglich jedenfalls ein oder zwei Mal verschwinden, wenn man w sich von 0 bis 180° stetig verändern lässt. Da in diesem Falle auch die Werthe $F = 0$ und $H = 0$ nicht wie vorher ausgeschlossen werden können, so kann U auch verschwinden für $\cos w = 0$ und $\sin w = 0$. Dass unter der gemachten Voraussetzung nun auch Zeichenänderungen von U eintreten k ö n n e n, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt, geht hieraus von selbst hervor; jedoch kann dies nur der Fall sein für

$$G^2 - 4FH > 0,$$

nicht aber für

*) Eigentlich zwei gleiche reelle Wurzeln.

$$G^2-4FH=0,$$

weil in diesem letzteren Falle, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt, U nur ein Mal verschwindet, und bekanntlich für $w=0$ und $w=180^0$ gleiche Werthe erhält.

Mit Rücksicht auf die Formeln 64), 65) und 66), 67) ergiebt sich aus diesen Betrachtungen mit völliger Bestimmtheit, dass von einer stetigen Aenderung der Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunkts des Krümmungskreises und des Krümmungshalbmessers R, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt, überhaupt nur dann die Rede sein kann, wenn die Bedingung

$$G^2-4FH<0$$

erfüllt ist, wogegen im Allgemeinen jederzeit Unterbrechungen der Stetigkeit bei der Veränderung der Grössen X, Y, Z und R, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt, eintreten werden, wenn die vorstehende Bedingung nicht erfüllt ist.

Weil nach 62)

$$G^2=4P^2M^2,\quad 4FH=4P^2LN,$$

also

$$G^2-4FH=4P^2(M^2-LN)$$

ist; so können die Bedingungen

$$G^2-4FH<0 \quad \text{und} \quad G^2-4FH \overset{=}{>} 0$$

offenbar vollständig respective durch die Bedingungen

$$M^2-LN<0 \quad \text{und} \quad M^2-LN \overset{=}{>} 0$$

ersetzt werden, woraus sich ergiebt, dass die Grösse

$$M^2-LN$$

für unsere ganze Untersuchung von grosser Bedeutung ist, weshalb wir dieselbe jetzt zunächst einer genaueren Betrachtung unterwerfen wollen.

§. 9.

Wenn überhaupt:

72)

$$L=a^2u+b^2v+c^2w+2abx+2bcy+2caz,$$
$$M=\alpha au+\beta bv+\gamma cw+(\alpha b+\beta a)x+(\beta c+\gamma b)y+(\gamma a+\alpha c)z,$$
$$N=\alpha^2u+\beta^2v+\gamma^2w+2\alpha\beta x+2\beta\gamma y+2\gamma\alpha z$$

ist; so ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet, jederzeit:

$$73) \quad . \ . \quad M^2 - LN = \begin{aligned}[t] &(\alpha b - \beta a)^2(x^2 - uv) \\ &+ (\beta c - \gamma b)^2(y^2 - vw) \\ &+ (\gamma a - \alpha c)^2(z^2 - wu) \\ &+ 2(\alpha b - \beta a)(\beta c - \gamma b)(vz - xy) \\ &+ 2(\beta c - \gamma b)(\gamma a - \alpha c)(wx - yz) \\ &+ 2(\gamma a - \alpha c)(\alpha b - \beta a)(uy - zx), \end{aligned}$$

eine auch an sich wichtige und merkwürdige allgemeine algebraische Relation.

Setzt man nun für L, M, N die Ausdrücke in 60), so muss man:

$$a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma;$$

$$\alpha = \mathrm{A}, \quad \beta = \mathrm{B}, \quad \gamma = \mathrm{C}$$

und

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$x = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad y = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad z = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

setzen, wodurch man, weil

$$\begin{aligned} \alpha b - \beta a &= \mathrm{A}\cos\beta - \mathrm{B}\cos\alpha, \\ \beta c - \gamma b &= \mathrm{B}\cos\gamma - \mathrm{C}\cos\beta, \\ \gamma a - \alpha c &= \mathrm{C}\cos\alpha - \mathrm{A}\cos\gamma; \end{aligned}$$

also nach 56):

$$\alpha b - \beta a = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma - \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2),$$

$$\beta c - \gamma b = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial x}(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2),$$

$$\gamma a - \alpha c = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial y}(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2);$$

folglich nach 49):

$$\alpha b-\beta a=-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \beta c-\gamma b=-\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma a-\alpha c=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

ist:

$$74) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad M^2-LN$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\}.$$

erhält.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$75) \ldots T=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\},$$

so können wir nach dem im vorhergehenden Paragraphen Bewiesenen jetzt also behaupten, dass, wenn man sich w von 0 bis 180° stetig verändern lässt, keine Unterbrechungen der Stetigkeit der Grössen X, Y, Z; R oder Unterbrechungen der Stetigkeit der Grössen X, Y, Z; R eintreten, jenachdem

$$T<0 \quad \text{oder} \quad T \overline{\gt} 0$$

ist. Auch wird im ersten Falle die Grösse

$$U = F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2$$

ihr Zeichen niemals ändern, wogegen im zweiten Falle Aenderungen des Zeichens dieser Grösse eintreten können. Im ersten Falle verschwinden F und H nicht und haben gleiche Vorzeichen; U hat in diesem Falle immer mit F und H gleiches Vorzeichen.

Wir wollen das Zeichen der Grösse T für einige besondere Flächen des zweiten Grades bestimmen.

Für das Ellipsoid ist:

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$T = -\frac{16}{a^2b^2c^2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right\} = -\frac{16}{a^2b^2c^2},$$

also $T < 0$.

Für das Hyperboloid mit einem Fache ist:

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2z}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$T = \frac{16}{a^2b^2c^2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right\} = \frac{16}{a^2b^2c^2},$$

also $T > 0$.

Für das Hyperboloid mit zwei Fächern ist:

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2-1,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2z}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2}{b^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{2}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=0;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$T=-\frac{16}{a^2b^2c^2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}=-\frac{16}{a^2b^2c^2},$$

also $T<0$.

Für das Elliptische Paraboloid ist:

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\pm\frac{2z}{c},$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\pm\frac{2}{c};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{b^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=0;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$T=-\frac{16}{a^2b^2c^2},\quad \text{also}\quad T<0.$$

Für das Hyperbolische Paraboloid ist:

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\pm\frac{2z}{c},$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\pm\frac{2}{c};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2}{b^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}=0;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$T=\frac{16}{a^2b^2c^2}, \quad \text{also} \quad T>0.$$

Zu welchen Schlüssen man hieraus rücksichtlich der hier betrachteten Flächen des zweiten Grades berechtigt ist, geht aus dem Obigen von selbst hervor.*)

§. 10.

Wir wollen nun die Maxima und Minima der Function

$$76) \quad \ldots \quad U=F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2$$

untersuchen.

Durch Differentiation nach w als unabhängige veränderliche Grösse erhält man leicht:

$$77) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial w}= & G\cos 2w-(F-H)\sin 2w, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial w^2}= & -2\{G\sin 2w+(F-H)\cos 2w\}; \end{cases}$$

und die bekannte allgemeine Bedingung des Maximums und Minimums führt nun zu der Gleichung:

$$78) \quad \ldots\ldots \quad G\cos 2w-(F-H)\sin 2w=0,$$

woraus sich:

$$79) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tang} 2w=\frac{G}{F-H}$$

ergiebt. Hieraus folgt ferner:

$$\sin 2w^2=\frac{\operatorname{tang} 2w^2}{1+\operatorname{tang} 2w^2}=\frac{G^2}{G^2+(F-H)^2},$$

also:

---

*) Ueber die im Obigen angewandten Gleichungen des Ellipsoids, der beiden Hyperboloide und der beiden Paraboloide s. m. meine „Elemente der analytischen Geometrie" Thl. II. S. 211. S. 212. und S. 216. S. 217.

$$\sin 2w = \pm \frac{G}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}},$$

und folglich:

$$\cos 2w = \sin 2w \cot 2w = \pm \frac{F-H}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}},$$

so dass also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

80)

$$\sin 2w = \pm \frac{G}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}}, \quad \cos 2w = \pm \frac{F-H}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}},$$

ist.

Für den entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten ergiebt sich nach 77):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = -2\left\{\pm \frac{G^2}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}} \pm \frac{(F-H)^2}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}}\right\}$$
$$= \mp 2\frac{G^2+(F-H)^2}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}},$$

also:

$$81) \ldots\ldots \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = \mp 2\sqrt{G^2+(F-H)^2},$$

woraus folgt, dass für U die oberen Zeichen jederzeit ein Maximum, die unteren ein Minimum liefern.

Weil nach 76) offenbar:

$$2U = F(1+\cos 2w) + G\sin 2w + H(1-\cos 2w)$$
$$= F + H + G\sin 2w + (F-H)\cos 2w$$

ist, so erhält man für die entsprechenden Werthe von $2U$:

$$2U = F + H \pm \frac{G^2}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}} \pm \frac{(F-H)^2}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}}$$
$$= F + H \pm \frac{G^2+(F-H)^2}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}},$$

also:

$$82) \ldots\ldots 2U = F + H \pm \sqrt{G^2+(F-H)^2}.$$

Das Product dieser beiden Werthe von $2U$ ist, wie man leicht findet:

$$4FH - G^2 = -4P^2(M^2-LN) = -4P^2T$$

und daher:

positiv, null, negativ,

jenachdem

$$T<0,\quad T=0,\quad T>0$$

ist, so dass also die beiden obigen Werthe von $2U$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem $T<0$ oder $T>0$ ist; einer dieser beiden Werthe muss wenigstens verschwinden, wenn $T=0$ ist.

Nach 68) und 69) ist:

$$P^2\cos\alpha^2+\mathrm{A}^2=P^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$P^2\cos\beta^2+\mathrm{B}^2=P^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$P^2\cos\gamma^2+\mathrm{C}^2=P^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

und:

$$P^2\cos\alpha\cos\beta+\mathrm{AB}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$P^2\cos\beta\cos\gamma+\mathrm{BC}=-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$P^2\cos\gamma\cos\alpha+\mathrm{CA}=-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$

also, weil nach 62):

$$F+H=P^2L+N,$$

folglich nach 60):

$$\begin{aligned}F+H= &\;(P^2\cos\alpha^2+\mathrm{A}^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ &+(P^2\cos\beta^2+\mathrm{B}^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &+(P^2\cos\gamma^2+\mathrm{C}^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\ &+2(P^2\cos\alpha\cos\beta+\mathrm{AB})\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}\\ &+2(P^2\cos\beta\cos\gamma+\mathrm{BC})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ &+2(P^2\cos\gamma\cos\alpha+\mathrm{CA})\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\end{aligned}$$

ist, wenn man der Kürze wegen:

83)

$$S=\left\{P^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left\{P^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left\{P^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

oder:

$$83^*)\ldots S= P^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$
$$-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

setzt:

$$84)\ldots\ldots\ldots F+H=P^2L+N=S.$$

Ferner ist:

$$G^2+(F-H)^2=(F+H)^2+(G^2-4FH),$$

also, weil nach dem Obigen:

$$G^2-4FH=4P^2(M^2-LN)=4P^2T$$

ist:

$$85)\ldots\ldots G^2+(F-H)^2=S^2+4P^2T.$$

Folglich sind die beiden Werthe 82) von $2U$ nach 84) und 85):

$$86)\ldots\ldots\ldots 2U=S\pm\sqrt{S^2+4P^2T},$$

so dass also diese beiden dem Maximo und Minimo — immer im ersten und zweiten Falle resp. das obere und untere Zeichen genommen — entsprechenden Werthe von $2U$ mittelst der vorstehenden merkwürdigen Formel jetzt bloss durch die von α, β, γ gar nicht mehr abhängenden Grössen P, S, T ausgedrückt sind.

Die Formel 79) liefert für das zwischen 0 und 360° liegende $2w$ zwei um 180° verschiedene Werthe, die wir durch $2w'$ und $2w''$ bezeichnen wollen, so dass

$$2w''=2w'+180^\circ$$

ist, und für w also die beiden um 90° von einander verschiedenen Werthe:

$$w' \text{ und } w'' = w' + 90^0$$

erhalten werden. Jenachdem die Grösse G positiv oder negativ ist, ist nach 80):

87)

$$\left.\begin{matrix}\sin 2w' \\ \sin 2w''\end{matrix}\right\} = \pm \frac{G}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}}, \quad \left.\begin{matrix}\cos 2w' \\ \cos 2w''\end{matrix}\right\} = \pm \frac{F-H}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}},$$

oder:

$$\left.\begin{matrix}\sin 2w'' \\ \sin 2w'\end{matrix}\right\} = \pm \frac{G}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}}, \quad \left.\begin{matrix}\cos 2w'' \\ \cos 2w'\end{matrix}\right\} = \pm \frac{F-H}{\sqrt{G^2+(F-H)^2}}.$$

Im ersten Falle entspricht den Werthen $w = w'$, $w = w''$ das Maximum und Minimum; im zweiten Falle entspricht den Werthen $w = w''$, $w = w'$ das Maximum und Minimum; denn aus dem Obigen wissen wir, dass den oberen und unteren Zeichen immer respective das Maximum und Minimum entspricht, wo natürlich Maxima und Minima immer nur im Sinne der Differentialrechnung zu nehmen sind und nur in diesem Sinne genommen werden dürfen.

Die beiden Normalschnitte, denen das Maximum und Minimum von U entspricht, werden Hauptschnitte genannt; aus dem Vorstehenden ergiebt sich unmittelbar, dass dieselben immer auf einander senkrecht stehen.

Betrachtet man im Allgemeinen zwei den Winkeln w und $w_1 = w + 90^0$ entsprechende, auf einander senkrecht stehende Normalschnitte, und setzt:

$$U = F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2,$$

$$U_1 = F\cos w_1{}^2 + G\sin w_1 \cos w_1 + H\sin w_1{}^2;$$

so ist, weil

$$\cos w_1 = -\sin w, \quad \sin w_1 = \cos w$$

ist:

$$U = F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2,$$

$$U_1 = F\sin w^2 - G\sin w\cos w + H\cos w^2;$$

also:

$$U + U_1 = F + H,$$

und folglich nach 84):

$$88) \ldots\ldots\ldots \quad U+U_1=S,$$

so dass also für alle auf einander senkrecht stehende Normalschnitte die Summe $U+U_1$ eine constante Grösse ist.

§. 11.

Wir nehmen jetzt an, dass die Bedingung

$$T<0$$

erfüllt sei; wenn man dann w sich von 0 bis 180° stetig verändern lässt, so verschwindet U niemals, es ändert sein Zeichen nicht und hat immer gleiches Vorzeichen mit F und H; für $w=0$ und $w=180^0$ hat U gleiche Werthe; der grösste und kleinste Werth, welchen U erhält, sind offenbar wirkliche absolute Maxima und Minima, oder wirkliche absolute Minima und Maxima, nicht bloss Maxima und Minima im Sinne der Differentialrechnung, wie man am besten auf der Stelle mittelst einer einfachen geometrischen Darstellung übersieht, und diesem absolut genommen grössten und kleinsten Werthe von U entspricht offenbar der kleinste und grösste Krümmungshalbmesser, welchen wir respective durch R' und R'' bezeichnen wollen.

Wenn F und H positiv sind, also auch U stets positiv ist, so ist nach 64) und 66):

89)

$$\mathrm{X}-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}P^3}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2},$$

$$\mathrm{Y}-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2},$$

$$\mathrm{Z}-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

und:

$$90) \ldots \quad R=\frac{P^3}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2},$$

und nach 82) ist offenbar:

$$91) \ldots \left\{ \begin{aligned} R' &= \frac{2P^3}{F+H+\sqrt{G^2+(F-H)^2}}, \\ R'' &= \frac{2P^3}{F+H-\sqrt{G^2+(F-H)^2}}, \end{aligned} \right.$$

Weil nun, indem wir wegen der jetzt zur Anwendung kommenden Begriffe und Bezeichnungen auf die Abhandlung über die Normalschnitte des Ellipsoids in Thl. XL. Nr. XXI. verweisen:

$$\underset{0}{\overset{2\pi}{\mathrm{M}}}(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\partial w = \frac{1}{2\pi}.2\int_0^{\pi} R\partial w,$$

also:

$$\underset{0}{\overset{2\pi}{\mathrm{M}}}(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} R\partial w$$

ist, so ist nach 90):

$$\underset{0}{\overset{2\pi}{\mathrm{M}}}(R) = \frac{P^3}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}.$$

Nach einer sehr bekannten Integralformel *) ist aber, weil $4FH-G^2$ unter der Voraussetzung $T<0$ eine positive Grösse ist:

$$\int \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = \int \frac{\partial \operatorname{tang} w}{F+G\operatorname{tang} w + H\operatorname{tang} w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang} w}{\sqrt{4FH-G^2}}.$$

Folglich ist, wenn wir uns alle Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen denken:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} - \operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}0}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}(+\infty) - \operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\},$$

---

*) M. s. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. S. 164.

weil nämlich H positiv ist *); und:

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\text{Arctang}\,\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang}\,(-\infty)\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\text{Arctang}\,\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}} + \tfrac{1}{2}\pi\right\} \text{**)},$$

---

*) Dies war in Thl. XL. S. 310. auch der Fall, ist aber dort nicht besonders hervorgehoben worden.

**) Warum bei der ersten und zweiten Integration respective

$$\text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} = \text{Arctang}\,(+\infty)$$

und

$$\text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} = \text{Arctang}\,(-\infty)$$

gesetzt worden ist, wird einer besonderen Erläuterung nicht bedürfen, wenn man nur bedenkt, dass immer das Gesetz der Stetigkeit festzuhalten ist.

Zur weiteren Erläuterung und Begründung des Integrals auf der folgenden Seite mag indess noch das Folgende hier bemerkt werden.

Das allgemeine Integral ist nach dem Obigen:

$$\int \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\,\text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,w}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

und es ist folglich, wenn ε eine der Null sehr nahe kommende positive Grösse bezeichnet und alle Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,(\frac{1}{2}\pi-\varepsilon)}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,0}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\},$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang}\,\frac{G+2H\,\text{tang}\,(\frac{1}{2}\pi+\varepsilon)}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}.$$

weil, wie schon bemerkt, H positiv ist; also nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen:

$$\int_0^\pi \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{4FH - G^2}}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$92) \ldots\ldots\ldots \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = \frac{2P^3}{\sqrt{4FH - G^2}},$$

Also ist, wenn u, v der Null sehr nahe kommende positive Grössen bezeichnen, weil H positiv ist:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH - G^2}}\left\{(\tfrac{1}{2}\pi - u) - \operatorname{Arctang} \frac{G}{\sqrt{4FH - G^2}}\right\},$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH - G^2}}\left\{\operatorname{Arctang} \frac{G}{\sqrt{4FH - G^2}} - (-\tfrac{1}{2}\pi + v)\right\};$$

folglich:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = \frac{2}{\sqrt{4FH - G^2}}\{\pi - (u + v)\}.$$

Weil nun offenbar

$$\int_0^\pi \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

die Gränze ist, welcher, wenn ε sich der Null nähert, die Summe

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

sich nähert, und weil, wenn ε sich der Null nähert, auch die Grössen u und v sich der Null nähern, so ist offenbar:

$$\int_0^\pi \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{4FH - G^2}}.$$

und weil nun nach 91) offenbar:

$$R'R''=\frac{4P^6}{4FH-G^2},\quad \text{also:}\quad \sqrt{R'R''}=\frac{2P^3}{\sqrt{4FH-G^2}}$$

ist, so ist:

$$93) \ldots\ldots\ldots \quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\sqrt{R'R''}.$$

Nach 89) und 90) ist:

$$\mathrm{X}-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}R,$$

$$\mathrm{Y}-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}R,$$

$$\mathrm{Z}-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}R;$$

folglich, wie auf der Stelle erhellet:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R),$$

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R),$$

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R);$$

also nach 93):

$$94) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}
\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}\sqrt{R'R''},\\[2ex]
\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}\sqrt{R'R''},\\[2ex]
\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\sqrt{R'R''};
\end{array}\right.$$

oder:

$$95) \ldots \begin{cases} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}) - x = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}) - y = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z}) - z = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}. \end{cases}$$

Weil hiernach:

$$\frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}) - x}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}) - y}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z}) - z}{\dfrac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{\sqrt{R'R''}}{P}$$

ist, so liegt der durch die Coordinaten

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})$$

bestimmte Punkt auf der Normale der Fläche in dem Punkte (xyz).

Auch ist offenbar:

$$\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}) - x\}^2 + \{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}) - y\}^2 + \{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z}) - z\}^2 = (\sqrt{R'R''})^2.$$

Wenn F und H negativ sind, also auch U stets negativ ist, so ist nach 64) und 66):

$$96) \ldots \begin{cases} \mathrm{X} - x = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}P^2}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}, \\ \mathrm{Y} - y = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}P^2}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}, \\ \mathrm{Z} - z = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}P^2}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} \end{cases}$$

und:

$$97) \ldots R = -\frac{p^3}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2};$$

und nach 82) ist offenbar:

$$98) \ldots \begin{cases} R' = -\dfrac{2p^3}{F+H-\sqrt{G^2+(F-H)^2}}, \\ R'' = -\dfrac{2p^3}{F+H+\sqrt{G^2+(F-H)^2}}. \end{cases}$$

Ganz eben so wie vorher ist:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi R\partial w,$$

also nach 97):

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = -\frac{p^3}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}.$$

Ferner ist eben so wie vorher:

$$\int \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang} w}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

und folglich, wenn man sich wieder alle Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen denkt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} - \operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}0}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}(-\infty) - \operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\},$$

weil nämlich H negativ ist; und:

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} - \operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \left\{ \text{Arctang} \frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang}(+\infty) \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \left\{ \text{Arctang} \frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}} - \tfrac{1}{2}\pi \right\},$$

weil, wie schon bemerkt, H negativ ist; also nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen:

$$\int_0^\pi \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = -\frac{2\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} \text{ *)}.$$

---

*) Zur näheren Erläuterung und Begründung mag noch Folgendes dienen.

Das allgemeine Integral ist nach dem Obigen:

$$\int \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2} = \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \text{Arctang} \frac{G+2H\tang w}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

also, wenn ε eine der Null sehr nahe kommende positive Grösse bezeichnet, und alle Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \left\{ \text{Arctang} \frac{G+2H\tang(\frac{1}{2}\pi-\varepsilon)}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang} \frac{G+2H\tang 0}{\sqrt{4FH-G^2}} \right\},$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \left\{ \text{Arctang} \frac{G+2H\tang\pi}{\sqrt{4FH-G^2}} - \text{Arctang} \frac{G+2H\tang(\frac{1}{2}\pi+\varepsilon)}{\sqrt{4FH-G^2}} \right\}.$$

Also ist, wenn u, v der Null sehr nahe kommende positive Grössen bezeichnen, weil H negativ ist:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \left\{ (-\tfrac{1}{2}\pi+u) - \text{Arctang} \frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}} \right\},$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\partial w}{F\cos w^2 + G\sin w\cos w + H\sin w^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}} \left\{ \text{Arctang} \frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}} - (\tfrac{1}{2}\pi - v) \right\};$$

folglich:

Daher ist nach dem Obigen:

$$99) \ldots\ldots\ \underset{0}{\overset{2\pi}{\mathrm{M}}}(R)=\frac{2P^3}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

und weil nun nach 98) offenbar:

$$R'R''=\frac{4P^6}{4FH-G^2},$$

also:

$$\sqrt{R'R''}=\frac{2P^3}{\sqrt{4FH-G^2}}$$

ist, so ist:

$$100) \ldots\ldots\ \underset{0}{\overset{2\pi}{\mathrm{M}}}(R)=\sqrt{R'R''}.$$

Nach 96) und 97) ist:

$$\mathrm{X}-x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}R,$$

$$\mathrm{Y}-y=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}R,$$

$$\mathrm{Z}-z=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}R;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon}\frac{\partial w}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

$$+\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi}\frac{\partial w}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\{-\pi+(u+v)\}.$$

Weil nun offenbar

$$\int_0^{\pi}\frac{\partial w}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

die Gränze ist, welcher sich, wenn ε sich der Null nähert, die Summe

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon}\frac{\partial w}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

$$+\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\pi}\frac{\partial w}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}$$

nähert, und weil, wenn ε sich der Null nähert, auch die Grössen u und v sich der Null nähern; so ist offenbar:

$$\int_0^{\pi}\frac{\partial w}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}=-\frac{2\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}.$$

folglich, wie auf der Stelle erhellet:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R),$$

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R),$$

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R);$$

also nach 100):

$$101) \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}\sqrt{R'R''},\\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}\sqrt{R'R''},\\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\sqrt{R'R''};\end{array}\right.$$

oder:

$$102) \ldots \left\{\begin{array}{l}\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},\\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},\\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.\end{array}\right.$$

Weil hiernach:

$$\frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{\sqrt{R'R''}}{P}$$

ist, so liegt der durch die Coordinaten

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})$$

bestimmte Punkt auf der Normale der Fläche in dem Punkte (xyz).

Auch ist offenbar:

$$\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x\}^2+\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y\}^2+\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z\}^2=(\sqrt{R'R''})^2.$$

In beiden Fällen ist also:

$$103) \quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\sqrt{R'R''}$$

und:

$$104) \quad \begin{cases} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=\mp\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{p}\sqrt{R'R''}, \\[2ex] \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=\mp\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{p}\sqrt{R'R''}, \\[2ex] \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=\mp\dfrac{\frac{\partial u}{\partial z}}{p}\sqrt{R'R''} \end{cases}$$

oder:

$$105) \quad \begin{cases} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x=\mp\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\[3ex] \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y=\mp\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\[3ex] \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z=\mp\dfrac{\frac{\partial u}{\partial z}\sqrt{R'R''}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}; \end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grössen F und H, also nach 62) die Grössen L und N, beide positiv oder beide negativ sind. Der durch die Coordinaten

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})$$

bestimmte Punkt liegt immer auf der Normale der Fläche in dem Punkte (xyz), und immer ist:

$$\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X})-x\}^2+\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y})-y\}^2+\{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z})-z\}^2=(\sqrt{R'R''})^2.$$

§. 12.

Wir nehmen wiederum an, dass die Bedingung

$$T<0$$

erfüllt sei.

Wenn F und H positiv sind, also auch U stets positiv ist, so ist nach 64) und 66):

$$106)\quad \begin{cases} \mathrm{X}-x=-\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}, \\[2ex] \mathrm{Y}-y=-\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}, \\[2ex] \mathrm{Z}-z=-\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2} \end{cases}$$

und:

$$107)\ \ldots \frac{1}{R}=\frac{1}{P^3}(F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2);$$

und nach 91) ist:

$$108)\ \ldots \begin{cases} \dfrac{1}{R'}=\dfrac{F+H+\sqrt{G^2+(F-H)^2}}{2P^3}, \\[2ex] \dfrac{1}{R''}=\dfrac{F+H-\sqrt{G^2+(F-H)^2}}{2P^3}. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{R},$$

also nach 107):

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{2\pi P^3}\int_0^{2\pi}(F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2)\partial w,$$

folglich, wie man leicht findet *):

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{F+H}{2P^3}.$$

Nach 108) ist aber:

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{F+H}{P^3},$$

also:

$$109) \ldots\ldots \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right).$$

Wenn F und H negativ sind, also auch U stets negativ ist, so ist nach 64) und 66):

$$110) \begin{cases} \mathrm{X}-x=-\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}, \\ \mathrm{Y}-y=-\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2}, \\ \mathrm{Z}-z=-\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}P^2}{F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2} \end{cases}$$

und:

$$111) \ldots \frac{1}{R}=-\frac{1}{P^3}(F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2);$$

und nach 98) ist:

$$112) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{1}{R'}=-\dfrac{F+H-\sqrt{G^2+(F-H)^2}}{2P^3}, \\ \dfrac{1}{R''}=-\dfrac{F+H+\sqrt{G^2+(F-H)^2}}{2P^3}. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{R},$$

also nach 111):

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{2\pi P^3}\int_0^{2\pi}(F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2)\,\partial w,$$

*) M. s. Thl. XL. S. 308.

folglich wie vorher:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{F+H}{2P^3}.$$

Nach 112) ist aber:

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=-\frac{F+H}{P^3},$$

also:

$$113) \ldots\ldots \quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right).$$

Diese Relation gilt folglich allgemein in beiden Fällen.

§. 13.

Aus den beiden vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich, dass der in Thl. XL. S. 312. für die Normalschnitte des Ellipsoids bewiesene Satz für jede Fläche gilt, für welche in dem Punkte (xyz) die Bedingung $T<0$ erfüllt ist. Man hat nun aber auch noch das Folgende zu merken.

Weil nach 84)

$$P^2L+N=S$$

ist, und unter der Voraussetzung $T<0$ die Grössen L und N bekanntlich gleiche Vorzeichen haben, so sind L, N, eben so wie F, H, beide positiv oder beide negativ, jenachdem die Grösse S positiv oder negativ ist.

Wenn daher S positiv ist, so ist nach 84), 85), 91):

$$R'=\frac{2P^3}{S+\sqrt{S^2+4P^2T}},$$

$$R''=\frac{2P^3}{S-\sqrt{S^2+4P^2T}};$$

und wenn S negativ ist, so ist nach 84), 85), 98):

$$R'=-\frac{2P^3}{S-\sqrt{S^2+4P^2T}},$$

$$R''=-\frac{2P^3}{S+\sqrt{S^2+4P^2T}};$$

also ist:

$$114) \ldots \quad \begin{cases} R' = \pm \dfrac{2P^3}{S \pm \sqrt{S^2 + 4P^2T}}, \\ R'' = \pm \dfrac{2P^3}{S \mp \sqrt{S^2 + 4P^2T}}; \end{cases}$$

und:

$$115) \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{1}{R'} = \pm \dfrac{S \pm \sqrt{S^2 + 4P^2T}}{2P^3}, \\ \dfrac{1}{R''} = \pm \dfrac{S \mp \sqrt{S^2 + 4P^2T}}{2P^3}; \end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem S positiv oder negativ ist.

Also ist:

$$116) \ldots \quad R'R'' = -\frac{P^4}{T}, \quad \sqrt{R'R''} = \frac{P^2}{\sqrt{-T}};$$

und:

$$117) \ldots \ldots \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \pm \frac{S}{P^3},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem S positiv oder negativ ist.

Für das Ellipsoid ist

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$$

und, wie wir schon in §. 9. gesehen haben:

$$T = -\frac{16}{a^2b^2c^2},$$

also $T < 0$. Ferner ist nach 83*):

$$S = 8\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$
$$-8\left\{\left(\frac{x}{a^3}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^3}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^3}\right)^2\right\}$$

oder nach 83):

$$S =$$
$$8\left\{\left(\frac{y}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\frac{1}{a^2} + 8\left\{\left(\frac{z}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{a^2}\right)^2\right\}\frac{1}{b^2} + 8\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}\frac{1}{c^2},$$

also S positiv, und in den vorstehenden Formeln sind folglich die oberen Zeichen zu nehmen. Daher ist nach 116):

$$R'R'' = \frac{16\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^2}{\frac{16}{a^2b^2c^2}} = \frac{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^2}{\frac{1}{a^2b^2c^2}},$$

also:

$$\frac{1}{R'}\cdot\frac{1}{R''} = \frac{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^2};$$

und nach 117):

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''} = -\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(\frac{x}{a^3}\right)^2+\left(\frac{y}{b^3}\right)^2+\left(\frac{z}{c^3}\right)^2}{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Formeln stimmen mit den in Thl. XXVIII. S. 34. und S. 33. auf anderem Wege für das Ellipsoid entwickelten Formeln genau überein. Aus 115) erhält man auch, weil S positiv ist, leicht:

$$\frac{2}{R'} = \frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2 - \frac{4\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}},$$

$$\frac{2}{R''} = \frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2 - \frac{4\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}};$$

was gleichfalls mit den in Thl. XXVIII. S. 34. gegebenen Formeln genau übereinstimmt, nur dass dort der Kürze wegen zwischen

dem grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser nicht bestimmt unterschieden, und diese keiner Schwierigkeit unterliegende Unterscheidung damals dem Leser überlassen worden ist, wodurch bei der damaligen Lösung der Aufgabe nothwendig die doppelten Vorzeichen in die dortigen Formeln kommen mussten, die jetzt, wo zwischen dem grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser bestimmt unterschieden worden ist, in den Formeln natürlich nicht mehr vorkommen.

Endlich ist nach 94) und 101):

$$118) \ldots\ldots \begin{cases} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}) = x \mp \dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}\sqrt{R'R''}, \\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Y}) = y \mp \dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}\sqrt{R'R''}, \\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\mathrm{Z}) = z \mp \dfrac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\sqrt{R'R''}; \end{cases}$$

indem man auch in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem S positiv oder negativ ist.

§. 14.

Mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich nun aber aus §. 11. unmittelbar der folgende Satz:

Lehrsatz.

Wenn die Gleichung einer Fläche

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

ist, und für einen Punkt (xyz) dieser Fläche

$$u = f(x, y, z),$$

ausserdem

$$P = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

und

$$S = \left\{P^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left\{P^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left\{P^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

so wie

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right\}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right\}$$

gesetzt wird; so ist unter der Bedingung $T<0$ das arithmetische Mittel der Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte der Fläche in dem Punkte (xyz) derselben das geometrische Mittel zwischen dem kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser R' und R'' in diesem Punkte, und dieser mittlere Krümmungshalbmesser ist der Halbmesser einer durch den Punkt (xyz) gehenden Kugelfläche, deren auf der dem Punkte (xyz) entsprechenden Normale der Fläche liegender Mittelpunkt durch die Coordinaten:

$$X = x \mp \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P}\sqrt{R'R''},\quad Y = y \mp \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P}\sqrt{R'R''},\quad Z = z \mp \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\sqrt{R'R''}$$

bestimmt wird, wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem S eine positive oder eine negative Grösse ist.

Wie wir schon in dem vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, ist für das Ellipsoid $T<0$ und S positiv; also gilt dieser Satz für das Ellipsoid, wenn man in den Ausdrücken von X, Y, Z die oberen Zeichen nimmt *).

Weil es bekanntlich in dem Sinne, in welchem es einen Krümmungskreis einer Curve giebt, eine Krümmungskugel einer

*) M. vergl. Thl. XL. S. 312.

Fläche nicht giebt: so wäre es vielleicht verstattet, die Frage aufzuwerfen, ob wohl die so eben bestimmte Kugel in dem aus dem Obigen sich von selbst ergebenden Sinne den Namen einer Krümmungskugel einer Fläche für sich in Anspruch nehmen dürfte. Hielte man sie aber dieses Namens nicht für würdig, so möchte man ihr doch vielleicht den Namen der Kugel der mittleren Krümmung zugestehen.

Da ich diesen Gegenstand noch nicht durch das Obige als völlig abgeschlossen betrachte, so werde ich vielleicht späterhin auf denselben noch zurückkommen, mit besonderer Rücksicht auf den Fall, wenn die Bedingung $T<0$ nicht erfüllt ist, wo freilich die eintretenden Unterbrechungen der Stetigkeit ein besonderes Moment der Untersuchung bilden müssten; einige Flächen, für welche die Bedingung $T<0$ allgemein erfüllt ist, unter denen sich das in Thl. XL. Nr. XXI., auch noch in anderer Rücksicht, ausführlich untersuchte Ellipsoid befindet, sind schon oben in §. 9. beispielsweise namhaft gemacht worden.

Anhang.

Es lag in dieser Abhandlung für jetzt nur in unserer Absicht, den vorher ausgesprochenen Satz streng und, mit Rücksicht auf seine nothwendigen Einschränkungen, sicher zu begründen, nicht aber auch in's Einzelne gehende Untersuchungen über die kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser selbst anzustellen. Jedoch mag in dieser Beziehung hier noch Folgendes bemerkt werden.

Wenn wie in 70)

$$U=F\cos w^2+G\sin w\cos w+H\sin w^2$$

gesetzt wird, so ist nach 67):

$$R=\pm\frac{P^3}{U},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die Grösse U positiv oder negativ ist.

Nach 86) ist für das Maximum und Minimum von U:

$$2U=S\pm\sqrt{S^2+4P^2T},$$

für das Maximum das obere, für das Minimum das untere Zeichen genommen; dass

$$S^2+4P^2T=G^2+(F-H)^2$$

stets positiv ist, versteht sich hiernach von selbst, und auf der Stelle erhellet auch, dass das Product der beiden vorstehenden Werthe von $2U$ die Grösse $-4P^2T$ ist.

Wenn $T<0$ ist, so haben hiernach die beiden Werthe

$$2U=S\pm\sqrt{S^2+4P^2T}$$

gleiche Vorzeichen, und zwar offenbar immer gleiches Vorzeichen mit S. Bezeichnen wir nun die dem grössten und kleinsten Werthe von U entsprechenden Werthe des Krümmungshalbmessers jetzt überhaupt durch R, so ist nach dem Obigen:

$$R=\frac{2P^3}{S\pm\sqrt{S^2+4P^2T}} \text{ oder } R=-\frac{2P^3}{S\pm\sqrt{S^2+4P^2T}},$$

jenachdem S positiv oder negativ ist. Wenn S positiv ist, so ist

$$2U=S+\sqrt{S^2+4P^2T}$$

ein absolutes Maximum und

$$2U=S-\sqrt{S^2+4P^2T}$$

ein absolutes Minimum; also sind der kleinste und grösste Krümmungshalbmesser respective:

$$\frac{2P^3}{S+\sqrt{S^2+4P^2T}} \text{ und } \frac{2P^3}{S-\sqrt{S^2+4P^2T}}.$$

Wenn ferner S negativ ist, so ist

$$2U=S+\sqrt{S^2+4P^2T}$$

ein absolutes Minimum und

$$2U=S-\sqrt{S^2+4P^2T}$$

ein absolutes Maximum; also sind der kleinste und grösste Krümmungshalbmesser respective:

$$-\frac{2P^3}{S-\sqrt{S^2+4P^2T}} \text{ und } -\frac{2P^3}{S+\sqrt{S^2+4P^2T}}.$$

Bezeichnen wir also den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser respective durch R' und R'', so ist:

$$R'=\frac{2P^3}{S+\sqrt{S^2+4P^2T}},\quad R''=\frac{2P^3}{S-\sqrt{S^2+4P^2T}}$$

oder

$$R'=-\frac{2P^3}{S-\sqrt{S^2+4P^2T}},\quad R''=-\frac{2P^3}{S+\sqrt{S^2+4P^2T}};$$

jenachdem S positiv oder negativ ist; oder es ist:

$$R' = \pm \frac{2P^3}{S \pm \sqrt{S^2 + 4P^2T}}, \quad R'' = \pm \frac{2P^3}{S \mp \sqrt{S^2 + 4P^2T}};$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem S positiv oder negativ ist, ganz übereinstimmend mit dem, was wir schon oben in 114) gefunden haben. Dass in diesem Falle R' und R'' wirkliche Minima und Maxima, nicht bloss Minima und Maxima im Sinne der Differentialrechnung sind, erhellet leicht.

Wenn $T > 0$ ist, so haben die beiden Werthe

$$2U = S \pm \sqrt{S^2 + 4P^2T}$$

ungleiche Vorzeichen, und zwar liefert offenbar das obere Vorzeichen immer einen positiven, das untere Vorzeichen immer einen negativen Werth. Da nun das obere Vorzeichen ein Maximum, das untere ein Minimum liefert, so liefern in diesem Falle beide Vorzeichen absolute Maxima, und wenn man mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander

$$R = \pm \frac{2P^3}{S \pm \sqrt{S^2 + 4P^2T}}$$

setzt, so liefern beide Zeichen-Combinationen für R absolute Minima.

Wenn endlich $T = 0$ ist, so ist:

$$2U = S \pm \sqrt{S^2};$$

also mit Beziehung auf das obere und untere Zeichen in vorstehender Gleichung:

$$U = \begin{cases} S \\ 0 \end{cases} \text{oder} \quad U = \begin{cases} 0 \\ S \end{cases},$$

jenachdem S positiv oder negativ ist. Wenn S positiv ist, so ist $U = S$ ein Maximum und $U = 0$ ein Minimum; wenn S negativ ist, so ist $U = 0$ ein Maximum und $U = S$ ein Minimum; in beiden Fällen ist $U = S$ also ein absolutes Maximum, folglich, wenn man

$$R = \pm \frac{P^3}{S}$$

setzt, und das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem S positiv oder negativ ist, in beiden Fällen R ein absolutes Minimum. Der Werth $U = 0$ liefert für R das Symbol des Unendlichen.

Vorstehendes in genügender Weise noch weiter auszuführen, liegt jetzt nicht in unserer Absicht.

XXVIII.

Die harmonischen Reihen.

Von

Herrn Dr. *Josef Knar,*

Professor der Mathematik zu Graz.

---

§. 1.

Die Mathematiker haben sich nach dem Vorgange von Leibnitz, Bernoulli und Euler viel mit den sogenannten harmonischen und solchen anderen Reihen beschäftiget, welche aus den ersteren dadurch entstanden gedacht werden können, indem man die gleichvielten nach der Ordnung folgenden Glieder zweier oder auch mehrerer von ihnen mit einander vereiniget. Bis jetzt aber wurde die Lehre von den eben bezeichneten Reihen keineswegs, wie es wohl hätte geschehen sollen, als ein zusammen gehöriges Ganzes, eine eigene, wenn auch vielleicht nicht sehr ausgedehnte Abtheilung der Analysis, in Betracht gezogen, sondern vielmehr stets nur gleichsam gelegenheitlich vorgenommen und jene Reihen eigentlich nur als die zunächst sich darbietenden Beispiele gebraucht, um daran die Anwendung gewisser aufgestellter, mehr oder minder umfassender, Summirungsmethoden zu zeigen. In Folge dieser Behandlungsweise hat es sich ergeben, dass zwar eine bedeutende Anzahl von interessanten, zuweilen fast überraschenden Reihensummirungen entdeckt wurde, dass jedoch letztere eines durchgreifenden Zusammenhanges unter einander zu ermangeln scheinen, und mehr vereinzelt dastehen, weil sie auf sehr verschiedenen Wegen und auch zuweilen durch solche Hilfsmittel gefunden wurden, die wohl mit Recht als allzu weit hergeholt zu erachten sein dürften. Dadurch wird die Uebersicht

über die Gesammtheit des hierin bereits Geleisteten sehr erschwert und man wird nicht leicht in den Stand gesetzt sich finden, ein sicheres Urtheil zu fällen, wie weit bei solchen Reihen die bisher bekannten Methoden der Summirung im Ganzen reichen und welche Lücken dabei etwa noch auszufüllen erübrigen.

Im Nachstehenden soll nun der Versuch gemacht werden, diesen Gegenstand, der nicht ohne praktische Wichtigkeit ist, weil von ihm, wie es sich zeigen wird, die allgemeine Auflösung der Aufgabe von der Summirung aller jener unendlichen Reihen abhängt, deren allgemeine Glieder was immer für rationale gebrochene Funktionen der Stellenzahl sind, nach der ganzen Ausdehnung, deren er fähig ist, der Betrachtung zu unterziehen, und zwar unter Zugrundelegung eines von dem bisher gebräuchlichen etwas abweichenden, viel weiter sich erstreckenden Begriffes der harmonischen Reihen und mit Beihülfe einer besonderen Bezeichnungsweise, durch welche die Eigenschaften sowohl dieser als auch der aus ihnen durch Zusammenziehung ihrer gleichvielten Glieder entspringenden anderen Reihen mit Leichtigkeit kurz und anschaulich dargestellt werden können. Hiebei soll vorzüglich getrachtet werden, die ganze Lehre auf einige wenige Hauptsätze zurükzuführen und aus diesen dann durch möglichst einfache und gleichförmige Mittel alles Uebrige in grösster Allgemeinheit herzuleiten, wodurch man sich in der Lage fühlen wird, das Ganze des hierin bereits Erforschten mit Sicherheit zu überschauen und die Gränzen genau zu erkennen, über welche hinaus man entweder überhaupt nicht zu gehen vermag, oder wo wenigstens die bis jetzt bekannten Methoden nicht weiter für ausreichend befunden werden.

Aus dem eben Gesagten wird man wohl leicht selbst entnehmen, dass der gegenwärtige Aufsatz nicht durchgängig nur Neues enthalten könne, dass vielmehr darin schon wegen des erforderlichen Zusammenhanges auch längst Bekanntes aufgenommen werden müsse. Doch soll letzteres immer nur möglichst kurz und mehr andeutungsweise erfolgen und nur in jenen Fällen wird hiebei eine grössere Ausführlichkeit für nothwendig oder wenigstens gerechtfertiget erachtet werden, wenn hiedurch ein bereits bekanntes Gesetz in seiner Giltigkeit eine weitere Ausdehnung, als man ihm bisher zuschreiben zu dürfen glaubte, erlangen, oder wenn dasselbe einen von dem bisher üblichen wesentlich verschiedenen Ausdruck erhalten soll, durch welchen es wenigstens in seiner Form gleichsam als neu sich darstellt, oder endlich wenn durch eine von der gewöhnlichen abweichende Darstellungs- oder Her-

leitungsweise irgend ein besonderer wünschenswerther Nebenzweck erreicht werden kann.

§. 2.

Unter der Benennung: harmonische Reihe pflegte man bisher allgemein eine Reihe von Brüchen zu verstehen, deren Zähler alle einander gleich sind und deren Nenner in einer arithmetischen Progression fortschreiten, so dass ihr allgemeines Glied unter der Form

$$\frac{c}{a+(n-1)d}$$

enthalten ist. Diese bisher gebräuchliche Begriffsbestimmung soll nun hier zunächst eine kleine Einschränkung erleiden, welche zur Bequemlichkeit in der aufzustellenden Bezeichnung solcher Reihen und auch zur Erleichterung des Ausdruckes mancher dabei Statt findenden Gesetze wesentlich beitragen wird, ohne doch die Ausdehnung ihrer Anwendbarkeit auf alle einzelnen Fälle im geringsten zu behindern. Denn wegen

$$\frac{c}{a+(n-1)d}=c.\frac{1}{a+(n-1)d}$$

sieht man leicht, dass es vollkommen genüge, nur Reihen von solchen Brüchen, deren Zähler durchgängig gleich 1 sind, zu betrachten und in ihren Eigenschaften zu untersuchen, weil man in jedem anderen Falle, wenn die einander gleichen Zähler gegebener Brüche von 1 verschieden sein sollten, nur eben diesen gemeinschaftlichen Zähler aus der ganzen Reihe herauszuziehen und ihr als Faktor vorzusetzen braucht, um sogleich in allen einzelnen Brüchen den Zähler 1 herzustellen. Durch die Beschränkung der Betrachtung auf Brüche mit dem Zähler 1 entfällt aber die Nothwendigkeit, diesen Zähler in der Bezeichnung noch besonders hervor zu heben, wodurch letztere bedeutend vereinfacht werden kann. Desshalb sollen im Nachfolgenden unter dem Namen der harmonischen Reihen stets nur Brüche mit dem Zähler 1 verstanden, jede Reihe von Brüchen hingegen, deren einander gleiche Zähler von 1 verschieden sind, soll in ein Produkt aus eben diesem Zähler in eine Reihe von Brüchen mit dem gemeinschaftlichen Zähler 1 zerlegt gedacht, und demgemäss benannt und bezeichnet werden.

Im Gegensatze zu der eben ausgesprochenen Beschränkung auf Brüche mit dem Zähler 1 ist in anderer Beziehung der Begriff

der harmonischen Reihen einer sehr bedeutenden Erweiterung fähig. Nimmt man nämlich die sämmtlichen Reihen, welche aus dem allgemeinen Gliede

$$\frac{1}{(a+(n-1)d)^r}$$

entspringen, wenn darin dem Exponenten r was immer für ein ganzer additiver Werth beigelegt wird, als zu einer einzigen grossen Klasse von Reihen zusammen gehörig an, welche wieder nach Verschiedenheit der Zahl r in einzelne Abtheilungen oder Ordnungen zerfallend gedacht werden kann; so ist einleuchtend, dass unter der vorhin festgestellten Einschränkung diejenigen Reihen, welche man bisher mit dem Namen der harmonischen zu bezeichnen gewohnt war, ebenfalls der gedachten Klasse angehören und zwar die erste Ordnung derselben ausmachen, weil sie aus dem angegebenen allgemeinen Gliede dadurch hervorgehen, wenn darin $r=1$ angenommen wird. Nun kann man sich leicht überzeugen, und wird diess bald näher nachgewiesen werden, dass alle zur obigen Klasse gehörigen Reihen mehrere gemeinschaftliche Eigenschaften besitzen, rücksichtlich welcher sie eine ganz gleichmässige Behandlung zulassen. Auch bei denjenigen Eigenschaften, in welchen die Reihen der verschiedenen Ordnungen sich von einander unterscheiden, wird eine sehr nahe liegende Analogie überall so deutlich hervortreten, dass sie sich nirgends wird verkennen lassen. Endlich wird es sich zeigen, dass die verschiedenen Ordnungen jener Klasse von Reihen nicht nur auf höchst einfache Weise aus einander hergeleitet werden können, sondern überdiess wechselseitig dergestalt von einander abhängen, dass man die Lehre von den Eigenschaften der Reihen irgend einer Ordnung ohne Beiziehung der Reihen höherer Ordnungen gar nicht vollständig abzuhandeln im Stande ist, was insbesondere auch von den Reihen der ersten Ordnung sich bestätiget finden wird.

Durch diese Betrachtungen dürfte man es wohl als gerechtfertiget anerkennen, wenn die sämmtlichen der vorbezeichneten grossen Klasse zugehörigen Reihen mit einer gemeinschaftlichen Benennung bezeichnet werden, und hiezu, anstatt einen neuen Namen dafür zu erfinden, der in die Mathematik bereits eingeführte Name der harmonischen Reihen als schicklich ausgewählt wird, obgleich durch denselben bisher nur eine einzige Ordnung derselben bezeichnet zu werden pflegte. Es kann diess um so unbedenklicher geschehen, da die gewöhnlich mit der gleichen Benennung belegten Reihen von allen übrigen durch den Beisatz: der ersten Ordnung leicht und sicher unterschieden werden können, wodurch jede Verwechslung hintan gehalten wird.

Demnach wird hiemit festgesetzt, dass unter dem Namen: „harmonische Reihen" alle aus dem vorhin angegebenen allgemeinen Gliede hervorgehenden Reihen zusammengefasst werden sollen, und zwar jede von ihnen der sovielten Ordnung dieser Reihen angehöre, als der Ordnungsexponent r anzeigt.

Diese von der bisher gewöhnlichen Bedeutung abweichende Begriffsbestimmung liegt der gegenwärtigen Abhandlung durchgängig zum Grunde, wesshalb der Ausdruck: **harmonische Reihen** hier stets in dem eben erklärten Sinne genommen werden muss, um jedes Missverständniss zu vermeiden.

Eigentlich ist es keineswegs unumgänglich nothwendig, dass der Ordnungsexponent r in dem obigen allgemeinen Gliede wirklich eine ganze additive Zahl sei, wie es dort vorausgesetzt wurde; vielmehr könnte demselben auch jeder andere gebrochene, irrationale oder komplexe Werth beigelegt werden. Allein eine so weite Ausdehnung dieses Gegenstandes ist nicht nur bisher noch von Niemandem versucht worden, sondern es hat sich auch bis jetzt keine hinlänglich nützliche Anwendung ergeben, welche davon gemacht werden könnte, um die mit dieser Erweiterung verbundene Mühe zu lohnen. Aus diesem letzteren Grunde soll auch hier die Untersuchung auf den schon vorhin angenommenen einfachsten Fall, dass nämlich r stets eine ganze additive Zahl bedeute, beschränkt bleiben, obgleich man sich ohne Mühe die Ueberzeugung verschaffen kann, dass einige von den bald aufzustellenden Gesetzen auch für die übrigen mehr verwickelten Fälle ohne Weiteres gelten. Anders verhält es sich mit den beiden in dem obigen allgemeinen Gliede der harmonischen Reihen vorkommenden Zahlen a und d, deren erste a zum Behufe möglichster Kürze des Ausdruckes durch den Namen: Anfangszahl, die andere d aber als Differenz der harmonischen Reihe bezeichnet werden soll. Bei diesen zwei Zahlen hat man sich zwar bisher ebenfalls fast immer auf ganze oder, was hiebei auf das nämliche hinauskommt, auf rationale Werthe beschränkt, weil diese besonderen Fälle die einfachsten, am häufigsten vorkommenden und daher nützlichsten sind, und überdiess mehrere Eigenthümlichkeiten besitzen, welche auf die Summirung der von ihnen abhängenden Reihen einen wesentlichen Einfluss ausüben. Desshalb verdienen diese Fälle wirklich eine ausführlichere Untersuchung, die ihnen auch in der Folge im genügenden Masse gewidmet werden soll. Indessen dürfen doch die Fälle, in welchen a oder d entweder irrationale oder komplexe Werthe haben, keineswegs mit Stillschweigen übergangen, es müssen vielmehr

auch diese etwas verwickelteren Fälle einer besonderen Betrachtung unterzogen werden, nicht sowohl weil diess zur Vollständigkeit der Theorie gehört, als vielmehr hauptsächlich weil diese Erweiterung der Untersuchung unumgänglich nothwendig sich zeigen wird, um die bereits in §. 1. angedeutete Aufgabe von der Summirung einer sehr umfassenden Abtheilung unendlicher Reihen in aller Allgemeinheit auflösen zu können.

§. 3.

Wie überhaupt in allen Zweigen der Mathematik die Auswahl einer zweckmässigen Bezeichnungsweise von der grösten Wichtigkeit ist, muss auch bei dem hier zu behandelnden Gegenstande vor allem Anderen eine möglichst kurze, übersichtliche, nicht leicht einer Missdeutung unterworfene Bezeichnung der harmonischen Reihen eingeführt werden, um die Eigenschaften der letzteren und die zwischen ihnen Statt findenden Beziehungen kurz und unzweideutig darstellen und mit einem raschen Ueberblicke leicht erkennen zu können.

Nach der gewöhnlich angenommenen Art wird die Summe einer unendlichen Reihe dadurch angezeigt, indem man dem allgemeinen Gliede der letzteren das Zeichen S vorsetzt; zur Darstellung der Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern wird diesem Zeichen noch die Anzahl der Glieder beigefügt. Diese Bezeichnungsweise gewährt hinlängliche Bequemlichkeit, sobald in einer Rechnung nur eine oder doch nur einige wenige Reihensummen vorkommen; sie wird daher auch im Nachfolgenden beibehalten und auf alle Reihen mit alleiniger Ausnahme der harmonischen in solcher Art angewendet werden, dass bei endlichen Reihen die Anzahl der Glieder stets über dem Summenzeichen beigefügt werden soll, weil der Platz unterhalb zu einem anderen sogleich zu erklärenden Zwecke vorbehalten bleibt. Sobald hingegen eine grössere Menge oder auch eine unbestimmte Anzahl von Reihensummen in einem und demselben Ausdrucke zusammengefasst werden soll, wie diess nachstehend nicht selten der Fall sein wird, oder auch bei Reihensummen, welche sich häufig wiederholen, wie hier die harmonischen, würde die obige Bezeichnungsweise doch zu weitläufig ausfallen, und dadurch der leichten Aufstellung und dem raschen Ueberblicke der dabei Statt findenden Gesetze hinderlich sein. Für die harmonischen Reihen muss desswegen eine andere kürzere, aber doch vollständige und möglichst deutliche Bezeichnung eingeführt werden, welche hiemit in der Art angenommen wird,

dass aus derselben das allgemeine Glied gänzlich weggelassen, dafür aber die Anfangszahl und die Differenz der Reihe mit einem Striche zwischen ihnen unter dem Summenzeichen angesetzt, mit Klammern eingefasst und den letzteren der Ordnungsexponent nach Art eines Potenzexponenten beigefügt werden soll. Auf diese Art wird die Summe von n Gliedern der aus dem in §. 2. angegebenen allgemeinen Gliede entspringenden harmonischen Reihe, welche nach der früher erklärten Bezeichnung durch

$$\overset{n}{S}\frac{1}{(a+(n-1)d)^r}$$

dargestellt werden müsste, weit kürzer durch

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{n}{S}}$$

ausgedrückt, so dass nunmehr

I.

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{n}{S}}=\frac{1}{a^r}+\frac{1}{(a+d)^r}+\frac{1}{(a+2d)^r}+\frac{1}{(a+3d)^r}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)d)^r}$$

ist; die Summe eben dieser, jedoch ohne Ende fortlaufenden Reihe wird nach dem Gesagten hinfort stets durch

$$\underset{(a|d)^r}{S}$$

bezeichnet werden.

Eine noch etwas weiter gehende Vereinfachung der Bezeichnung lässt sich in einem einzelnen Falle anbringen, und zwar gerade in demjenigen, in welchem sie wegen ihres häufigen Gebrauches den grössten praktischen Nutzen gewährt. Wenn nämlich $r=1$ ist, folglich die harmonische Reihe zur ersten Ordnung gehört, sollte sie nach dem eben Gesagten eigentlich durch

$$\underset{(a|d)^1}{\overset{n}{S}}$$

oder, wenn die Reihe als unendliche betrachtet wird, durch

$$\underset{(a|d)^1}{S}$$

bezeichnet werden. Man kann jedoch hiebei in ähnlicher Weise, wie diess bei den Potenzexponenten geschieht, den Ordnungsexponenten 1, als sich von selbst verstehend, ganz weglassen,

wodurch dann auch die Ansetzung der Klammern überflüssig wird, so dass die harmonischen Reihen der ersten Ordnung, je nachdem sie als endliche oder als unendlich fortlaufende angesehen werden sollen, auf die kürzeste Weise durch

$$\overset{n}{\underset{a|d}{S}} \text{ oder } \underset{a|d}{S}$$

bezeichnet werden können, was für die Folge stets beibehalten werden soll.

Bei den eben aufgestellten Bezeichnungen sind, wie man sieht, alle einzelnen Glieder der Reihen als mit einerlei Vorzeichen $+$ behaftet angenommen worden; jene können jedoch ohne Anstand auch auf Reihen angewendet werden, in welchen einzelne Glieder in regelmässiger Folge das Zeichen $-$ vor sich haben. Man braucht zu diesem Ende nur die sämmtlichen Glieder der Reihe in Abtheilungen zu zerlegen, deren jede einzelne aus gleichbezeichneten Gliedern besteht, zugleich für sich allein betrachtet eine harmonische Reihe bildet und daher auch als solche bezeichnet werden kann, um auf diese Art die gegebene Reihe als Summe oder Unterschied zweier oder mehrerer harmonischer Reihen mit Hilfe der vorhergehenden Bezeichnungen dargestellt zu erhalten. So ist z. B.

$$\underset{(a|2d)^r}{S} - \underset{(a+d|2d)^r}{S} =$$

$$\frac{1}{a^r} - \frac{1}{(a+d)^r} + \frac{1}{(a+2d)^r} - \frac{1}{(a+3d)^r} + \frac{1}{(a+4d)^r} - \frac{1}{(a+5d)^r} + \ldots,$$

eben so auch

$$\underset{(a|3d)^r}{S} - \underset{(a+d|3d)^r}{S} - \underset{(a+2d|3d)^r}{S} =$$

$$\frac{1}{a^r} - \frac{1}{(a+d)^r} - \frac{1}{(a+2d)^r} + \frac{1}{(a+3d)^r} - \frac{1}{(a+4d)^r} - \frac{1}{(a+5d)^r} + \ldots$$

Es soll sogleich hier bemerkt werden, was freilich erst später sich zeigen wird, dass zu einer jeden harmonischen Reihe der ersten Ordnung eine eigenthümliche konstante Zahl, d. h. eine solche zugehöre, welche von der Gliederanzahl nicht abhängt, wohl aber nach Verschiedenheit der Werthe von a und d auch verschieden ausfällt, und folglich als eine Funktion nicht von n, sondern von a und d angesehen werden muss. Diese in Bezug auf n konstanten Zahlen, welche ganz füglich harmonische Konstanten benannt werden können, spielen bei der Summirung der hieher gehörigen Reihen eine sehr wichtige Rolle, müssen

desshalb wegen ihres häufigen Gebrauches durch ein kurzes und deutliches Zeichen in den damit behafteten Ausdrücken dargestellt werden. Hiezu wird nun das Zeichen

$$\underset{a|d}{C}$$

ausgewählt, welches stets die der harmonischen Reihe der ersten Ordnung, deren Anfangszahl a und Differenz d ist, zugehörige Constante darstellen wird. Die Bestimmung des eigentlichen Werthes dieser harmonischen Konstanten wird bald genauer angegeben werden.

Bei den harmonischen Reihen höherer Ordnungen kann die Aufstellung besonderer ihnen zugehöriger Konstanten leicht ganz vermieden werden, indem an deren Stelle die Summen der unendlichen Reihen selbst treten. Desshalb wird in der Folge von keinen anderen harmonischen Konstanten die Rede sein, als nur von jenen, welche den harmonischen Reihen der ersten Ordnung zugehören.

§. 4.

Die in §. 3. erklärten Bezeichnungen können und müssen zunächst dazu benützt werden, um mit ihrer Hilfe die allen harmonischen Reihen der verschiedenen Ordnungen eigenthümlichen Eigenschaften darzustellen. Man wird dabei zugleich die Ueberzeugung gewinnen, mit welcher Leichtigkeit jene Zeichen sich handhaben lassen, und wie sicher durch dieselben die gedachten, allerdings höchst einfachen und der Sache nach längst bekannten Eigenschaften durch bestimmte klare Formeln ausgedrückt werden können, auf welche man sich bei dem später davon zu machenden Gebrauche kurz berufen kann.

Setzt man in der eigentlich als Erklärung dienenden Gleichung I. des §. 3. ma anstatt a und md anstatt d, so ergibt sich daraus

$$\overset{n}{\underset{(ma|md)^r}{S}} = \frac{1}{(ma)^r} + \frac{1}{(ma+md)^r} + \frac{1}{(ma+2md)^r} + \frac{1}{(ma+3md)^r} + \cdots \cdots + \frac{1}{(ma+(n-1)md)^r},$$

oder

$$\overset{n}{\underset{(ma|md)^r}{S}} = \frac{1}{m^r}\left[\frac{1}{a^r} + \frac{1}{(a+d)^r} + \frac{1}{(a+2d)^r} + \frac{1}{(a+3d)^r} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)d)^r}\right],$$

was, sobald man nur anstatt der zwischen den Klammern enthaltenen harmonischen Reihe ihre Bezeichnung substituirt, in

$$\text{I.} \quad \overset{n}{\underset{(ma|md)^r}{S}} = \frac{1}{m^r} \cdot \overset{n}{\underset{(a|d)^r}{S}}$$

übergeht, woraus dann ferner durch blosse Umkehrung auch

$$\text{II.} \quad \overset{n}{\underset{(a|d)^r}{S}} = m^r \cdot \overset{n}{\underset{(ma|md)^r}{S}}$$

folgt.

Diese einfachen Gleichungen, vermöge welcher die Anfangszahl und Differenz einer harmonischen Reihe mit jeder beliebigen Zahl m multiplicirt oder dividirt werden darf, wenn nur zugleich die ganze Reihe mit m^r multiplicirt oder dividirt wird, leisten bei ihren häufigen Anwendungen so mannigfaltige und wichtige Dienste, dass es wohl die Mühe lohnen dürfte, hierüber einige kurze Bemerkungen beizufügen, nicht sowohl weil dabei etwas wesentlich Neues gesagt werden soll, als vielmehr um sich in der Folge stets bestimmt darauf berufen zu können.

Zuerst verdient hervorgehoben zu werden, dass durch die Gleichung II. jede gegebene harmonische Reihe, in welcher entweder die Anfangszahl oder die Differenz oder auch beide zugleich Brüche sind oder solche in sich enthalten, durch die Multiplikation mit den Nennern der vorkommenden Brüche auf eine andere harmonische Reihe gebracht werden kann, in welcher beide vorgenannte Zahlen ganze Werthe besitzen. Demnach lassen sich alle harmonischen Reihen mit rationalen Anfangszahlen und Differenzen auf andere Reihen mit ganzen dergleichen Zahlen zurückführen, wonach durch die vorgenommene Untersuchung der letzteren zugleich die Theorie aller rationalen harmonischen Reihen erschöpft wird. Daraus ersieht man die besondere Wichtigkeit, welche hiebei die Betrachtung der Reihen mit ganzen Anfangszahlen und Differenzen besitzt.

Durch die Gleichung I. vermag man offenbar jeden Faktor, welchen etwa die Anfangszahl und die Differenz einer harmonischen Reihe gemeinschaftlich haben sollten, aus jenen Zahlen herauszuziehen, indem man zugleich der Reihe den entsprechenden Divisor vorsetzt. Dadurch ist man nicht selten im Stande, die Anfangszahl und Differenz einer gegebenen Reihe zu verkleinern, was begreiflicher Weise die Rechnungen mit ihnen zu erleichtern geeignet ist. Umgekehrt ist es durch Einführung neuer Faktoren möglich, mehrere gegebene harmonische Reihen entweder auf gleiche Anfangszahlen oder auch, was noch nützlicher wird befunden werden, auf gleiche Differenzen zu bringen, beinahe auf dieselbe Weise und mit gleicher Leichtigkeit, wie man meh-

rere gegebene Brüche auf gleiche Zähler oder Nenner zu bringen pflegt.

Ferner ist leicht zu sehen, dass man solche harmonische Reihen, bei welchen Anfangszahl und Differenz algebraisch irrationale Werthe haben, durch Multiplikation mit zweckmässig ausgewählten Faktoren dergestalt verwandeln könne, dass eine der beiden genannten Zahlen, und zwar welche man will, rational wird, ganz analog mit der Art, wie man bei irrationalen Brüchen entweder den Zähler oder den Nenner nach Willkür rational zu machen gewohnt ist.

Auf ganz gleiche Weise ist man offenbar im Stande bei harmonischen Reihen mit komplexer Anfangszahl oder Differenz eine dieser zwei Zahlen in eine reelle zu verwandeln, was in der Regel wohl am schicklichsten mit der Differenz ausgeführt wird.

Alle die aufgezählten Anwendungen sind so einleuchtend, und die Art ihrer Ausführung so leicht, dass es ganz überflüssig sein würde, länger dabei zu verweilen oder wohl gar sie mit Beispielen zu beleuchten.

§. 5.

Trennt man bei einer harmonischen Reihe eine bestimmte Anzahl ihrer Anfangsglieder von allen nachfolgenden Gliedern derselben, so wird sich nicht verkennen lassen, dass sowohl die ersteren als die letzteren, für sich allein betrachtet, selbst eine harmonische Reihe bilden, welche beide mit der gegebenen Reihe gleiche Differenzen besitzen; auch die Anfangszahl der ersten Abtheilung ist einerlei mit jener der gegebenen Reihe; hingegen jene der zweiten Abtheilung gleicht dem Nenner des ersten Gliedes in eben dieser Abtheilung. In Gemässheit der Bezeichnungsart des §. 3. besteht daher die Gleichung

$$\text{I.}\quad \underset{(a|d)^r}{\overset{m+n}{S}} = \underset{(a|d)^r}{\overset{m}{S}} + \underset{(a+md|d)^r}{\overset{n}{S}}\quad,$$

aus welcher sich durch Umkehrung die weitere Gleichung

$$\text{II.}\quad \underset{(a+md|d)^r}{\overset{n}{S}} = \underset{(a|d)^r}{\overset{m+n}{S}} - \underset{(a|d)^r}{\overset{m}{S}}$$

ergibt.

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man jede harmonische Reihe in die Summe oder den Unterschied zweier eben solcher Reihen zerlegen, ja diese Zerlegung lässt sich durch die

wiederholte Anwendung der Gleichungen noch weiter fortsetzen und ohne Anstand bis auf die einzelnen Glieder der gegebenen Reihe ausdehnen.

Ein besonderer Fall zum Gebrauche der eben angeführten Zerlegung tritt dann ein, wenn unter den Gliedern der gegebenen Reihe ein solches vorkommt, dessen Nenner gleich 0 ist, was, wie man sich leicht überzeugt, nur dann geschehen kann, wenn a und d verschiedene Vorzeichen haben und zugleich $\frac{a}{d}$ eine ganze Zahl ist. In einem solchen Falle braucht man nur dasjenige Glied, dessen Nenner gleich 0 ist, von allen übrigen durch die vorerwähnte Zerlegung ganz abzusondern und sodann die Untersuchung der übrigen Bestandtheile der Reihe, nach Ausschluss des abgesonderten Gliedes, gerade so vorzunehmen, als ob jenes Glied gar nicht in der Reihe vorhanden gewesen wäre.

Umgekehrt lassen sich durch die obigen Gleichungen auch zuweilen zwei oder mehrere harmonische Reihen in eine einzige zusammenziehen, sobald bei dem Vorhandensein gleicher Differenzen die End- und Anfangsglieder der einzelnen Reihen entweder ohnehin bereits als nach einerlei Gesetz unmittelbar auf einander folgend angesehen werden können, oder die dazwischen etwa fehlenden Glieder vorher gehörig eingeschaltet und dann selbstverständlich auch wieder abgezogen werden.

§. 6.

Die Gleichung I. des §. 4. geht, wenn darin $m = -1$ angenommen wird, in

$$\text{I.}\quad \overset{n}{\underset{(-a|-d)^r}{S}} = \frac{1}{(-1)^r}.\overset{n}{\underset{(a|d)^r}{S}} = (-1)^r.\overset{n}{\underset{(a|d)^r}{S}}$$

über. Man sieht hieraus, dass jede harmonische Reihe, in welcher Anfangszahl und Differenz gleichzeitig das Zeichen — vor sich tragen, unmittelbar in eine andere mit additiven solchen Zahlen verwandelt und auf solche Art der erste Fall ganz vermieden werden könne.

Wird in der Gleichung I. §. 5. $-a$ anstatt a und zugleich $n-m$ anstatt n gesetzt, so erhält man

$$\overset{n}{\underset{(-a|d)^r}{S}} = \overset{m}{\underset{(-a|d)^r}{S}} + \overset{n-m}{\underset{(md-a|d)^r}{S}}.$$

Nimmt man nun die Glieder der Reihe $\overset{m}{\underset{(-a|d)^r}{S}}$ in umgekehrter Ordnung, so findet man

$$\overset{m}{\underset{(-a|d)^r}{S}} = \overset{m}{\underset{((m-1)d-a|-d)^r}{S}} = (-1)^r . \overset{m}{\underset{(a-(m-1)d|d)^r}{S}}$$

und folglich

$$\text{II.} \quad \overset{n}{\underset{(-a|d)^r}{S}} = \overset{n-m}{\underset{(md-a|d)^r}{S}} + (-1)^r . \overset{m}{\underset{(a-(m-1)d|d)^r}{S}} .$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$\text{III.} \quad \overset{n}{\underset{(a|-d)^r}{S}} = (-1)^r . \overset{n}{\underset{(-a|d)^r}{S}} = \overset{m}{\underset{(a-(m-1)d|d)^r}{S}} + (-1)^r . \overset{n-m}{\underset{(md-a|d)^r}{S}} .$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist man im Stande, auch solche harmonische Reihen, in welchen entweder nur die Anfangszahl, oder auch die Differenz für sich allein subtraktiv sein sollte, auf andere Reihen zu bringen, bei welchen beide diese Zahlen additiv sind. Zu diesem Behufe braucht man nur die Zahl m, welche ohnehin willkürlich angenommen werden darf, so auszuwählen, dass sie, wenn a und d bloss numerisch ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen betrachtet werden, zwischen den beiden Zahlen $\frac{a}{d}$ und $\frac{a}{d}+1$ liegt. Denn aus

$$m > \frac{a}{d} \quad \text{und} \quad m < \frac{a}{d}+1$$

folgt sogleich

$$md > a \text{ und } (m-1)d < a,$$

woraus sich zeigt, dass unter der gemachten Voraussetzung die Anfangszahlen $md-a$ und $a-(m-1)d$ der in den Formeln II. und III. auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vorkommenden harmonischen Reihen stets eben so wie die Differenzen additiv sind.

Hiervon scheint nur der Fall eine Ausnahme zu machen, wenn der Quotient $\frac{a}{d}$ selbst eine ganze Zahl sein sollte. Allein für diesen Fall ist bereits in §. 5. bemerkt worden, dass dann eines von den Gliedern der Reihe den Nenner 0 haben werde, und wurde zugleich ebendort gesagt, wie man sich dabei zu verhalten habe.

§. 7.

Noch muss wegen der wichtigen Folgerungen, welche daraus für die Theorie der harmonischen Reihen sich herleiten lassen, eine andere Art der **Zerlegung** dieser Reihen gezeigt werden für den **besonderen** Fall, wenn darin die Anzahl der Glieder eine **zusammengesetzte** Zahl ist.

Nimmt man an, dass die Anzahl der Glieder einer gegebenen harmonischen Reihe durch das Produkt mn ausgedrückt werde, wo m was immer für eine **ganze additive** Zahl sein kann, so lässt sich die Reihe durch wiederholte Anwendung der Formel I. des §. 5. in n Abtheilungen zerlegen, deren jede nach der Ordnung m Glieder enthält, wodurch sich der Ausdruck ergibt:

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{mn}{S}} = \underset{(a|d)^r}{\overset{m}{S}} + \underset{(a+md|d)^r}{\overset{m}{S}} + \underset{(a+2md|d)^r}{\overset{m}{S}} + \underset{(a+3md|d)^r}{\overset{m}{S}} + \ldots + \underset{(a+(n-1)md|d)^r}{\overset{m}{S}} .$$

Werden nun in den n Abtheilungen auf der rechten Seite vorläufig nur die **ersten** Glieder einer jeden von ihnen in Betracht gezogen und zusammen addirt; so wird man sogleich erkennen, dass dieselben eine harmonische Reihe von n Gliedern mit der Anfangszahl a und der Differenz md ausmachen und daher durch $\underset{(a|md)^r}{\overset{n}{S}}$ zu bezeichnen sind. Aus den **ersten** Gliedern jener Abtheilungen gehen aber durchgängig die **zweiten** Glieder derselben hervor, indem man in den früheren überall $a+d$ anstatt a setzt, wesshalb die Summe dieser letzteren durch $\underset{(a+d|md)^r}{\overset{n}{S}}$ ausgedrückt werden kann. Auf gleiche Weise ergeben sich daraus ferner die Summen der **dritten** und ebenso der **folgenden** Glieder aller jener Abtheilungen mit

$$\underset{(a+2d|md)^r}{\overset{n}{S}} , \underset{(a+3d|md)^r}{\overset{n}{S}} , \ldots . \underset{(a+(m-1)d|md)^r}{\overset{n}{S}} .$$

Es ist demnach

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{mn}{S}} = \underset{(a|md)^r}{\overset{n}{S}} + \underset{(a+d|md)^r}{\overset{n}{S}} + \underset{(a+2d|md)^r}{\overset{n}{S}} + \underset{(a+3d|md)^r}{\overset{n}{S}} + \ldots + \underset{(a+(m-1)d|md)^r}{\overset{n}{S}} .$$

oder, wenn man wegen der Art des davon künftig zu machenden Gebrauches die auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehenden Theile dieser Gleichung mit einander vertauscht,

I.

$$\overset{n}{\underset{(a|md)^r}{S}} + \overset{n}{\underset{(a+d|md)^r}{S}} + \overset{n}{\underset{(a+2d|md)^r}{S}} + \overset{n}{\underset{(a+3d|md)^r}{S}} + \ldots + \overset{n}{\underset{(a+(m-1)d|md)^r}{S}} = \overset{mn}{\underset{(a|d)^r}{S}},$$

eine Zusammensetzung, die hauptsächlich desswegen bemerkenswerth ist, weil hier auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Differenzen der Reihen von einander verschieden sind, was in §. 5. nicht der Fall war.

§. 8.

Man pflegt in der Mathematik öfters eine Bezeichnung, welche ursprünglich nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen aufgestellt wurde, und daher auch nur unter der Voraussetzung des Vorhandenseins dieser Bedingungen eine bestimmte Bedeutung hat, späterhin auf Fälle auszudehnen, in welchen jene Bedingungen nicht oder nicht vollständig eintreffen, weil hiedurch häufig der nicht gering anzuschlagende Vortheil erlangt wird, dass durch eine solche Ausdehnung der ursprünglichen Bedeutung die Ausdrücke, in welchen jene Bezeichnung vorkommt, eine Erweiterung ihrer Giltigkeit auf solche Fälle erhalten können, für welche sie nach der früheren beschränkten Bedeutung nicht anwendbar sein würden, so dass man auf diese Weise die Aufstellung besonderer Ausdrücke oder Formeln für diese letzteren Fälle nicht nöthig hat.

Man hat die Möglichkeit der Anwendung einer solchen vortheilhaften Ausdehnung der Bedeutung bei dem in §. 3. angeführten allgemeinen Summenzeichen $\overset{m}{S}$ keineswegs übersehen. Geht man von der gewöhnlichen Erklärung dieses Zeichens aus, vermöge welcher $\overset{m}{S}fn$ die Summe der m ersten Glieder jener Reihe ausdrückt, deren allgemeines Glied fn ist, so liegt dabei selbstverständlich die Voraussetzung zum Grunde, dass die Zahl m nicht nur eine ganze, sondern zugleich additiv sei; desshalb kann in Folge dieser Erklärung für jene Fälle, in welchen m entweder eine nicht ganze oder auch eine subtraktive Zahl sein sollte, für das aufgestellte Zeichen gar keine Bedeutung in Anspruch genommen werden und daher eigentlich von der Anwendung jenes Zeichens in diesen letzten Fällen keine Rede sein. Dennoch kommen häufig Ausdrücke vor, in welchen das gedachte Summenzeichen enthalten ist, wobei aber nach der Beschaffenheit des behandelten Gegenstandes die Zahl m auch subtraktive Werthe erhalten kann. Es entsteht dann offenbar die Frage,

welche Bedeutung man dem Summenzeichen $\overset{m}{S}fn$ beilegen müsse, damit die mit diesem Zeichen behafteten Ausdrücke auch in jenen Fällen ihre Giltigkeit behalten, wenn etwa m eine subtraktive Zahl oder $m=0$ sein sollte, ohne genöthiget zu sein, für diese Fälle abgesonderte Formeln aufzustellen?

Die Beantwortung dieser Frage pflegt man sich gemeiniglich dadurch zu verschaffen, indem man die für ganze additive Werthe von m leicht zu erweisende Gleichung

$$\text{I.}\quad \overset{m}{S}fn - \overset{m-1}{S}fn = fm$$

als eine allgemein, auch für $m=0$ und für subtraktive m giltige, annimmt. Unter dieser Annahme braucht man nur in dieser Gleichung zuerst $m=1$, dann nach und nach $m=0, -1, -2, -3, \ldots, -(m-1)$ zu setzen um daraus erstlich

$$\text{II.}\quad \overset{0}{S}fn = 0$$

und dann allgemein

$$\overset{-m}{S}fn = -f0 - f(-1) f(-2) f(-3) - \ldots - f-(m-1)$$

oder in kurzer Bezeichnung

$$\text{III.}\quad \overset{-m}{S}fn = -\overset{m}{S}f(1-n)$$

zu erhalten.

Das eben angegebene Verfahren kann wohl auf den Namen eines allgemeinen Beweises keinen Anspruch machen. Denn genau betrachtet lässt sich daraus nur folgern, dass unter der Annahme der durch die Gleichung III. ausgedrückten Bedeutung des Zeichens $\overset{-m}{S}fn$ die Gleichung I. für alle ganzen, sowohl additiven als subtraktiven Werthe von m mit Einschluss von $m=0$ ihre Giltigkeit behalte, und dass die gleiche Ausdehnung der Giltigkeit auf alle aus dieser Gleichung gezogenen Folgerungen sich erstrecke; allein ob dieselbe Ausdehnung der Giltigkeit auch allen anderen das obige Summenzeichen enthaltenden Gleichungen oder Formeln zukomme, ist durch das Vorstehende keineswegs erwiesen. Auch lässt sich aus logischen Gründen leicht erkennen, dass es geradezu unmöglich sein muss, aus der obigen durch eine bestimmte Voraussetzung beschränkten Erklärung die Bedeutung des Summenzeichens für einen Fall herzuleiten, in welchem jene Voraussetzung gar nicht eintrifft.

Demnach wird sich ein wirklicher Beweis über den Umfang der Giltigkeit aller mit dem Summenzeichen $\overset{m}{S}$ behafteten Aus-

drücke nur dadurch herstellen lassen, indem man von einer Erklärung der Bedeutung dieses Zeichens ausgeht, welche alle Fälle, mag m additiv, subtraktiv oder 0 sein, in sich fasst. Es scheint auch nicht schwierig zu sein, eine so beschaffene Erklärung zu finden, weil hiezu eben die obige Gleichung I. benützt werden könnte, indem man als Erklärung vorausschickt, dass $\overset{m}{S}fn$ eine solche Funktion von m bedeuten solle, welche für $m=0$ verschwindet, und zugleich für jeden sowohl additiven als subtraktiven Werth von m der Gleichung I. Genüge leistet.

In diese Erklärung ist der Fall der Gleichung II. ausdrücklich aufgenommen, weil hiedurch nur eigentlich die der Funktion zugehörige Konstante bestimmt wird. Setzt man ferner darin zuerst anstatt m nach und nach die ganzen additiven Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots. m$, so ergibt sich daraus für diese Fälle die Bedeutung des Zeichens $\overset{m}{S}fn$ als Summe der m ersten Glieder der zu dem allgemeinen Gliede fn gehörigen Reihe eben so einfach, wie schon vorher die Bedeutung für subtraktive Werthe von m daraus abgeleitet wurde. Man braucht sich dann fernerhin bei der Aufstellung anderer mit dem Summenzeichen versehenen Ausdrücke nur zu hüten, dabei solche Ableitungsgründe anzuwenden, durch welche wieder die Beschränkung auf additive Werthe von m herbeigeführt wird, oder, wenn man diess zu thun genöthigt gewesen wäre, muss die Giltigkeit des auf solche Art gefundenen Ausdruckes auch für subtraktive m jederzeit besonders nachgewiesen werden, was wohl in der Regel leicht zu bewerkstelligen sein dürfte.

Wird das so eben über die Anwendung des allgemeinen Summenzeichens des §. 3. Gesagte insbesondere nun auf die ebendort eingeführte Bezeichnung der harmonischen Reihen übertragen, so hat man nur nöthig, in dem Vorhergehenden $fn=\frac{1}{(a+(n-1)d)^r}$ anzunehmen, um sogleich aus II. und III. die Werthe

$$\text{IV.}\quad \underset{(a|d)^r}{\overset{0}{S}} = 0$$

und auch

V.

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{-m}{S}} = -\overset{m}{S}\frac{1}{(a+(1-n-1)d)^r} = -\overset{m}{S}\frac{1}{(a-nd)^r} = -(-1)^r.\overset{m}{S}\frac{1}{(nd-a)^r}$$

$$= (-1)^{r+1}.\underset{(d-a|d)^r}{\overset{m}{S}}$$

zu erhalten, durch welche die richtige Bedeutung jener Bezeichnung auch für $m=0$ und für jede ganze subtraktive Zahl $-m$ festgestellt wird.

Noch muss hier bemerkt werden, dass die Art der Herleitung der in den §§. 4, 5, 6, 7 gefundenen Gleichungen allerdings, wie es dort nicht anders sein konnte, auf der Voraussetzung eines ganzen additiven Werthes von n und in den §§. 5, 6, 7 auch von m beruht, daher jene Gleichungen auch nur unter der Bedingung des Vorhandenseins dieser Voraussetzungen als erwiesen angesehen werden können. Es ist jedoch leicht, sich zu überzeugen, dass die nämlichen Gleichungen unter der Annahme der so eben nachgewiesenen Bedeutung in den Fällen, wenn die bezeichneten Zahlen entweder subtraktiv oder 0 sind, ihre Giltigkeit wirklich beibehalten. Ohne hierüber in Weitläufigkeiten einzugehen, welche nothwendig sein würden, wenn man sämmtliche hiebei mögliche Fälle aufzählen und vollständig erweisen wollte, mag es genügen, die aufgestellte Behauptung nur in einem einzelnen Falle zu rechtfertigen, und hiezu die Gleichung I. des §. 5. auszuwählen, wenn darin angenommen wird, dass sowohl m als n subtraktive Zahlen seien. Unter dieser Voraussetzung geht

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{m+n}{S}} \text{ in } \underset{(a|d)^r}{\overset{-m-n}{S}}, \quad \underset{(a|d)^r}{\overset{m}{S}} \text{ in } \underset{(a|d)^r}{\overset{-m}{S}} \text{ und } \underset{(a+md|d)^r}{\overset{n}{S}} \text{ in } \underset{(a-md|d)^r}{\overset{-n}{S}}$$

über. Nun ist aber vermöge der vorhergehenden Gleichung V,

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{-m-n}{S}} = (-1)^{r+1}.\underset{(d-a|d)^r}{\overset{m+n}{S}}, \quad \underset{(a|d)^r}{\overset{-m}{S}} = (-1)^{r+1}.\underset{(d-a|d)^r}{\overset{m}{S}}$$

und

$$\underset{(a-md|d)^r}{\overset{-n}{S}} = (-1)^{r+1}.\underset{((m+1)d-a|d)^r}{\overset{n}{S}},$$

ferner vermöge der Gleichung I. des §. 5, wenn darin $d-a$ anstatt a angenommen wird,

$$\underset{(d-a|d)^r}{\overset{m+n}{S}} = \underset{(d-a|d)^r}{\overset{m}{S}} + \underset{((m+1)d-a|d)^r}{\overset{n}{S}},$$

woraus durch die Multiplikation mit $(-1)^{r+1}$

$$(-1)^{r+1}.\underset{(d-a|d)^r}{\overset{m+n}{S}} = (-1)^{r+1}.\underset{(d-a|d)^r}{\overset{m}{S}} + (-1)^{r+1}.\underset{((m+1)d-a|d)^r}{\overset{n}{S}}$$

und durch Substitution der vorhergefundenen Werthe

$$\underset{(a|d)^r}{\overset{-m-n}{S}} = \underset{(a|d)^r}{\overset{-m}{S}} + \underset{(a-md|d)^r}{\overset{-n}{S}}$$

folgt, was eben die zu erweisende Gleichung ist.

Auf gleich leichte Weise kann auch die Richtigkeit aller übrigen vorbezeichneten Gleichungen in den hieher gehörigen Fällen nachgewiesen werden.

Es versteht sich wohl von selbst, dass nach der eben vorgenommenen Erweiterung der Giltigkeit bei den Gleichungen der §§. 4, 5, 6, 7, welche die eigentliche Grundlage der Lehre von den harmonischen Reihen aller Ordnungen bilden, nunmehr auch alle aus diesen Gleichungen sich ergebenden Folgerungen die gleiche Ausdehnung ihrer Giltigkeit besitzen werden, ohne nöthig zu haben, diess späterhin in einem jeden einzelnen Falle abermals in Erinnerung zu bringen.

§. 9.

Die Gleichungen der §§. 4, 5, 6, 7 lassen noch eine andere höchst wichtige Erweiterung ihrer Anwendung zu. Bisher wurde nämlich vorausgesetzt, dass die in jenen Gleichungen durch n bezeichnete Anzahl der Glieder eine endliche sei. Da aber hiebei n eine jede beliebige, wie immer grosse ganze Zahl sein kann, so ist es erlaubt, bei der unendlichen Zunahme von n auch auf die Grenze der wachsenden Zahlen über zu gehen, d. h. $n=\infty$ zu setzen, ohne dass jene Gleichungen ihre Giltigkeit verlieren. Bei dieser Annahme erhalten jedoch vermöge §. 3. die Ausdrücke eine etwas veränderte Gestalt, weil bei den harmonischen Reihen in der Bezeichnung die Anzahl der Glieder, wenn sie unendlich ist, weggelassen wird, während jede endliche solche Anzahl ausdrücklich beigesetzt werden muss. Um hiebei jedes Missverständniss zu vermeiden, und zugleich um in der Folge bei den davon zu machenden Anwendungen sich stets bestimmt darauf berufen zu können, wird es zweckmässig sein, jene Gleichungen in der Form, welche sie für $n=\infty$ annehmen, neuerdings hieher zu setzen. Es sind folgende:

$$\text{I.}\quad \underset{(ma|md)^r}{S} = \frac{1}{m^r}\cdot \underset{(a|d)^r}{S}\,,\quad \underset{(a|d)^r}{S} = m^r.\ \underset{(ma|md)^r}{S}\,,$$

$$\text{II.}\quad \underset{(a|d)^r}{S} = \overset{m}{\underset{(a|d)^r}{S}} + \underset{(a+md|d)^r}{S}\,,\quad \underset{(a+md|d)^r}{S} = \underset{(a|d)^r}{S} - \overset{m}{\underset{(a|d)^r}{S}}\,,$$

$$\text{III.}\quad \underset{(-a|-d)^r}{S} = (-1)^r.\ \underset{(a|d)^r}{S}\,,$$

$$\text{IV.}\quad \underset{(-a|d)^r}{S} = \underset{(md-a|d)^r}{S} + (-1)^r.\ \overset{m}{\underset{(a-(m-1)d|d)^r}{S}}\,,$$

$$\text{V.}\quad \underset{(a|-d)^r}{S} = \overset{m}{\underset{(a-(m-1)d|d)^r}{S}} + (-1)^r . \underset{(md-a|d)^r}{S} ,$$

$$\text{VI.}\quad \underset{(a|md)^r}{S} + \underset{(a+d|md)^r}{S} + \underset{(a+2d|md)^r}{S} + \underset{(a+3d|md)^r}{S} + \ldots + \underset{(a+(m-1)d|md)^r}{S} = \underset{(a|d)^r}{S} .$$

In Bezug auf die Anwendung dieser Gleichungen darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass der Buchstabe m in den Gleichungen I. jede beliebige Zahl, in II., IV. und V. nur eine ganze, übrigens additive oder subtraktive Zahl sein könne, endlich in VI. nothwendig eine zugleich ganze und additive sein müsse, wie man diess aus den vorausgehenden Ableitungen auch ohne eine ausführlichere Erörterung leicht selbst entnehmen wird.

Eben so leicht wird man erkennen, dass die in den §§. 4, 5, 6, 7 enthaltenen Bemerkungen über die verschiedenartige Benützung jener Gleichungen auch für den Fall, wenn darin $n=\infty$ angenommen wird, d. h. für die eben vorhin aufgestellten Gleichungen ihre volle Giltigkeit beibehalten.

Wie bei allen unendlichen liegt auch bei solchen harmonischen Reihen eine wesentliche Bedingung zur Sicherheit ihrer Anwendung darin, dass dieselben konvergent seien. Nun lässt sich durch die von Gauss aufgestellten Kennzeichen der Konvergenz leicht erweisen und darf hier als ohnehin bekannt angesehen werden, dass ohne Rücksicht auf die Werthe von a und d jede harmonische Reihe der ersten Ordnung divergent, hingegen jede solche einer höheren als der ersten Ordnung angehörige Reihe stets konvergent sei, wenn nicht etwa unter den Gliedern der Reihe ein solches vorkommt, dessen Nenner gleich o ist. Von der Behandlungsart dieses letzten Falles ist bereits früher gehandelt worden. Daher finden die vorhergehenden 6 Gleichungen auf die harmonischen Reihen aller höheren Ordnungen allerdings sichere Anwendung, nicht aber auch auf jene der ersten Ordnung. Wirklich kann bei diesen letzteren Reihen, weil sie als divergent im eigentlichen Sinne keine Summe besitzen, auch das Zeichen $\underset{a|d}{S}$ nicht eine solche Summe ausdrücken, sondern lässt sich nur als ein kurzes Simbol zur leichteren Bezeichnung der unendlichen Reihe selbst, ohne Rücksicht auf die Summe ihrer Glieder, betrachten. Wird aber das Zeichen $\underset{a|d}{S}$ nur in dem eben erklärten richtigen Sinne verstanden, dann überzeugt man sich ohne Mühe, dass die vorher angeführten 6 Gleichungen auch für die harmonischen der ersten Ordnung als giltig anzusehen sind, indem z. B. die Gleichung I., welche für $r=1$ in

$$\underset{ma|md}{S} = \frac{1}{m} \cdot \underset{a|d}{S}$$

übergeht, eigentlich nichts anderes ausdrückt, als dass die durch $\underset{a|d}{S}$ dargestellte unendliche Reihe durch die Division aller ihrer Glieder mit m in die Reihe $\underset{ma|md}{S}$ übergehe, was, wie man sogleich sieht, vollkommen richtig ist. Ebenso verhält es sich offenbar mit den übrigen obigen Gleichungen, wesshalb es nicht nöthig sein wird, länger bei diesem Gegenstande zu verweilen.

§. 10.

Durch die eben angestellten Betrachtungen ist eine wesentliche Verschiedenheit zwischen den harmonischen Reihen der ersten und jenen der höheren Ordnungen zum Vorscheine gekommen, welche ihren Grund in dem Nichtvorhandensein der Konvergenz bei den erstern hat. Diese Verschiedenheit wird sich als eine durchgreifende zeigen, indem aus der nämlichen Ursache auch in den fernerhin abzuleitenden Eigenschaften keine völlige Uebereinstimmung zwischen den harmonischen Reihen der ersten und der höheren Ordnungen, sondern vielmehr nur eine ungemein deutlich sich darstellende Analogie sich zeigen wird. Desshalb müssen nun zunächst die harmonischen Reihen der ersten Ordnung einer genauen und, soweit diess möglich ist, vollständigen Untersuchung unterworfen und dann erst später zur Betrachtung der höheren Ordnungen übergegangen werden.

Um die durch $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ bezeichnete Summe von n Gliedern der harmonischen Reihe der ersten Ordnung, deren Anfangszahl a und Differenz d ist, für beliebige bestimmt gegebene Werthe von a, d und n zu berechnen, genügt es, so lange die Anzahl der Glieder nur gering ist, vollkommen, die einzelnen Glieder zu entwickeln und zusammen zu addiren. In diesem Falle bedarf es keines anderen mehr künstlichen Verfahrens. Allein die Ausführung der Addition wird offenbar desto zeitraubender, je grösser die Anzahl der zu addirenden Glieder ist und kann endlich bei einer sehr grossen solchen Anzahl ganz unmöglich werden. Um nun auch in jenen Fällen, in welchen man eine wirkliche Addition aller Glieder nicht ausführen will oder kann, dennoch die gewünschte Summe wenigstens näherungsweise ohne allzu grosse Beschwerlichkeit zu finden, ist es nothwendig, mit der gegebenen harmonischen Reihe eine Umformung vorzunehmen, durch welche man in

den Stand gesetzt werden soll, den Werth der ganzen Reihe mit Hilfe einer nur mässigen Anzahl ihrer ersten Glieder mit jeder erforderlichen Genauigkeit darzustellen. Solcher zu dem angeführten Zwecke tauglicher Umformungen gibt es mehrere, von welchen einige längst bekannt, andere, wie es scheint, es bis jetzt noch nicht sind. Zu dem gegenwärtigen Gebrauche soll jedoch nur eine einzige, und zwar die am längsten bekannte von ihnen, wirklich angeführt und benützt werden, weil dieselbe wenigstens in praktischer Beziehung vorzugsweise tauglich sich zeigt, wenn ihr auch vielleicht noch einige theoretische Mängel ankleben dürften. Man gelangt dazu auf dem kürzesten Wege, wenn man in der bekannten allgemeinen Summirungs- oder eigentlich Umformungsformel Euler's, vermöge welcher

$$\overset{n}{S}z = \int z\,\partial n + \frac{z}{2} + \frac{B_1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{B_2}{4!}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial n^3} + \frac{B_3}{6!}\cdot\frac{\partial^5 z}{\partial n^5} - \frac{B_4}{8!}\cdot\frac{\partial^7 z}{\partial n^7} + \ldots$$

ist, wo $\overset{n}{S}z$ nach §. 3. die Summe der n ersten Glieder einer Reihe bezeichnet, deren allgemeines Glied z als Funktion von n betrachtet ist, und $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$, die bekannten Bernoulli'schen Zahlen ausdrücken, $z = \frac{1}{a+(n-1)d}$ annimmt.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich

$$\int z\,\partial n = \frac{1}{d}\cdot l(a+(n-1)d),$$

oder auch

$$\int z\,\partial n = \frac{1}{d}\cdot l\left(\frac{a+(n-1)d}{d}\right),$$

indem beide diese Ausdrücke nur durch eine von n unabhängige Zahl von einander verschieden sind, und daher einerlei Differenzial besitzen. Hier soll der letztere derselben, obgleich er an sich betrachtet etwas weniger einfach ist, als Integral angenommen werden, weil hiedurch einige der folgenden Formeln und darunter insbesondere die wichtige Summenformel des §. 49. eine einfachere Gestalt erhalten werden, als es bei der Annahme des vorhin zuerst angesetzten Integrales der Fall sein würde.

Bezeichnet man nun ferner die dem obigen zweiten Integrale zugehörige Konstante, welche eben diejenige ist, auf die bereits in §. 3. hingewiesen wurde, durch das dort angegebene Zeichen $\underset{a|d}{C}$, und führt die in der Euler'schen Formel angezeigten Differenzirungen, die keiner Schwierigkeit unterliegen, wirklich aus, so

erhält man sogleich die zu dem vorgesteckten Zwecke allerdings brauchbare umgeformte Reihe:

$$\text{I.}\quad \overset{n}{\underset{a|d}{S}} = \underset{a|d}{C} + \frac{1}{d}.l\left(\frac{a+(n-1)d}{d}\right) + \frac{1}{2(a+(n-1)d)} - \frac{B_1 d}{2(a+(n-1)d)^2} + \frac{B_2 d^3}{4(a+(n-1)d)^4} - \frac{B_3 d^5}{6(a+(n-1)d)^6} + \frac{B_4 d^7}{8(a+(n-1)d)^8} - \ldots$$

Aus der eben gefundenen lässt sich auf höchst einfache Weise noch eine weitere, zu dem nämlichen Gebrauche dienliche Formel ableiten. Setzt man nämlich in I. $n+1$ anstatt n, so geht daraus

$$\overset{n+1}{\underset{a|d}{S}} = \underset{a|d}{C} + \frac{1}{d}.l\left(\frac{a+nd}{d}\right) + \frac{1}{2(a+nd)} - \frac{B_1 d}{2(a+nd)^2} + \frac{B_2 d^3}{4(a+nd)^4} - \frac{B_3 d^5}{6(a+nd)^6} + \ldots$$

hervor. Nun ist aber:

$$\overset{n+1}{\underset{a|d}{S}} = \overset{n}{\underset{a|d}{S}} + \frac{1}{a+nd}.$$

Indem man diesen Werth substituirt und dann auf beiden Seiten $\frac{1}{a+nd}$ abzieht, ergibt sich auf der Stelle:

$$\text{II.}\quad \overset{n}{\underset{a|d}{S}} = \underset{a|d}{C} + \frac{1}{d}.l\left(\frac{a+nd}{d}\right) - \frac{1}{2(a+nd)} - \frac{B_1 d}{2(a+nd)^2} + \frac{B_2 d^3}{4(a+nd)^4} - \frac{B_3 d^5}{6(a+nd)^6} + \ldots$$

Die beiden Gleichungen I. und II. unterscheiden sich zwar nicht bedeutend von einander, doch ist sichtbar, dass die letztere nicht nur im Allgemeinen einen einfacheren Ausdruck gibt, als die erstere, sondern dass überdiess in II. alle Glieder vom dritten angefangen kleiner sind, als die gleichvielten Glieder in I., sobald darin d als additiv angenommen wird; was, wie schon in §. 6. gezeigt wurde, stets vorausgesetzt werden darf. Desshalb soll in der Folge von I. kein weiterer Gebrauch gemacht, sondern ausschliesslich nur die Gleichung II. angewendet werden. Aus II. ergibt sich ferner durch gehörige Versetzung der Glieder:

$$\text{III.}\quad \underset{a|d}{C} = \overset{n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d}.l\left(\frac{a+nd}{d}\right) + \frac{1}{2(a+nd)} + \frac{B_1 d}{2(a+nd)^2} - \frac{B_2 d^3}{4(a+nd)^4} + \frac{B_3 d^5}{6(a+nd)^6} - \ldots,$$

eine Gleichung, von deren Gebrauch sogleich die Rede sein wird.

§. 11.

Bevor zur Erklärung des Gebrauches der in §. 10. aufgestellten Formeln geschritten wird, soll hier noch eine Bemerkung beigebracht werden, die von wesentlichem Einfluss auf die Art der Behandlung bei den nachfolgenden Ableitungen sein wird. Aus dem in §. 2. angegebenen allgemeinen Gliede der harmonischen Reihen ist ersichtlich, dass dieselben eigentlich nichts anderes sind, als die Reihen der reziproken Potenzen oder, was einerlei ist, der Potenzen mit subtraktiven Exponenten von den Gliedern einer arithmetischen Progression. Desshalb muss sich bei einer sistematischen Anordnung aller Theile der Analysis die Lehre von den harmonischen Reihen unmittelbar an die Behandlung der Reihen von Potenzen mit additiven Exponenten einer solchen Progression anschliessen, und da die letztere wohl mit Recht wenigstens der Hauptsache nach schon in den Anfangsgründen der Analysis noch vor der Differenzial- und Integralrechnung vorgenommen wird, sollten auch die harmonischen Reihen ebendort eingeschaltet und wenigstens ihre vorzüglichsten Eigenschaften ohne Zuziehung der erst später sich ergebenden genannten zwei Rechnungsarten bewiesen werden. Nur diejenigen Sätze, welche auf diese Art etwa nicht dargethan werden können, müssen und dürfen desshalb auch an den späteren Ort verschoben und dort als Nachtrag zu den früheren Lehren beigebracht werden. In §. 10. sind aber die Formeln I., und daher auch II. und III., aus der Euler'schen allgemeinen Summenformel als ein besonderer Fall ihrer Anwendung hergeleitet worden nnd setzen somit die Kenntniss der Differenzial- und theilweise auch der Integralrechnung voraus. Hierin liegt nach dem Gesagten offenbar ein Fehler gegen die richtige Methode, der nicht hätte begangen werden sollen, wenn es irgend möglich war, ihn zu vermeiden. Letzteres ist nun wirklich der Fall, indem die Formeln des §. 10. auch durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten ohne alle Beihilfe der Differenzial- und Integralrechnung gefunden werden können. Man braucht zu diesem Zwecke nur durch einige vorauszuschickende Betrachtungen, bei welchen man sich auf die bereits in §. 8. angeführte Gleichung I. stützen kann, zuerst die Form der Reihe festzusetzen, in welcher die Entwicklung der Funktion $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ ihrer Beschaffenheit nach vorgenommen werden kann, und dann die Werthe der unbestimmten oder eigentlich unbekannten Koeffizienten mit Hilfe der nämlichen Gleichung und unter Beiziehung der bekannten, zwischen den Bernoulli'schen Zahlen

geltenden, Relationen ohne weitere Schwierigkeit, als die Weitläufigkeit der Rechnung mit sich bringt, aufzufinden. Der Verfasser glaubte jedoch, der Ableitung der Formeln des §. 10., die keineswegs neu sind und nur wegen einiger dabei Statt findender Nebenumstände, insbesondere wegen der durch dieselben erfolgenden Einführung der harmonischen, mit $\underset{a|d}{C}$ bezeichneten Konstanten eine etwas ausführlichere Betrachtung erfordern, eine so bedeutende Ausdehnung des Raumes, als zur Durchführung des zuletzt angedeuteten Verfahrens erforderlich sein würde, nicht widmen zu dürfen. Diess ist der Grund, wesshalb in §. 10. der dort angewendeten sehr kurzen Ableitung aus der Euler'schen Summirungsformel der Vorzug gegeben wurde, während die so eben beigefügten Bemerkungen genügen werden, um Demjenigen als Hindeutungen zu dienen, der etwa die Lehre von den harmonischen Reihen in ein ausführliches Lehrbuch der mathematischen Analysis vollständig aufzunehmen beabsichtigen sollte.

Im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung wird es sich ergeben, dass der Gebrauch der Differenzial- und Integralrechnung bei den harmonischen Reihen der ersten Ordnung fernerhin ganz leicht entbehrt werden könne und daher auch in der Folge bei diesen Reihen niemals Statt zu finden braucht. Schwieriger dürfte es sein, diese Vermeidung auch bei den harmonischen Reihen der höheren Ordnungen vollständig durchzuführen, ohne in allzu grosse Weitläufigkeit zu verfallen. Desshalb wird bei den letzteren Reihen die Differenzialrechnung unbedenklich angewendet werden, hingegen die Integralrechnung und insbesondere die sogenannten bestimmten Integrale, deren man sich häufig zur Auffindung der etwas mehr verwickelten, hieher gehörigen Summirungen zu bedienen pflegt, sollen hier durchgängig ausser Anwendung bleiben, weil hiedurch für die Lehre von den harmonischen Reihen, wie man sehen wird, weder ein Nachtheil, noch eine Schwierigkeit entsteht, wohl aber umgekehrt durch dieses Verfahren die Behandlung einiger bestimmter Integrale, namentlich der sogenannten Euler'schen Integrale der zweiten Art oder der Funktionen Γ, nicht selten an Leichtigkeit und zuweilen vielleicht sogar an Sicherheit gewinnen kann.

§. 12.

Vermittelst der Formeln II. und III. des §. 10. kann die Lösung der dort vorgelegten Aufgabe, nämlich den Werth von $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ für jede beliebige

Zahlen a und d und jede noch so grosse Anzahl n von Gliedern stets und zwar, wie man leicht sehen wird, mit desto geringerer Mühe, je grösser n ist, vorgenommen werden. Diess erfolgt zwar eigentlich zunächst immer durch die Formel II. Allein die letztere ist offenbar von solcher Beschaffenheit, dass zu ihrer Anwendung der Werth von $\underset{a|d}{C}$ bereits als bekannt vorausgesetzt werden muss, wesshalb man in jedem Falle zuerst $\underset{a|d}{C}$ durch die Gleichung III. und dann erst $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ durch II. zu berechnen genöthigt ist. Die Berechnung von $\underset{a|d}{C}$ durch III. erfordert keineswegs, dass darin für n der nämliche Werth angenommen werde, für welchen man eigentlich $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ sucht, denn in diesem Falle würden beide Formeln einander wechselseitig bedingen und daher ganz unbrauchbar sein, sondern man kann zur Berechnung von $\underset{a|d}{C}$ durch III. jede beliebige ganze Zahl für n annehmen und demnach diese Zahl so auswählen, wie man sie eben braucht, um $\underset{a|d}{C}$ mit der geringsten Mühe doch in der gewünschten Genauigkeit zu finden; der hiezu nothwendige Werth von $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ muss durch wirkliche Addition der Glieder berechnet werden. Hat man auf solche Art $\underset{a|d}{C}$ gefunden, so ist die Berechnung von $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ für den wirklich gegebenen Werth von n, der stets ein beträchtlich grosser sein muss, keiner weiteren Schwierigkeit unterworfen, als derjenigen, welche sich aus der Beschaffenheit der in II. und III. vorkommenden unendlichen Reihen ergibt. Diese Reihen sind nämlich keineswegs konvergent, sondern gehören zu den sogenannten **halbkonvergenten**, welche in ihren **ersten** Gliedern zwar abnehmen, während die **späteren** Glieder wegen der darin enthaltenen **Bernoulli'schen** Zahlen fortwährend und über alle Grenzen wieder wachsen. Glücklicher Weise ist man durch die treffliche Darstellung **Erchingers** in **Schraders** „Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)}+\frac{a}{(b+2d)(b+3d)}+\frac{a}{(b+4d)(b+5d)}+\ldots$" welche als ohnehin bekannt hier nicht weitläufiger besprochen zu werden braucht, in den Stand gesetzt, mit genügender Sicherheit zu bestimmen, wie weit man dem wahren Werthe der durch die Reihe ausgedrückten Funktion sich gewiss bereits genähert haben werde, wenn man bei irgend einem Gliede des fallenden Theiles derselben mit Ausserachtlassung aller nachfolgenden stehen bleibt, und

diese Näherung fällt schon bei einer nur mässigen Anzahl beibehaltener Glieder so bedeutend aus, dass sie z. B. für $a = d = 1$ und $n = 9$ bis auf wenigstens 15 Dezimalstellen gebracht, für grössere Werthe von n aber noch weiter getrieben werden kann, was sicherlich für jeden davon zu machenden Gebrauch mehr als genügend ist. Desshalb verdienen die Formeln des §. 10. vor anderen zu dem nämlichen Zwecke anwendbaren in praktischer Beziehung sogar dann den Vorzug, wenn die letzteren etwa wirklich konvergent und daher in theoretischer Beziehung keinem Tadel ausgesetzt sein sollten.

Es wird späterhin hinlängliche Gelegenheit sich darbieten, sich das eben kurz angedeutete Verfahren zur Berechnung von $\underset{a|d}{C}$ durch Beispiele ganz deutlich zu machen.

§. 13.

Die gezeigte Art der Berechnung von $\underset{a|d}{C}$ und dann auch von $\overset{n}{\underset{a|d}{S}}$ lässt sich allerdings nicht nur dann ausführen, wenn a und d rationale Zahlen sind, sondern auch, wenn sie irrational oder komplex sein sollten. Allein in den beiden letzten aufgezählten Fällen wird sie wegen der dabei Statt findenden Vermengung rationaler und irrationaler, oder auch reeller und imaginärer Zahlen weit verwickelter und lästiger, als bei rationalen Werthen von a und d, welche, wie schon vorhin gezeigt wurde, stets auf ganze Zahlen zurückgeführt werden können. In jenen verwickelten Fällen muss man daher suchen, durch Trennung der vorkommenden ungleichartigen Zahlen sich die Rechnung möglichst zu erleichtern. — Was zunächst den Fall anbelangt, wenn a und d, oder wenigstens die eine von diesen Zahlen algebraisch irrational ist, braucht man nur durch die bekannte Methode der Multiplikation des Zählers und Nenners mit zweckmässig ausgewählten Faktoren in dem Bruche $\frac{1}{a+nd}$ den Nenner rational zu machen, und diesen Werth in den Formeln des §. 10. zu substituiren. Hiedurch werden dort vom dritten Gliede angefangen alle Nenner rational, und es ist dann leicht, in den irrationalen Zählern die rationalen und irrationalen Glieder von einander zu sondern, wodurch zugleich die Trennung dieser Glieder in den Brüchen selbst bewerkstelligt wird.

Der einfachste Fall dieser Art tritt ein, wenn nur die Anfangszahl allein irrational und zwar von der Form $\alpha+\sqrt{\beta}$ ist,

wo α und β rationale oder, was hier immer leicht bewerkstelligt werden kann, sogar ganze Zahlen bedeuten sollen, hingegen die Differenz d rational angenommen wird. Es wird angemessen sein, diesen Fall etwas umständlicher in Betracht zu ziehen, weil hiebei die Trennung der ungleichartigen Glieder durch bestimmte nicht allzu sehr verwickelte Formeln dargestellt werden kann, von welchen späterhin ein nützlicher Gebrauch sich wird machen lassen.

Sei demnach

$$a = \alpha + \sqrt{\beta},$$

und α, β, wie auch d sollen rationale, möglicher Weise sogar ganze Zahlen bedeuten. Bei dieser Voraussetzung erhält man:

$$\overset{n}{\underset{a\,|\,d}{S}} = \overset{n}{\underset{\alpha+\sqrt{\beta}\,d}{S}}$$

$$= \frac{1}{\alpha+\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha+d+\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha+2d+\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha+3d+\sqrt{\beta}} + \ldots + \frac{1}{\alpha+(n-1)d+\sqrt{\beta}},$$

und, wenn alle Nenner rational gemacht werden,

$$\overset{n}{\underset{a\,|\,d}{S}} = \frac{\alpha-\sqrt{\beta}}{\alpha^2-\beta} + \frac{\alpha+d-\sqrt{\beta}}{(\alpha+d)^2-\beta} + \frac{\alpha+2d-\sqrt{\beta}}{(\alpha+2d)^2-\beta} + \frac{\alpha+3d-\sqrt{\beta}}{(\alpha+3d)^2-\beta} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha+(n-1)d-\sqrt{\beta}}{(\alpha+(n-1)d)^2-\beta},$$

oder endlich nach vollzogener Trennung der rationalen und der irrationalen Glieder und mit Anwendung des im §. 3. erwähnten allgemeinen Summenzeichens $\overset{n}{\underset{r}{S}}$

$$\text{I.}\quad \overset{n}{\underset{a\,|\,d}{S}} = \overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2-\beta} - \sqrt{\beta}\,.\,\overset{n}{S}\frac{1}{(\alpha+(n-1)d)^2-\beta},$$

in welchem Ausdrucke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sowohl das erste Glied, als auch der Faktor von $\sqrt{\beta}$ im zweiten Gliede ganz rational ist und daher die Trennung der rationalen und irrationalen Glieder durchgeführt erscheint.

Zum Behufe kürzerer Darstellung der nachfolgenden Ausdrücke bezeichne man ferner die in denselben häufig vorkommende Zahl $\alpha + nd$ durch einen einzelnen Buchstaben, indem man

$$z = \alpha + nd$$

setzt. Hiedurch ergibt sich, wie man leicht sieht,

$$l(a+nd)=l(\alpha+nd+\sqrt{\beta})=l(z+\sqrt{\beta})=\tfrac{1}{2}l(z^2-\beta)+\sqrt{\beta}.\frac{1}{2\sqrt{\beta}}l\left(\frac{z+\sqrt{\beta}}{z-\sqrt{\beta}}\right).$$

Bei diesem Ausdrucke erkennt man sogleich, dass das erste Glied $\frac{1}{2}l(z^2-\beta)$ nur von β, nicht aber von $\sqrt{\beta}$ abhänge. Dasselbe gilt auch im zweiten Gliede von dem Faktor, mit welchem $\sqrt{\beta}$ behaftet ist, weil vermöge der bekannten logarithmischen Reihen

$$\frac{1}{2\sqrt{\beta}}l\left(\frac{z+\sqrt{\beta}}{z-\sqrt{\beta}}\right)=\frac{1}{z}+\frac{\beta}{3z^3}+\frac{\beta^2}{5z^5}+\frac{\beta^3}{7z^7}+\ldots$$

ist, in welcher Entwickelung nur β, nicht aber zugleich $\sqrt{\beta}$ vorkommt. Endlich ist

$$\frac{1}{a+nd}=\frac{1}{z+\sqrt{\beta}}=\frac{z-\sqrt{\beta}}{z^2-\beta}=\frac{z}{z^2-\beta}-\sqrt{\beta}\cdot\frac{1}{z^2-\beta},$$

und auch für jeden beliebigen Werth von r

$$\frac{1}{(a+nd)^r}=\frac{(z-\sqrt{\beta})^r}{(z^2-\beta)^r}=\frac{(z+\sqrt{\beta})^r+(z-\sqrt{\beta})^r}{2(z^2-\beta)^r}-\sqrt{\beta}.\frac{(z+\sqrt{\beta})^r-(z-\sqrt{\beta})^r}{2\sqrt{\beta}(z^2-\beta)^r},$$

wobei man durch Entwicklung der Zähler mittelst des binomischen Lehrsatzes sich leicht überzeugen kann, dass sowohl das erste Glied als auch im zweiten Gliede der Faktor von $\sqrt{\beta}$ abermals nur von β, nicht aber von $\sqrt{\beta}$ abhänge. Substituirt man nun alle diese Werthe in die Formel III. des §. 10, indem man dabei die von $\sqrt{\beta}$ unabhängigen und die davon abhängenden Glieder von einander sondert, und der Kürze wegen die ersteren durch M, in den letzteren aber den Faktor von $-\sqrt{\beta}$ durch N bezeichnet, so wird man nach Vollziehung der eben angedeuteten Rechnungen finden, dass

$$\text{II.}\quad \underset{\alpha+\sqrt{\beta}|d}{C}=M-N.\sqrt{\beta},$$

ferner:

III.

$$M=\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2-\beta}-\frac{1}{2d}l\left(\frac{z^2-\beta}{d^2}\right)+\frac{z}{2(z^2-\beta)}+\frac{B_1d(z^2+\beta)}{2(z^2-\beta)^2}$$
$$-\frac{B_2d^3(z^4+6\beta z^2+\beta^2)}{4(z^2-\beta)^4}+\frac{B_3d^5(z^6+15\beta z^4+15\beta^2z^2+\beta^3)}{6(z^2-\beta)^6}$$
$$-\frac{B_4d^7(z^8+28\beta z^6+70\beta^2z^4+28\beta^3z^2+\beta^4)}{8(z^2-\beta)^8}+\ldots.$$

und

IV.

$$N = \overset{n}{S}\frac{1}{(\alpha+(n-1)d)^2-\beta}+\frac{1}{2d\sqrt{\beta}}.l\left(\frac{z+\sqrt{\beta}}{z-\sqrt{\beta}}\right)+\frac{1}{2(z^2-\beta)}+\frac{B_1 d.2z}{2(z^2-\beta)^2}$$

$$-\frac{B_2 d^3(4z^3+4\beta z)}{4(z^2-\beta)^4}+\frac{B_3 d^5(6z^5+20\beta z^3+6\beta^2 z)}{6(z^2-\beta)^6}$$

$$-\frac{B_4 d^7(8z^7+56\beta z^5+56\beta^2 z^3+8\beta^3 z)}{8(z^2-\beta)^8}+\ldots$$

ist.

Aus der Betrachtung der angegebenen Werthe von M und N erkennt man auf der Stelle, dass dieselben von $\sqrt{\beta}$ nicht abhängen, da $\sqrt{\beta}$ in M gar nicht vorkommt und auch aus dem zweiten Gliede von N durch die vorhin angeführte Entwicklung ganz verschwindet. Demnach sind in der Formel II. die von $\sqrt{\beta}$ unabhängigen und die davon abhängenden Glieder des Werthes von $\underset{\alpha+\sqrt{\beta}|d}{C}$ vollständig von einander gesondert.

Vermöge der Formeln III. und IV. vermag man jeden der Werthe von M oder N für sich allein zu bestimmen, ohne genöthiget zu sein, gleichzeitig auch den anderen mitberechnen zu müssen. Diess gewährt schon im allgemeinen einige Bequemlichkeit, führt aber vorzüglich dann eine beträchtliche Verkürzung der Arbeit herbei, wenn man in einem besonderen Falle etwa nur einer einzigen von den beiden Zahlen M oder N bedürfen sollte, was, wie man in der Folge sehen wird, zuweilen wirklich eintrifft.

Aus dem nachgewiesenen Umstande, dass M und N nur Funktionen von β, nicht aber unmittelbar von $\sqrt{\beta}$ sind, ergibt sich ferner, das in den Werthen derselben keine Veränderung vorgehen kann, wenn darin $-\sqrt{\beta}$ anstatt $\sqrt{\beta}$ gesetzt wird, weil dadurch $\beta=(\sqrt{\beta})^2=(-\sqrt{\beta})^2$ unverändert bleibt. Wird daher in der Gleichung II. diese Substitution wirklich vorgenommen, so geht dieselbe in

$$\text{V.}\quad \underset{\alpha-\sqrt{\beta}\,|\,d}{C} = M+N.\sqrt{\beta}$$

über, woraus sich zeigt, dass durch die abgesonderte Berechnung von M und N nicht nur der Werth von $\underset{\alpha+\sqrt{\beta}|d}{C}$, sondern gleichzeitig auch jener von $\underset{\alpha-\sqrt{\beta}|d}{C}$ gefunden wird.

Sobald auf die eben erklärte Weise die Werthe von $\underset{\alpha+\sqrt{\beta}\,|\,d}{C}$ und zugleich von $\underset{\alpha-\sqrt{\beta}\,|\,d}{C}$ gefunden sind, braucht man offenbar nur

dieselben in der Formel II. des §. 10. zu substituiren, um daraus auch $\overset{n}{\underset{\alpha+\sqrt{\beta}\,|\,d}{S}}$ und $\overset{n}{\underset{\alpha-\sqrt{\beta}\,|\,d}{S}}$ für jeden gegebenen noch so grossen Werth von n zu erhalten, und da in II. des §. 10. mit alleiniger Ausnahme des ersten ganz die nämlichen Glieder nur mit verkehrten Zeichen vorkommen wie in III., so kann in jener auch die nämliche Art, die ungleichartigen Theile der Glieder von einander zu sondern, angewendet werden, nur mit dem nicht zu übersehenden Unterschiede, dass für n in III. jede beliebige Zahl, welche man eben für vorzugsweise brauchbar hält, in II. hingegen nur diejenige angenommen werden darf, für welche man die Gliedersumme der harmonischen Reihe zu berechnen verlangt.

Es wird kaum nöthig sein zu erinnern, dass das Vorstehende auch auf die Fälle, in welchen die Differenz allein, oder auch Anfangszahl und Differenz einer harmonischen Reihe der ersten Ordnung gleichzeitig irrationale Zahlen von der Form $\alpha+\sqrt{\beta}$ sind, seine Anwendung findet, weil diese Fälle nach §. 4. stets ohne Schwierigkeit auf den hier behandelten zurückgeführt werden können.

§. 14.

Die Ergebnisse des §. 13. lassen sich ganz leicht auf Reihen übertragen, in welchen die Anfangszahl oder Differenz oder auch beide zugleich komplexe Zahlen sind, und zwar genügt es hiebei ebenfalls den einzigen Fall in nähere Betrachtung zu ziehen, wenn die Anfangszahl für sich allein komplex ist, weil auf diesen Fall die übrigen nach §. 4. leicht gebracht werden können. Zur Erreichung dieses Zweckes hat man nur nöthig, in §. 13. durchgängig βi anstatt $\sqrt{\beta}$ und daher $-\beta^2$ anstatt β anzunehmen. Hiedurch bleibt offenbar der Werth von $z=\alpha+nd$ ganz unverändert, hingegen geht

$$\alpha\pm\sqrt{\beta} \quad \text{in} \quad \alpha\pm\beta i,$$

$$z\pm\sqrt{\beta} \quad \text{in} \quad z\pm\beta i,$$

$$z^2-\beta \quad \text{in} \quad z^2+\beta^2$$

und

$$\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\cdot l\left(\frac{z+\sqrt{\beta}}{z-\sqrt{\beta}}\right) \quad \text{in} \quad \frac{1}{2\beta i}\cdot l\left(\frac{z+\beta i}{z-\beta i}\right)$$

oder

$$\frac{1}{2\beta}\cdot \operatorname{arctang}\frac{\beta}{z}$$

über. Werden nun die neuen Werthe anstatt der früheren in den Formeln des §. 13. substituirt und die hiedurch sich ergebenden Werthe von M und N beziehungsweise durch P und Q bezeichnet, so erhält man:

I.

$$P=\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}-\frac{1}{d}l\left(\frac{\sqrt{(z^2+\beta^2)}}{d}\right)+\frac{z}{2(z^2+\beta^2)}$$
$$+\frac{B_1d(z^2-\beta^2)}{2(z^2+\beta^2)^2}-\frac{B_2d^3(z^4-6\beta^2z^2+\beta^4)}{4(z^2+\beta^2)^4}+\ldots.$$

II.

$$Q=\overset{n}{S}\frac{1}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}+\frac{1}{d\beta}.\operatorname{arctang}\frac{\beta}{z}+\frac{1}{2(z^2+\beta^2)}$$
$$+\frac{B_1d.2z}{2(z^2+\beta^2)^2}-\frac{B_2d^3(4z^3-4\beta^2z)}{4(z^2+\beta^2)^4}+\ldots.$$

wobei das allgemeine $r$te Glied von P, wenn man vom vierten Gliede zu zählen anfängt,

$$(-1)^{r+1}.\frac{B_rd^{2r-1}((z+\beta i)^{2r}+(z-\beta i)^{2r})}{4r(z^2+\beta^2)^{2r}}$$

$$=(-1)^{r+1}.\frac{B_rd^{2r-1}\left(z^{2r}-\binom{2r}{2}\beta^2z^{2r-2}+\binom{2r}{4}\beta^4z^{2r-4}-\binom{2r}{6}\beta^6z^{2r-6}+..\right)}{2r(z^2+\beta^2)^{2r}}$$

und von Q

$$(-1)^{r+1}.\frac{B_rd^{2r-1}((z+\beta i)^{2r}-(z-\beta i)^{2r})}{4r\beta i(z^2+\beta^2)^{2r}}$$

$$=(-1)^{r+1}.\frac{B_rd^{2r-1}\left(\binom{2r}{1}z^{2r-1}-\binom{2r}{3}\beta^2z^{2r-3}+\binom{2r}{5}\beta^4z^{2r-5}-\ldots.\right)}{2r(z^2+\beta^2)^{2r}}$$

sein wird; die dortigen Gleichungen II. und V. gehen unter dieser Voraussetzung beziehungsweise in

$$\text{III.}\qquad \underset{\alpha+\beta i\,|\,d}{C}=P-Q\beta i$$

und

$$\text{IV.}\qquad \underset{\alpha-\beta i\,|\,d}{C}=P+Q\beta i$$

über, welche offenbar in gleicher Weise gebraucht werden können wie diess bei den entsprechenden Gleichungen des §. 13. angeführt worden ist.

Die eben gefundenen Formeln lassen noch eine andere etwas einfachere Darstellung zu, welche zuweilen von Nutzen sein kann, und desshalb kurz angegeben zu werden verdient. Setzt man nämlich

$$\alpha+nd+\beta i=\mu(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

so ergibt sich daraus, wie ohnehin bekannt ist,

$$\mu=\sqrt{((\alpha+nd)^2+\beta^2)}=\sqrt{(z^2+\beta^2)},$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\beta}{\alpha+nd}=\frac{\beta}{z},$$

folglich:

$$\varphi=\operatorname{arctang}\frac{\beta}{z},$$

ferner:

$$\cos\varphi=\frac{z}{\sqrt{(z^2+\beta^2)}},\quad \sin\varphi=\frac{\beta}{\sqrt{(z^2+\beta^2)}},$$

und allgemein für jeden Werth von r:

$$(z+\beta i)^{2r}+(z-\beta i)^{2r}$$
$$=\mu^{2r}(\cos 2r\varphi+i.\sin 2r\varphi+\cos 2r\varphi-i.\sin 2r\varphi)=2\mu^{2r}\cos 2r\varphi,$$
$$(z+\beta i)^{2r}-(z-\beta i)^{2r}$$
$$=\mu^{2r}(\cos 2r\varphi+i.\sin 2r\varphi-\cos 2r\varphi+i.\sin 2r\varphi)=2i\mu^{2r}\sin 2r\varphi.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die früheren Ausdrücke für P und Q erhält man:

V.

$$P=\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}-\frac{1}{d}l\left(\frac{\mu}{d}\right)+\frac{\cos\varphi}{2\mu}+\frac{B_1 d\cos 2\varphi}{2\mu^2}$$
$$-\frac{B_2 d^3\cos 4\varphi}{4\mu^4}+\frac{B_3 d^5\cos 6\varphi}{6\mu^6}-\ldots.$$

VI.

$$Q=\overset{n}{S}\frac{1}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}+\frac{\varphi}{d\beta}+\frac{\sin\varphi}{2\mu\beta}+\frac{B_1 d\sin 2\varphi}{2\mu^2\beta}-\frac{B_2 d^3\sin 4\varphi}{4\mu^4\beta}$$
$$+\frac{B_3 d^5\sin 6\varphi}{6\mu^6\beta}-\ldots.,$$

wobei das Fortschreitungsgesetz der Glieder ohnehin klar in die Augen fällt. Die Formeln III. und IV. bleiben ihrer äusseren Form nach unverändert.

§. 15.

Das bisher erklärte Verfahren zur Berechnung der harmonischen Konstanten $\underset{a|d}{C}$ ist zwar in allen Fällen ausreichend, indem durch dasselbe der Werth von $\underset{a|d}{C}$ jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann, was auch a und d für reelle oder komplexe Zahlen sein mögen. Allein jenes Verfahren zeichnet sich, wie man durch einen einzigen Versuch leicht erkennen wird, nicht eben durch besondere Kürze in der Anwendung aus, wesshalb es wünschenswerth bleibt, noch andere Methoden kennen zu lernen, welche wenigstens in einigen Fällen auf weit kürzere Weise zu dem gewünschten Ziele führen; überdiess erhält man dabei keine klare Einsicht in die eigentliche Beschaffenheit der Funktion $\underset{a|d}{C}$ und es bleiben insbesondere die gegenseitigen Beziehungen verborgen, welche zwischen einigen solchen Konstanten Statt finden. Die Kenntniss dieser wechselseitigen Beziehungen besitzt aber eine nicht geringe Wichtigkeit, weil man durch dieselbe in den Stand gesetzt wird, einige jener Konstanten aus anderen herzuleiten und auf diese Art die besondere Berechnung der ersteren aus der Formel III. des §. 10. überflüssig zu machen, und hauptsächlich weil jene Beziehungen, wie sich zeigen wird, einen bedeutenden Einfluss auf die Summirung derjenigen unendlichen Reihen ausüben, die aus den harmonischen der ersten Ordnung entstanden gedacht werden können. Hieraus ergibt sich die Nothwendigkeit, vor Allem eine möglichst genaue Untersuchung über die Eigenschaften der Funktion $\underset{a|d}{C}$ anzustellen, wobei, wie es sich von selbst versteht, die Gleichung III. des §. 10. als Ausgangspunkt dienen muss, weil dieselbe als eigentliche Definition des Werthes jener Funktion zu betrachten ist. — In der eben bezeichneten Gleichung darf n jede beliebige ganze Zahl bedeuten. Stellt man sich nun n als fortwährend und unendlich wachsend vor, so wird man sogleich sehen, dass die beiden ersten Glieder des Werthes von $\underset{a|d}{C}$ gleichfalls unendlich zunehmen, was aber bekanntlich nicht hindert, dass ihr Unterschied dennoch einer bestimmbaren endlichen Zahl als Gränze sich nähern kann; alle folgenden Glieder hingegen werden nicht nur einzeln betrachtet unendlich klein, sondern auch ihre Summe muss eben so beschaffen sein, weil vermöge der in §. 12. angedeuteten von Ettingshausen erwiesenen Eigenschaften der Reihe die zu irgend einer Anzahl der fallenden Anfangsglieder derselben

zugehörige Ergänzung stets kleiner sein muss, als das letzte der beibehaltenen Glieder und dieses, wie gesagt, bei dem unendlichen Wachsen von n ebenso unendlich klein wird, wie alle vorhergehenden Glieder. Geht man daher unter der Voraussetzung der unendlichen Zunahme von n auf die Gränzen über, so ergibt sich die Gleichung:

$$\underset{a|d}{C} = \lim\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}l\left(\frac{a+nd}{d}\right)\right],$$

oder auch, weil

$$\lim\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}l\left(\frac{a+nd}{d}\right)\right] = \lim\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}l\left(\frac{nd}{d}\right)\right]$$
$$= \lim\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}ln\right]$$

ist, etwas einfacher

$$\text{I.}\quad \underset{a|d}{C} = \lim\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}ln\right].$$

Diese eben so kurze als wichtige Relation zeigt zwar, dass $\underset{a|d}{C}$ stets die Gränze sei, welcher sich $\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}ln$, als Funktion von n betrachtet, bei dem unendlichen Wachsthume von n unendlich nähert; es bleibt aber dabei noch unentschieden, ob es eine solche bestimmbare Grenze wirklich gebe, oder ob dieselbe vielleicht selbst unendlich gross sein werde. Bevor daher von der gefundenen Relation irgend ein Gebrauch gemacht werden darf, ist es nothwendig, diesen Zweifel zu lösen.

§. 16.

Zu dem vorgesteckten Zwecke soll zunächst mit der Untersuchung des Falles begonnen werden, wenn beide Zahlen a und d additiv sind, und zugleich a nicht kleiner ist als $\frac{d}{2}$.

Bezeichnet man der Kürze des Ausdruckes wegen die Function $\underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}ln$ durch ψn, nämlich:

$$\psi n = \underset{a|d}{\overset{n}{S}} - \frac{1}{d}ln,$$

wodurch die Gleichung I des §. 15. die Form:

$$\underset{a|d}{C} = \lim \psi n$$

annimmt, und sucht man unter der Voraussetzung, dass $\Delta n = 1$ angenommen werde, die Differenz von ψn, so erhält man:

$$\Delta \psi n = \Delta \overset{n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d} \Delta l n,$$

oder, weil

$$\Delta \overset{n}{\underset{a|d}{S}} = \overset{n+1}{\underset{a|d}{S}} - \overset{n}{\underset{a|d}{S}} = \frac{1}{a+nd},$$

und

$$\Delta l n = l(n+1) - l n = l\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ist, auch

$$\Delta \psi n = \frac{1}{a+nd} - \frac{1}{d} l\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Nun ergibt sich aus den bekannten logarithmischen Reihen, dass

$$l\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3.(2n+1)^3} + \frac{1}{5.(2n+1)^5} + \ldots\right]$$

sei. Diese Reihe ist, wie man weiss, für jeden additiven Werth von n, und ein anderer soll hier nicht vorausgesetzt werden, gewiss konvergent, zugleich besteht sie durchgängig aus additiven Gliedern, daher erhält man daraus:

$$l\left(\frac{n+1}{n}\right) > \frac{2}{2n+1}.$$

Vermöge der gleich anfangs gemachten Annahme soll aber

$$a \underset{>}{=} \frac{d}{2}$$

sein, daher muss auch

$$a + nd \underset{>}{=} nd + \frac{d}{2},$$

ferner:

$$\frac{1}{a+nd} \underset{<}{=} \frac{1}{nd + \frac{d}{2}},$$

oder:

$$\frac{1}{a+nd} \underset{<}{=} \frac{1}{d} \cdot \frac{2}{2n+1},$$

mithin nach dem vorher Erwiesenen:

$$\frac{1}{a+nd} < \frac{1}{d} l\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

sein.

Hieraus sieht man, dass unter den aufgestellten Voraussezzungen in dem vorhin gefundenen Werthe von $\Delta\psi n$ das erste Glied stets kleiner als das zweite, daher $\Delta\psi n$ nothwendig subtraktiv und folglich:

$$-\Delta\psi n = \frac{1}{d} l\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{a+nd}$$

additiv sein müsse.

Ferner ist

$$l\left(\frac{n+1}{n}\right) = l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \dots$$

oder, wenn man hierin die Glieder vom zweiten angefangen paarweise zusammenzieht,

$$l\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{(3n-2)}{2.3.n^3} - \frac{(5n-4)}{4.5.n^5} - \frac{(7n-6)}{6.7.n^7} - \dots$$

Auch bei dieser Reihe findet man leicht durch die bekannten Regeln über die Konvergenz, dass sie für jeden additiven Werth von n, der nicht kleiner ist als 1, gewiss konvergent sei. Ueberdiess sind unter der gleichen Voraussetzung alle Glieder der Reihe vom zweiten angefangen subtraktiv. Daher wird

$$l\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

folglich auch:

$$\frac{1}{d} l\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{a+nd} < \frac{1}{dn} - \frac{1}{a+nd},$$

oder:

$$-\Delta\psi n < \frac{a}{dn(a+nd)},$$

und wenn man hierin anstatt n nach und nach die Zahlen 1, 2, 3,...$(n-1)$ setzt und die hiedurch zum Vorschein kommenden ungleichen Werthe zusammen addirt, ergibt sich daraus, dass die Reihe $-\Delta\psi 1 - \Delta\psi 2 - \Delta\psi 3 - \dots - \Delta\psi(n-1)$ gewiss kleiner ist als

$$\frac{a}{d(a+d)} + \frac{a}{2d(a+2d)} + \frac{a}{3d(a+3d)} + \dots + \frac{a}{(n-1)d(a+(n-1d)}.$$

Da nun diese letztere Reihe, als unendliche betrachtet, wie es ohnehin bekannt ist, für jeden Werth von a und d konvergirt, so folgt daraus, dass auch die unendliche Reihe

$$-\Delta\psi 1-\Delta\psi 2-\Delta\psi 3-\Delta\psi 4-\ldots,$$

welche nichts anderes ist als:

$$\lim[-\Delta\psi 1-\Delta\psi 2-\Delta\psi 3-\ldots-\Delta\psi(n-1)],$$

konvergent sein, und demnach einen endlichen Werth haben müsse.

Nun ist, wie man aus der Differenzenlehre weiss,

$$\psi n=\psi 1+\Delta\psi 1+\Delta\psi 2+\Delta\psi 3+\ldots+\Delta\psi(n-1),$$

oder:

$$\psi n=\psi 1-[-\Delta\psi 1-\Delta\psi 2-\Delta\psi 3-\ldots\Delta\psi(n-1)],$$

und daher:

$$\lim\psi n=\psi 1-\lim[-\Delta\psi 1-\Delta\psi 2-\Delta\psi 3-\ldots-\Delta\psi(n-1)],$$

oder:

$$\underset{a\mid d}{C}=\psi 1-\lim[-\Delta\psi 1-\Delta\psi 2-\Delta\psi 3-\ldots-\Delta\psi(n-1)].$$

Man sieht hieraus, dass die harmonische Konstante $\underset{a\mid d}{C}$ der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist, deren erste

$$\psi 1=\overset{1}{\underset{a\mid d}{S}}-\frac{1}{d}l1=\frac{1}{a}$$

stets endlich sein muss, wenn nicht etwa $a=0$ angenommen werden sollte, die zweite aber nach dem Erwiesenen ebenfalls endlich ist, woraus folgt, dass auch ihr Unterschied, nämlich $\underset{a\mid d}{C}$ unter den hier zum Grunde liegenden Voraussetzungen, dass a und d additiv und zugleich a nicht kleiner als $\frac{d}{2}$ sei, gewiss in allen Fällen einen endlichen Werth besitzen werde, da der Fall, dass $a=0$ sei, durch die zuletzt angeführte Voraussetzung ohnehin ausgeschlossen bleibt.

Was ferner den zunächst zu betrachtenden Fall anbelangt, wenn zwar wie vorhin a und d additiv, jedoch $a<\frac{d}{2}$ sein sollte, lässt sich derselbe leicht auf das bereits Erwiesene zurückführen.

Denn vermöge der Gleichung I. des §. 5. ist

$$\overset{n}{\underset{a|d}{S}} = \overset{1}{\underset{a|d}{S}} + \overset{n-1}{\underset{a+d|d}{S}} = \frac{1}{a} + \overset{n-1}{\underset{a+d|d}{S}}.$$

Hieraus folgt dann:

$$\psi n = \overset{n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d} ln = \frac{1}{a} + \overset{n-1}{\underset{a+d|d}{S}} - \frac{1}{d} ln,$$

und daher:

$$\lim \psi n = \frac{1}{a} + \lim \left[\overset{n-1}{\underset{a+d|d}{S}} - \frac{1}{d} ln \right],$$

oder:

$$\lim \psi n = \frac{1}{a} + \lim \left[\overset{n-1}{\underset{a+d|d}{S}} - \frac{1}{d} l(n-1) \right],$$

oder vermöge der Gleichung I. des §. 15., wenn darin $n-1$ anstatt n und $a+d$ anstatt a gesetzt wird,

$$\underset{a|d}{C} = \frac{1}{a} + \underset{a+d|d}{C}.$$

Da aber a und d als additiv angenommen wurden, muss nothwendig $a+d > \frac{d}{2}$ sein, folglich wird in Gemässheit des vorher erwiesenen Falles $\underset{a+d|d}{C}$ gewiss einen endlichen Werth und demnach auch $\underset{a|d}{C}$ einen eben solchen haben, wenn nicht etwa $a=0$ ist, in welcher Voraussetzung allerdings aus der zuletzt gefundenen Gleichung $\underset{0|d}{C} = \infty$ sich ergeben würde.

In Bezug auf die weiteren Fälle, wenn a oder d subtraktiv sein sollten, ist bereits in §. 6. nachgewiesen worden, dass alle harmonischen Reihen mit subtraktiven Anfangszahlen oder Differenzen leicht auf andere mit additiven solchen Zahlen sich bringen lassen, wodurch man die ersteren ganz zu vermeiden im Stande ist. Ueberdiess wird sehr bald gezeigt werden, dass für die harmonischen Konstanten genau eben solche Gleichungen bestehen, wie sie in den §§. 4—7. für die Reihen selbst aufgestellt wurden. Mit Hilfe dieser Gleichungen wird man dann jede harmonische Konstante, worin Anfangszahl oder Differenz subtraktiv sind, aus anderen dergleichen Konstanten herzuleiten vermögen, bei welchen sowohl Anfangszahl als Differenz additiv sind, und da die letzteren mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn $a=0$ ist, stets endliche Werthe haben, wird das nämliche auch

von den **ersteren** gelten, wieder nur mit Ausnahme des Falles, wenn unter den Gliedern der zugehörigen Reihe sich eines befindet, dessen Nenner gleich 0 ist.

Als Endergebniss der eben vorgenommenen Untersuchung stellt sich demnach heraus, dass die harmonischen Konstanten $C_{a|d}$ stets **endliche** Zahlen sind, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wenn unter den Gliedern der zugehörigen Reihe eines den Nenner 0 hat, was nur dann geschehen kann, wenn entweder $a=0$ ist, oder wenn a und d ungleiche Zeichen vor sich tragen und zugleich a ein Vielfaches von d ist.

§. 17.

Bei der Beweisführung des §. 16. liegt, ohne dass es ausdrücklich bemerkt wurde, die Voraussetzung zum Grunde, dass die Zahlen a und d beide **reell** seien, weil nur bei dieser Annahme die dort angewendete Abtheilung in die beiden Fälle, jenachdem a kleiner oder nicht kleiner ist als $\frac{d}{2}$, einen verständlichen Sinn hat, da man ja, wenn eine der beiden Zahlen komplex sein sollte, nicht zu bestimmen vermag, ob die eine wirklich grösser oder kleiner sei, als die Hälfte der anderen. Zur Vervollständigung der Untersuchung erübriget daher noch, die Frage zu beantworten, welche Beschaffenheit die Constante $C_{a|d}$ für **komplexe** Werthe von a oder d haben werde? Dass man hiebei nur den einzigen Fall, wenn a komplex, hingegen d reell ist, in Betracht zu ziehen nöthig habe, ist aus dem, was bereits in §. 14. angeführt wurde, ohnehin einleuchtend.

Um zur Erledigung dieser Frage zu gelangen, nehme man in §. 14. bei den dort unter I. und II. oder auch, was ganz auf dasselbe hinauskommt, unter V. und VI. angegebenen Werthen von P und Q die ohnehin willkürliche Zahl n als unendlich wachsend an. Unter dieser Voraussetzung erhält man bei dem Uebergange auf die Gränzen offenbar:

$$P=\lim\left[\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}-\frac{1}{d}l\left(\frac{\sqrt{((\alpha+nd)^2+\beta^2)}}{d}\right)\right],$$

und

$$Q=\lim\overset{n}{S}\frac{1}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2},$$

weil dabei alle späteren Glieder jener Werthe als unendlich abnehmend wegfallen, wie man sich leicht überzeugen wird.

Nun ist, da β als reell und daher β^2 als additiv angenommen wird,

$$\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}<\frac{1}{\alpha+(n-1)d},$$

mithin auch:

$$\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}<\overset{n}{S}\frac{1}{\alpha+(n-1)d},$$

und aus dem nämlichen Grunde ergibt sich auch:

$$\frac{1}{d}l\left(\frac{\sqrt{((\alpha+nd)^2+\beta^2)}}{d}\right)>\frac{1}{d}l\left(\frac{\alpha+nd}{d}\right).$$

Durch die Subtraktion der eben gefundenen von der unmittelbar vorhergehenden Ungleichheit, und indem man in Bezug auf das unendliche Wachsen von n auf die Gränzen übergeht, folgt hieraus:

$$\lim\left[\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}-\frac{1}{d}l\left(\frac{\sqrt{((\alpha+nd)^2+\beta^2)}}{d}\right)\right]$$

$$<\lim\left[\overset{n}{S}\frac{1}{\alpha+(n-1)d}-\frac{1}{d}l\left(\frac{\alpha+nd}{d}\right)\right],$$

oder:

$$\lim\left[\overset{n}{S}\frac{\alpha+(n-1)d}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}-\frac{1}{d}l\left(\frac{\sqrt{((\alpha+nd)^2+\beta^2)}}{d}\right)\right]<\lim\left[\underset{\alpha|d}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{d}ln\right],$$

was, wie man aus dem vorhin angeführten Werthe von P und aus §. 15. sieht, nichts anderes ist, als:

$$P<\underset{\alpha|d}{C}.$$

In §. 16. ist bereits erwiesen worden, weil hier nach der Voraussetzung α und d stets reelle Zahlen bedeuten, dass $\underset{\alpha|d}{C}$ in der Regel einen endlichen Werth besitze, wovon nur einige wenige dort bestimmt angegebene Fälle eine Ausnahme machen können. Desshalb muss auch P, welches immer kleiner ist als $\underset{\alpha|d}{C}$, in der Regel stets eine endliche Zahl sein, und nur in den angedeuteten Ausnahmefällen bleibt es für jetzt noch unentschieden und einer späteren, übrigens sehr bald nachfolgenden Erledigung vorbehalten, welche Beschaffenheit P in denselben haben werde. Was nun ferner Q anbelangt, ist aus dem vorhin angesetzten Werthe zu entnehmen, dass er die Summe der unendlichen, durch die bekannten Regeln zur Beurtheilung der Konvergenz leicht als

für alle reellen Werthe von α, β und d stets **konvergent** erkennbaren Reihe sei, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(\alpha+(n-1)d)^2+\beta^2}$$

ist und daher gewiss in allen Fällen ohne Ausnahme eine **endliche** Zahl sein müsse.

§. 18.

Mittelst der in §. 15. gefundenen Relation lassen sich nun für die harmonischen **Konstanten** $\underset{a|d}{C}$ genau eben solche Gleichungen ableiten, wie in den §§. 4.—7. für die zugehörigen Reihen selbst aufgestellt wurden.

Aus der Gleichung I. des §. 4., wenn darin $r=1$ angenommen und dann von ihr

$$\frac{1}{md}.ln=\frac{1}{m}.\frac{1}{d}ln$$

abgezogen wird, erhält man:

$$\underset{ma|md}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{md}ln=\frac{1}{m}.\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{d}ln\right],$$

und wenn man hiebei bei dem unendlichen Wachsen von n auf die Gränzen übergeht:

$$\lim\left[\underset{ma|md}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{md}ln\right]=\frac{1}{m}.\lim\left[\underset{a|d}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{d}ln\right],$$

oder vermöge I. in §. 15.:

$$\text{I.}\quad \underset{ma|md}{C}=\frac{1}{m}.\underset{a|d}{C},$$

woraus ferner

$$\text{II.}\quad \underset{a|d}{C}=m.\underset{ma|md}{C}$$

folgt.

Von diesen Gleichungen, welche zeigen, dass man Anfangszahl und Differenz einer harmonischen Konstante jederzeit durch eine beliebige Zahl m multipliziren oder dividiren dürfe, wenn man nur zugleich die Konstante selbst durch die nämliche Zahl m multiplizirt oder dividirt, lässt sich offenbar für die harmonischen Konstanten der gleiche Gebrauch machen, welcher in §. 4. von den dortigen Gleichungen in Bezug auf die zugehörigen Reihen

angezeigt wurde. Diess ist zwar ganz einleuchtend, doch wegen der häufigen Anwendungen, welche davon gemacht werden sollen, und um in Zukunft stets mit völliger Bestimmtheit sich darauf beziehen zu können, wird man es hoffentlich nicht ganz überflüssig erachten, wenn die wichtigsten Fälle des Gebrauches hier nochmals in möglichster Kürze in Erinnerung gebracht werden.

Durch die Gleichung II. kann offenbar die Anfangszahl und Differenz einer jeden harmonischen Konstante von den darin etwa vorkommenden Brüchen leicht befreit und demnach alle solche Konstanten mit rationalen Anfangszahlen und Differenzen auf andere gebracht werden, worin die genannten Zahlen ganze Werthe haben, so dass die Berechnung der letzteren genügt, um auch die ersteren zu kennen.

Mittelst der Gleichung I. lässt sich jeder Faktor, welcher der Anfangszahl und Differenz einer Konstante gemeinschaftlich sein sollte, aus denselben herausziehen und hiedurch die Konstante auf kleinere dergleichen Zahlen bringen, wodurch die Rechnung oft wesentlich erleichtert wird.

Umgekehrt ist es möglich, durch die Einführung neuer Faktoren nach II. mehrere gegebene harmonische Konstanten auf gleiche Anfangszahlen oder auch auf gleiche Differenzen zu bringen. Vorzüglich die letztere Anwendung erleichtert oft die Aufstellung oder den Gebrauch mancher Gesetze bedeutend.

Noch muss angeführt werden, dass man durch die Gleichung II. in den Stand gesetzt sei, jede harmonische Konstante, in welcher Anfangszahl oder Differenz entweder algebraisch irrationale oder auch komplexe Werthe haben, in eine andere umzuwandeln, in welcher nach Belieben die Anfangszahl oder auch die Differenz rational oder reell ist, was vorzüglich rücksichtlich der Differenz von Nutzen sein kann. Auf diese Verwandlungen ist bereits in den §§. 13. und 14. hingewiesen worden.

§. 19.

Wird von den beiden Theilen der Gleichung I. des §. 5.

$$\frac{1}{d}l(m+n)$$

abgezogen, $r=1$ gesetzt und dann unter Voraussetzung der unendlichen Zunahme von n, während m endlich bleibt, auf die Gränzen übergegangen, so findet man:

$$\lim\left[\overset{m+n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d}l(m+n)\right] = \overset{m}{\underset{a|d}{S}} + \lim\left[\overset{n}{\underset{a+md|d}{S}} - \frac{1}{d}l(m+n)\right]$$

oder

$$\lim\left[\overset{m+n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d}l(m+n)\right] = \overset{m}{\underset{a|d}{S}} + \lim\left[\overset{n}{\underset{a+md|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right],$$

oder vermöge §. 15.:

$$\text{I.}\quad \underset{a|d}{C} = \overset{m}{\underset{a|d}{S}} + \underset{a+md|d}{C},$$

woraus ferner

$$\text{II.}\quad \underset{a+md|d}{C} = \underset{a|d}{C} - \overset{m}{\underset{a|d}{S}}$$

folgt, in welchen Gleichungen offenbar m eine ganze Zahl sein muss.

Mittelst dieser Gleichungen lässt sich, wie man leicht sehen wird, die Anfangszahl einer jeden gegebenen harmonischen Konstante um ein beliebiges Vielfaches der Differenz sowohl vergrössern, als auch verkleinern, was zuweilen mit Nutzen angewendet werden kann, wie sich bald zeigen wird.

§. 20.

Nimmt man in der Gleichung I. des §. 18. $m=-1$ an, so ergibt sich daraus sogleich:

$$\text{I.}\quad \underset{-a|-d}{C} = -\underset{a|d}{C},$$

woraus man sieht, dass jede harmonische Konstante durch die Veränderung der Vorzeichen, sowohl der Anfangszahl, als auch zugleich der Differenz in ihrem Werthe keine Aenderung erleidet, sondern nur ihr Vorzeichen wechselt.

Durch die Subtraktion von $\frac{1}{d}ln$ und den sohinigen Uebergang auf die Gränzen bei unendlichem Wachsthum von n folgt aus der Gleichung II. des §. 6., wenn darin $r=1$ angenommen wird:

$$\lim\left[\overset{n}{\underset{-a|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right] = \lim\left[\overset{n-m}{\underset{md-a|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right] - \overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}},$$

oder

$$\lim\left[\overset{n}{\underset{-a|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right] = \lim\left[\overset{n-m}{\underset{md-a|d}{S}} - \frac{1}{d}l(n-m)\right] - \overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}},$$

oder endlich vermöge §. 15.:

$$\text{II.}\quad \underset{-a|d}{C} = \underset{md-a|d}{C} - \overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}},$$

und ferner, da

$$\underset{a|-d}{C} = - \underset{-a|d}{C}$$

ist, auch:

$$\text{III.}\quad \underset{a|-d}{C} = \overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}} - \underset{md-a|d}{C}.$$

Die Gleichungen II. und III. dienen offenbar zu dem Zwecke, um jede Konstante, worin entweder die Anfangszahl oder die Differenz allein subtraktiv ist, aus einer andern herzuleiten, worin beide diese Zahlen additiv sind, sobald man nur dabei für m diejenige ganze Zahl annimmt, welche zwischen $\frac{a}{d}$ und $\frac{a}{d}+1$ liegt. Von dem Falle, dass $\frac{a}{d}$ selbst eine ganze Zahl sei, wird sogleich besonders gehandelt werden.

§. 21.

Die zuletzt gefundenen Sätze gestatten nunmehr, diejenigen Behauptungen, welche in den §§. 16. und 17. nur angeführt, aber nicht erwiesen wurden, vollständig darzuthun. In den Gleichungen II. und III. des §. 20. kann m stets so ausgewählt werden, dass $md-a$ gewiss eine additive Zahl sei, woraus dann vermöge des in §. 16. bereits Erwiesenen folgt, dass $\underset{md-a|d}{C}$ gewiss einen endlichen Werth besitzt. Das andere Glied $\overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}}$ ist die Summe einer endlichen Anzahl m von Gliedern und daher ebenfalls stets endlich, wenn nicht unter den letzteren eines vorkommt, dessen Nenner gleich 0 ist. Hieraus ergibt sich, wie in §. 16. angeführt wurde, dass $\underset{-a|d}{C}$ und $\underset{a|-d}{C}$ in allen Fällen endlich sein müssen, wenn nicht unter den Gliedern von $\overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}}$ eines mit dem Nenner 0 enthalten ist, unter welcher letzteren Voraussetzung die beiden bezeichneten Konstanten offenbar unendlich gross werden. Bemerkt man hiezu noch, dass die Glieder von $\overset{m}{\underset{a-(m-1)d|d}{S}}$ ihren Werthen nach und ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen ganz die nämlichen sind, wie die m ersten Glieder von $\underset{-a|d}{S}$ oder auch von $\underset{a|-d}{S}$, nur in umgekehrter Ord-

nung genommen, so ist hiedurch die Behauptung des §. 16. vollständig gerechtfertiget, dass nämlich $\underset{-a|d}{C}$ und $\underset{a|-d}{C}$ stets endliche Werthe haben, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wenn unter Gliedern der zugehörigen Reihen $\underset{-a|d}{S}$ oder $\underset{a|-d}{S}$ eines mit dem Nenner 0 vorkommt, in welchem Falle jene Konstanten als unendlich gross bezeichnet werden müssen.

Dass dieser Ausnahmefall dann eintrete und nur dann eintreten könne, wenn a und d ungleiche Vorzeichen haben und zugleich $\frac{a}{d}$ eine ganze Zahl ist, wird man leicht sehen und wurde auch in §. 5. bereits angeführt.

Was ferner die zu Ende des §. 17. noch ausgesetzt gebliebene Entscheidung über die Beschaffenheit der dort durch P bezeichneten Zahl in dem Falle, wenn $\underset{a|d}{C}$ selbst unendlich gross sein sollte, anbelangt, ergibt sich aus I. des §. 19., wenn man darin $a = \alpha + \beta i$ setzt, dass

$$\underset{\alpha+\beta i|d}{C} = \overset{m}{\underset{\alpha+\beta i|d}{S}} + \underset{md+\alpha+\beta i|d}{C}$$

sei. Da hier für m jede beliebige ganze Zahl genommen werden darf, lässt sich m stets so auswählen, dass $md > \alpha$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist offenbar, wenn d additiv ist, auch $md + \alpha$ additiv, was auch α sein mag, und folglich wird vermöge des in §. 17. bereits Erwiesenen auch in $\underset{md+\alpha+\beta i|d}{C}$ das von i unabhängige Glied gewiss einen endlichen Werth haben. Sollte hingegen d subtraktiv sein, dann würde eben dieses auch von md gelten, demnach $md + \alpha$ gewiss auch subtraktiv und daher $-md-\alpha$ eben so wie $-d$ additiv sein.

Nun hat man aber vermöge I. in §. 20.:

$$\underset{md+\alpha+\beta i|d}{C} = - \underset{-md-\alpha-\beta i|-d}{C},$$

daher ist der von i unabhängige Theil in $\underset{md+\alpha+\beta i|d}{C}$ der nämliche, nur mit verkehrtem Zeichen, wie in $\underset{-md-\alpha-\beta i|-d}{C}$, wo sowohl $-md-\alpha$, als auch $-d$ additiv sind, und da dieser letztere Theil vermöge des vorher Nachgewiesenen endlich ist, muss eben dieser Theil auch in $\underset{md+\alpha+\beta i|d}{C}$ gewiss endlich sein. Hieraus ergibt sich, dass in dem obigen Werthe von $\underset{\alpha+\beta i|d}{C}$ das

zweite Glied in allen Fällen so beschaffen ist, dass darin der von i unabhängige Theil gewiss endlich ist. Dasselbe gilt aber auch von dem ersten Gliede $\underset{\alpha+\beta i|d}{\overset{m}{S}}$, weil diess die Summe einer endlichen Anzahl von Brüchen ist, deren keiner den Nenner 0 haben kann, was auch α, β und d für reelle Zahlen bedeuten mögen, wenn nur nicht α und β zugleich 0 sind, in welchem Falle die Anfangszahl $(\alpha+\beta i)$ nicht mehr komplex, sondern selbst 0 sein würde. Demnach muss auch die Summe der beiden Glieder, nämlich $\underset{\alpha+\beta i|d}{C}$, die gleiche Beschaffenheit besitzen, dass der von i unabhängige, mithin reelle Theil, der eben in §. 17. durch P bezeichnet wurde, in allen Fällen ohne Ausnahme einen endlichen Werth hat, wie diess in §. 17. bereits von dem Faktor Q des von i abhängigen Theiles erwiesen worden ist.

§. 22.

Um auch aus der in §. 7. gefundenen die entsprechende Gleichung für die harmonischen Konstanten abzuleiten, ziehe man von der ersteren

$$\frac{1}{md}ln+\frac{1}{md}ln+\frac{1}{md}ln+\ldots+\frac{1}{md}ln=\frac{1}{d}l(mn)-\frac{1}{d}lm$$

ab, wo natürlich zum Behufe der Richtigkeit auf der linken Seite m Glieder als vorhanden angenommen werden müssen. Durch diese Subtraktion und indem man bei unendlicher Zunahme von n auf die Gränzen übergeht, erhält man sogleich:

$$\lim\Big[\underset{a|md}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{md}ln\Big]+\lim\Big[\underset{a+d|md}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{md}ln\Big]+\lim\Big[\underset{a+2d|md}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{md}ln\Big]$$

$$+\ldots+\lim\Big[\underset{a+(m-1)d|md}{\overset{n}{S}}-\frac{1}{md}ln\Big]=\lim\Big[\underset{a|d}{\overset{mn}{S}}-\frac{1}{d}l(mn)\Big]+\frac{1}{d}lm,$$

oder vermöge §. 15.:

$$\text{I.}\quad \underset{a|md}{C}+\underset{a+d|md}{C}+\underset{a+2d|md}{C}+\ldots+\underset{a+(m-1)d|md}{C}=\underset{a|d}{C}+\frac{1}{d}lm.$$

Von dieser Gleichung verdient ein einzelner darin enthaltener Fall wegen seines häufigen Vorkommens noch besonders hervorgehoben zu werden. Setzt man nämlich $a=d=1$, so geht die Gleichung I. in

$$\underset{1|m}{C}+\underset{2|m}{C}+\underset{3|m}{C}+\ldots+\underset{m|m}{C}=\underset{1|1}{C}+lm$$

über, woraus sich, durch die Subtraktion von

$$\underset{m|m}{C} = \frac{1}{m} \cdot \underset{1|1}{C},$$

$$\underset{1|m}{C} + \underset{2|m}{C} + \underset{3|m}{C} + \ldots + \underset{m-1|m}{C} = \frac{m-1}{m} \cdot \underset{1|1}{C} + lm,$$

oder, wenn man hierin anstatt m den zur Bezeichnung der Differenz gewöhnlich angewendeten Buchstaben d setzt,

$$\text{II.} \quad \underset{1|d}{C} + \underset{2|d}{C} + \underset{3|d}{C} + \ldots + \underset{d-1|d}{C} = \frac{d-1}{d} \cdot \underset{1|1}{C} + ld$$

ergibt.

Bei dem Gebrauche dieser Gleichungen darf man nicht ausser Acht lassen, dass der Buchstabe m in I., so wie der an die Stelle des ersteren getretene Buchstabe d in II. keine andere, als nur eine ganze additive Zahl bezeichnen dürfe.

Die Gleich. I. drückt eine wichtige Beziehung aus, welche zwischen den zur Differenz md gehörigen Konstanten $\underset{a|md}{C}$, $\underset{a+d|md}{C}$, $\underset{a+2d|md}{C}$,... .... $\underset{a+(m-1)d|md}{C}$ Statt hat und vermöge welcher eine von diesen Konstanten aus allen übrigen mit Zuziehung des Werthes von $\underset{a|d}{C}$ stets berechnet werden kann, wo die Differenz der letzteren d nur ein aliquoter Theil der früheren md ist.

Eine eben solche Beziehung zwischen den Konstanten $\underset{1|d}{C}$, $\underset{2|d}{C}$, $\underset{3|d}{C}$, ... $\underset{d-1|d}{C}$ zeigt die Gleichung II., von welchen daher ebenfalls die eine aus allen übrigen bei vorausgesetzter Kenntniss von $\underset{1|1}{C}$ sich ableiten lässt.

§. 23.

Aus der Gleichung I. des §. 22. sollen zunächst einige Folgerungen gezogen werden, welche zwar für die Berechnung der harmonischen Konstanten ohne besondere Wichtigkeit sind, aber doch hinlänglich bemerkenswerth erscheinen dürften, um eine Mittheilung zu verdienen und überdiess etwas später zu einem bestimmten Zwecke angewendet werden sollen.

Setzt man in der Gleichung I. des §. 22. $m=2$, wodurch dieselbe in

$$\underset{a|2d}{C} + \underset{a+d|2d}{C} = \underset{a|d}{C} + \frac{1}{d} l2$$

übergeht, und nimmt hierin anstatt a nach und nach

$$a+d,\quad a+3d,\quad a+7d, \ldots .\ a+(2^{n-2}-1)d,\quad a+(2^{n-1}-1)d$$

und gleichzeitig anstatt d beziehungsweise die Werthe

$$2d,\quad 4d,\quad 8d, \ldots .\ 2^{n-2}.d,\quad 2^{n-1}.d$$

an, so ergeben sich auf diese Weise folgende Gleichungen:

$$\underset{a|2d}{C} + \underset{a+d|2d}{C} = \underset{a|d}{C} + \frac{1}{d} l2,$$

$$\underset{a+d|4d}{C} + \underset{a+3d|4d}{C} = \underset{a+d|2d}{C} + \frac{1}{2d} l2,$$

$$\underset{a+3d|8d}{C} + \underset{a+7d|8d}{C} = \underset{a+3d|4d}{C} + \frac{1}{4d} l2,$$

$$\underset{a+7d|16d}{C} + \underset{a+15d|16d}{C} = \underset{a+7d|8d}{C} + \frac{1}{8d} l2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{a+(2^{n-2}-1)d|2^{n-1}d}{C} + \underset{a+(2^{n-1}-1)d|2^{n-1}d}{C} = \underset{a+(2^{n-2}-1)d|2^{n-2}d}{C} + \frac{1}{2^{n-2}.d} l2,$$

$$\underset{a+(2^{n-1}-1)d|2^{n}d}{C} + \underset{a+(2^{n}-1)d|2^{n}d}{C} = \underset{a+(2^{n-1}-1)d|2^{n-1}d}{C} + \frac{1}{2^{n-1}.d} l2.$$

Bei der Addition aller dieser Gleichungen können auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens diejenigen Glieder, welche sich ohnehin gegenseitig aufheben, sogleich weggelassen werden, wodurch nach Summirung der geometrischen Progression

$$\frac{l2}{d}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=\frac{l2}{d}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

folgendes Ergebniss zum Vorschein kommt:

$$\text{I.}\quad \underset{a|2d}{C} + \underset{a+d|4d}{C} + \underset{a+3d|8d}{C} + \underset{a+7d|16d}{C} + \ldots + \underset{a+(2^{n-1}-1)d|2^{n}d}{C} + \underset{a+(2^{n}-1)d|2^{n}d}{C}$$

$$= \underset{a|d}{C} + \frac{l2}{d}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Diesem Ausdrucke kann noch eine andere, zu dem später davon zu machenden Gebrauche etwas besser geeignete Form gegeben werden, indem man darin $a=(1+x)d$ setzt, dann den in den Anfangszahlen und Differenzen aller vorkommenden harmonischen Konstanten gemeinschaftlichen Faktor d durch Anwendung der Gleichung I. des §. 18. aus denselben herauszieht und endlich den Nenner d durch die Multiplikation der Gleichung mit demselben ganz aus ihr wegschafft. Auf diesem Wege erhält man:

$$\text{II.}\quad C_{1+x|2} + C_{2+x|4} + C_{4+x|8} + C_{8+x|16} + \dots + C_{2^{n-1}+x|2^n} + C_{2^n+x|2^n}$$

$$= C_{1+x|1} + l2.\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

In diesem Ausdrucke darf n jede beliebige ganze additive Zahl bedeuten. Lässt man nun n unendlich wachsen und geht auf die Gränzen über, so erkennt man sogleich, dass unter dieser Voraussetzung das letzte auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehende Glied von selbst verschwindet, weil dasselbe hiebei in

$$C_{2^\infty+x|2^\infty} = \frac{1}{2^\infty} \cdot C_{1+\frac{x}{2^\infty}|1} = \frac{1}{2^\infty} \cdot C_{1|1} = 0$$

sich verwandelt. Alle anderen, auf der nämlichen Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Glieder bilden bei der angegebenen Voraussetzung offenbar eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied

$$C_{2^{n-1}+x|2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot C_{1+\frac{x}{2^{n-1}}|2}$$

ist und deren Konvergenz leicht nachgewiesen werden kann. Denn bezeichnet man das eben angeführte allgemeine Glied durch u_n, so wird:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2^n} \cdot C_{1+\frac{x}{2^n}|2}.$$

Hieraus folgt dann:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{1+\frac{x}{2^n}|2}}{C_{1+\frac{x}{2^{n-1}}|2}},$$

und bei dem unendlichen Wachsthume von n ist:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lim C_{1+\frac{x}{2^n}|2}}{\lim C_{1+\frac{x}{2^{n-1}}|2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{1|2}}{C_{1|2}} = \frac{1}{2},$$

woraus nach dem bekannten Satze von Cauchy die Konvergenz der unendlichen Reihe für jeden Werth von x erkannt wird.

Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung II. ist nur der Faktor $2-\frac{1}{2^{n-1}}$ von n abhängig und die Gränze desselben bei der unendlichen Zunahme von n ist offenbar 2. Durch diese Betrachtungen ergibt sich demnach die merkwürdige Summirung nachstehender unendlichen Reihe:

$$\text{III.} \quad \underset{1+x|2}{C} + \underset{2+x|4}{C} + \underset{4+x|8}{C} + \underset{8+x|16}{C} + \ldots = \underset{1+x|1}{C} + 2l2.$$

§. 24.

Aus der in §. 15. gefundenen Relation I. lässt sich noch eine andere sehr wichtige Eigenschaft der harmonischen Konstanten herleiten. Multiplizirt man nämlich erstere durch d, so erhält man:

$$d.\underset{a|d}{C} = \lim[d.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - ln],$$

und auch, wenn hierin a und d beziehungsweise mit a_1 und d_1 vertauscht werden,

$$d_1.\underset{a_1|d_1}{C} = \lim[d_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} - ln],$$

endlich durch die Subtraktion dieser von der früheren Gleichung

$$d.\underset{a|d}{C} - d_1.\underset{a_1|d_1}{C} = \lim[d.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - d_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}}].$$

Nun ist aber:

$$d.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} = \frac{d}{a} + \frac{d}{a+d} + \frac{d}{a+2d} + \frac{d}{a+3d} + \ldots + \frac{d}{a+(n-1)d},$$

und

$$d_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} = \frac{d_1}{a_1} + \frac{d_1}{a_1+d_1} + \frac{d_1}{a_1+2d_1} + \frac{d_1}{a_1+3d_1} + \ldots + \frac{d_1}{a_1+(n-1)d_1},$$

folglich, wenn man diese beiden Werthe von einander abzieht und die gleichvielten Glieder von beiden mit einander vereiniget,

$$d.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - d_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} = \frac{da_1-ad_1}{aa_1} + \frac{da_1-ad_1}{(a+d)(a_1+d_1)} + \frac{da_1-ad_1}{(a+2d)(a_1+2d_1)}$$
$$+ \ldots + \frac{da_1-ad_1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)}$$

oder

$$d.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - d_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} = (da_1 - ad_1)\left[\frac{1}{aa_1} + \frac{1}{(a+d)(a_1+d_1)} + \frac{1}{(a+2d)(a_1+2d_1)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)}\right].$$

Die hier zwischen den Klammern enthaltene Reihe, wenn sie als eine ohne Ende fortgesetzte betrachtet wird, ist, wie man leicht sieht, für alle Werthe von a, d; a_1, d_1 konvergent, nur mit Ausnahme derjenigen, in welchen entweder $a=0$ oder $a_1=0$, oder auch $\frac{a}{d}$ oder $\frac{a_1}{d_1}$ eine subtraktive und zugleich ganze Zahl ist. Mit Ausserachtlassung der eben erwähnten Fälle, in welchen diese Reihe unendlich gross wird, zugleich aber nach dem schon früher Erwiesenen eine der beiden Konstanten $\underset{a|d}{C}$ oder $\underset{a_1|d_1}{C}$ ebenfalls unendlich gross ist, hat man daher bei dem unendlichen Wachsen von n:

$$\lim\left[d.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - d_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}}\right] = (da_1 - ad_1).S\frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)},$$

und wenn dieser Werth in der vorher gefundenen Gleichung substituirt wird, auch:

$$\text{I.}\quad d.\underset{a|d}{C} - d_1.\underset{a_1|d_1}{C} = (da_1 - ad_1).S\frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)}.$$

Diese Gleichung lässt eine andere, der Form nach etwas verschiedene Darstellung zu. Nach demjenigen, was in §. 9. über die richtige Bedeutung der Zeichen $\underset{a|d}{S}$ und $\underset{a_1|d_1}{S}$ gesagt wurde, bezeichnet $d.\underset{a|d}{S} - d_1.\underset{a_1|d_1}{S}$ die ohne Ende fortgesetzte Reihe der gliederweisen Unterschiede der unendlichen Reihen $d.\underset{a|d}{S}$ und $d_1.\underset{a_1|d_1}{S}$. Da nun nach dem Vorhergehenden diese Unterschiede eine konvergente Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{da_1 - ad_1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)} = (da_1 - ad_1).\left(\frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)}\right)$$

bilden, so folgt, dass

$$d.\underset{a|d}{S} - d_1.\underset{a_1|d_1}{S} = (da_1 - ad_1)\,S\frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)},$$

und daher auch

$$\text{II.}\quad d.\underset{a|d}{C} - d_1.\underset{a_1|d_1}{C} = d.\underset{a|d}{S} - d_1.\underset{a_1|d_1}{S}$$

sei.

Die Gleichungen I. und II, nehmen eine noch etwas einfachere Gestalt in dem besonderen Falle an, wenn $d_1 = d$ ist, weil unter dieser Voraussetzung in beiden Gleichungen der gemeinschaftliche Faktor $d = d_1$ durch Division sich wegschaffen lässt. Man erhält auf diese Weise:

$$\text{III.}\quad \underset{a|d}{C} - \underset{a_1|d}{C} = (a_1 - a)\, S \frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d)}$$

und

$$\text{IV.}\quad \underset{a|d}{C} - \underset{a_1|d}{C} = \underset{a|d}{S} - \underset{a_1|d}{S}.$$

In §. 18. ist bereits gezeigt worden, wie alle harmonischen Konstanten, welche verschiedenen Differenzen zugehören, mit Leichtigkeit auf gleiche Differenzen sich bringen lassen. Desshalb können die einfacheren Formeln III. und IV., obgleich nur von einem besonderen Falle geltend, doch für alle Fälle der Anwendung als ausreichend betrachtet werden, wenn man nur jedes Mal die allerdings nur geringe Mühe nicht scheut, alle harmonischen Konstanten auf gleiche Differenzen zu bringen, wenn sie solche nicht etwa ohnehin bereits haben sollten. Von dieser Beschränkung auf den gedachten einzelnen Fall wird in der Folge begreiflicher Weise nur dann wirklicher Gebrauch gemacht werden, wenn hiedurch irgend ein erheblicher Vortheil erzielt werden kann, sei es, dass eine aufzustellende Regel einfacher sich ausdrücken oder die Anwendung einer solchen sich beträchtlich leichter in Ausführung bringen lässt.

§. 25.

Die Gleichungen des §. 24. werden in der Folge dazu benützt werden, um die Anwendung der harmonischen Konstanten bei der Summirung solcher unendlichen Reihen, welche aus harmonischen, durch Zusammenziehung ihrer gleichvielten Glieder entstehend gedacht werden können, darauf zu gründen. Gegenwärtig aber, wo es sich erst um die Berechnung jener Konstanten und Auffindung ihrer gegenseitigen Beziehungen handelt, nicht aber um die Art ihrer Benützung, muss vor Allem näher untersucht werden, welcher Gebrauch von den gefundenen Gleichungen zu den gedachten Zwecken sich machen lässt.

Aus der dortigen Gleichung I. folgt unmittelbar:

$$\text{I.}\quad \underset{a|d}{C} = \frac{d_1}{d}.\underset{a_1|d_1}{C} + \frac{da_1 - ad_1}{d}.S\frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)},$$

und, wenn hierin $a_1 = d_1 = 1$ angenommen wird,

$$\text{II.}\quad \underset{a|d}{C} = \frac{1}{d} . \underset{1|1}{C} + \frac{d-a}{d} . S \frac{1}{(a+(n-1)d)n},$$

oder endlich, wenn anstatt des Summenzeichens die durch dasselbe dargestellte Reihe selbst eingeführt wird,

$$\text{III.}\quad \underset{a|d}{C} = \frac{1}{d} . \underset{1|1}{C} + \frac{d-a}{d}\left(\frac{1}{1.a} + \frac{1}{2(a+d)} + \frac{1}{3(a+2d)} + \frac{1}{4(a+3d)} + \ldots\right).$$

Durch diese Gleichungen ist es offenbar möglich, sobald auch nur eine einzige harmonische Konstante $\underset{a_1|d_1}{C}$ bekannt ist, vorausgesetzt, dass sie nicht etwa zu den in §. 24. angedeuteten Ausnahmefällen gehört, jede andere solche Konstante $\underset{a|d}{C}$ durch die erstere und mit Hilfe einer konvergenten unendlichen Reihe zu finden. Wie die Gleichungen II. und III. zeigen, ist diess insbesondere auch durch die der Form nach einfachste Konstante $\underset{1|1}{C}$ ausführbar, so dass man eigentlich nur nöthig hätte, eine einzige solche Konstante $\underset{a_1|d_1}{C}$ oder auch $\underset{1|1}{C}$ durch die in §. 10. aufgestellte Reihe zu berechnen und daraus alle übrigen mittelst der obigen Gleichungen abzuleiten.

Diess ist allerdings ein neuer, in theoretischer Beziehung ganz untadelhafter Weg, um zur Kenntniss der Werthe von $\underset{a|d}{C}$ zu gelangen, weil dabei nur konvergente Reihen zur Anwendung kommen. Allein bei wirklicher Ausführung unterliegt diese Methode einem bedeutenden Gebrechen, weil die in den obigen Gleichungen vorkommenden unendlichen Reihen nur sehr langsam konvergiren, wesshalb dabei eine sehr beträchtliche Anzahl ihrer Glieder, fast immer weit mehrere, als bei Benützung der Reihe III. des §. 10. zum gleichen Zwecke erforderlich sind, angewendet werden muss, um eine verlangte, etwas bedeutende Näherung zu erzielen. So z. B. werden in der Folge die Werthe mehrerer harmonischen Konstanten in 16 Dezimalstellen genau angegeben werden, welche mit Hilfe der Formel III. des §. 10. in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit berechnet wurden, während selbst das Lebensalter Methusalem's viel zu kurz sein würde, um bei ununterbrochener Arbeit eines Mannes durch die hier zuletzt aufgestellten Formeln auch nur eine einzige von ihnen in gleicher Schärfe finden zu können. Diess liefert ein auffallendes Beispiel, dass zuweilen der Gebrauch einer halbkonvergenten, daher eigentlich divergenten, unendlichen Reihe vor einer wirklich konvergenten den Vorzug verdienen könne.

§. 26.

Wäre man im Stande, die durch $S\frac{1}{(a+(n-1)d)(a_1+(n-1)d_1)}$ dargestellte Summe im allgemeinen mittelst einer **geschlossenen analytischen Formel** auszudrücken, ohne dabei die Kenntniss der harmonischen Konstanten schon vorauszusetzen, so würde die Gleichung I. des §. 25. eine bestimmte Beziehung zwischen den beiden Konstanten $\underset{a\,|\,d}{C}$ und $\underset{a_1\,|\,d_1}{C}$ angeben, vermöge welcher die eine durch die andere berechnet werden könnte. Zwar ist die Unmöglichkeit einer solchen Darstellung keineswegs erwiesen worden, doch ist dieselbe bisher wenigstens noch Niemandem gelungen. Wohl aber kann die gedachte Summirung in einigen **besonderen** Fällen wirklich ausgeführt werden, unter welchen vorzugsweise Einer hier von Wichtigkeit ist, weil er nicht nur eine bedeutend ausgedehnte Anwendung gestattet, sondern zugleich daraus Folgerungen sich ergeben, welche aus den übrigen im Vorhergehenden schon erwiesenen Sätzen nicht würden abgeleitet werden können.

Aus der Theorie der goniometrischen Funktionen ist bekannt, dass

$$\frac{\pi}{d}\text{cotang}\frac{a\pi}{d}=\frac{1}{a}-\frac{1}{d-a}+\frac{1}{d+a}-\frac{1}{2d-a}+\frac{1}{2d+a}-\frac{1}{3d-a}+\ldots,$$

oder, wenn man die Glieder paarweise zusammenzieht:

$$\frac{\pi}{d}\text{cotang}\frac{a\pi}{d}=\frac{d-2a}{a(d-a)}+\frac{d-2a}{(a+d)(2d-a)}+\frac{d-2a}{(a+2d)(3d-a)}+\ldots$$

ist, was mit Hilfe des Summenzeichens durch

$$\frac{\pi}{d}\text{cotang}\frac{a\pi}{d}=(d-2a).S\frac{1}{(a+(n-1)d)(d-a+(n-1)d)}$$

ausgedrückt wird. Setzt man aber in der Gleichung III. des §. 24. $a_1=d-a$, so geht dieselbe in

$$\underset{a\,|\,d}{C}-\underset{d-a\,|\,d}{C}=(d-2a).S\frac{1}{(a+(n-1)d)(d-a+(n-1)d)}$$

über, woraus sogleich

$$\text{I.}\quad \underset{a\,|\,d}{C}-\underset{d-a\,|\,d}{C}=\frac{\pi}{d}\text{cotang}\frac{a\pi}{d}$$

folgt. Mittelst dieser Gleichung kann nun jederzeit eine der bei-

den Konstanten $\underset{a\mid d}{C}$ oder $\underset{d-a\mid d}{C}$ durch die andere und durch die bekannten Werthe von π und $\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}$ gefunden werden.

Wie man weiss, lassen die übrigen, aus dem Sinus und Kosinus durch Division entspringenden goniometrischen Funktionen, nämlich die Tangente, Sekante und Kosekante, ebenfalls Zerlegungen in ähnliche Reihen von konvergirenden Brüchen zu, wie die eben angewendete der Kotangente. Hiedurch könnte man sich wohl zu der Vermuthung verleiten lassen, dass vielleicht aus den gedachten weiteren Zerlegungen noch andere, von der vorhergehend gefundenen I. wesentlich verschiedene Relationen zwischen einigen bestimmten harmonischen Konstanten sich ergeben dürften. Diess ist jedoch keineswegs der Fall, wie man sich durch eine spezielle Untersuchung leicht überzeugen kann, vielmehr erhält man aus jeder anderen der angedeuteten Zerlegungen immer wieder die nämliche obige Gleichung oder eine von ihr nicht wesentlich verschiedene. Der Grund dieser Identität wird auf der Stelle einleuchtend, wenn man bedenkt, dass aus der Zerlegung der Kotangente jene der drei übrigen genannten goniometrischen Funktionen sich herleiten lassen und auch gewöhnlich auf diese Weise gefunden zu werden pflegen. Hieraus folgt aber nothwendig, dass die letzteren Zerlegungen keine anderen Ergebnisse zu liefern vermögen, als nur solche, welche in der Zerlegung der Kotangente ihren Grund haben, und eben desshalb auch aus dieser letzteren sich entwickeln lassen müssen. Diese Betrachtung zeigt, dass man nicht nöthig hat, in eine umständlichere Untersuchung hierüber sich einzulassen.

§. 27.

Die harmonischen Konstanten stehen mit zwei in die Analysis bereits seit längerer Zeit aufgenommenen Funktionsformen in einer sehr einfachen und leicht nachweisbaren Verbindung, nämlich mit der von **Gauss** eingeführten und durch Πz bezeichneten Funktion

$$\Pi z = \lim \frac{n!\,.\,n^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots.(z+n)},$$

wo sich das Zeichen lim auf das unendliche Wachsen von n bezieht, und dann auch, wie hieraus von selbst folgt, mit dem von **Euler** zuerst betrachteten, desshalb von **Legendre** mit dem Namen des **Euler**'schen Integrales der **zweiten** Art belegten und durch Γz bezeichneten bestimmten Integrale:

$$\Gamma z = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{z-1} \partial x.$$

Um diese Verbindung zu zeigen, setze man in dem angegebenen Werthe von Πz: $z = \frac{a-d}{d}$. Dadurch erhält man:

$$\Pi \frac{a-d}{d} = \lim \frac{n!.n^{\frac{a-d}{d}}.d^n}{a(a+d)(a+2d)\ldots.(a+(n-1)d)},$$

und hieraus, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$l\Pi \frac{a-d}{d} = \lim \left[l(n!) + \frac{a-d}{d}.ln + nld - la - l(a+d) - l(a+2d) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - l(a+(n-1)d)\right].$$

Durch das Differenziren dieser Gleichung, nicht in Bezug auf n, sondern für die als veränderlich betrachtete Zahl a ergibt sich daraus ferner:

$$\frac{\partial l\Pi \frac{a-d}{d}}{\partial a} = \lim \left[\frac{1}{d}ln - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+2d} - \ldots - \frac{1}{a+(n-1)d}\right]$$

oder

$$\frac{\partial l\Pi \frac{a-d}{d}}{\partial a} = \lim \left[\frac{1}{d}ln - \overset{n}{\underset{a|d}{S}}\right] = -\lim\left[\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right] = -\underset{a|d}{C}.$$

Demnach ist:

$$\text{I.} \quad \underset{a|d}{C} = -\frac{\partial l\Pi \frac{a-d}{d}}{\partial a},$$

oder, weil vermöge der bekannten Eigenschaften der Funktion Πz:

$$\Pi \frac{a-d}{d} = \Pi\left(\frac{a}{d} - 1\right) = \frac{d}{a}\Pi\frac{a}{d},$$

dann:

$$l\Pi \frac{a-d}{d} = ld - la + l\Pi\frac{a}{d},$$

und endlich:

$$\frac{\partial l\Pi \frac{a-d}{d}}{\partial a} = -\frac{1}{a} + \frac{dl\Pi \frac{a}{d}}{\partial a}$$

ist, auch:

$$\text{II.}\quad \underset{a|d}{C} = \frac{1}{a} - \frac{\partial l\Pi \frac{a}{d}}{\partial a}.$$

Durch diese Formeln ist, wie man sieht, die Abhängigkeit der harmonischen Konstante $\underset{a|d}{C}$ von dem Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus von $\Pi\frac{a-d}{d}$ oder auch von $\Pi\frac{a}{d}$ ausgedrückt.

Was noch die Verbindung der Konstante $\underset{a|d}{C}$ mit dem vorhin aufgestellten Euler'schen Integrale oder der Funktion Γz anbelangt, folgt dieselbe aus dem bereits Nachgewiesenen von selbst. Denn es ist bekanntlich:

$$\Pi z = \Gamma(1+z),$$

mithin:

$$\Pi\frac{a-d}{d} = \Gamma\frac{a}{d},$$

und daher:

$$\text{III.}\quad \underset{a|d}{C} = -\frac{\partial l\Gamma\frac{a}{d}}{\partial a}.$$

Durch die Umkehrung der Auflösung können offenbar aus diesen Gleichungen auch die Werthe der Funktionen Πz und Γz oder zunächst ihrer natürlichen Logarithmen durch die harmonischen Konstanten ausgedrückt werden. Man findet auf diese Weise, wenn $a = dz$ gesetzt wird:

$$\text{IV.}\quad l\Pi z = -\int \underset{1+z|1}{C}\,.\,\partial z = lz - \int \underset{z|1}{C}\,.\,\partial z$$

und

$$\text{V.}\quad l\Gamma z = -\int \underset{z|1}{C}\,.\,\partial z.$$

§. 28.

Die eben gefundenen Gleichungen sind, wie man leicht einsieht, nicht geeignet, um aus einem gegebenen **bestimmten** Werthe von Πz oder Γz den zugehörigen Werth von $\underset{z|1}{C}$ oder umgekehrt unmittelbar zu berechnen. Mittelbar aber könnte dieser Zweck erreicht werden, wenn man im Stande wäre, eine der Funktionen Πz oder Γz, oder eigentlich ihren natürlichen Logarithmen, im Allgemeinen mit Hilfe der übrigen in der Analysis

gebräuchlichen Funktionen entweder durch einen geschlossenen Ausdruck oder durch eine unendliche Reihe darzustellen. Das erstere ist wenigstens bis jetzt noch Niemandem gelungen, und man darf wohl der Vermuthung Raum geben, obwohl es nicht erwiesen ist, dass es überhaupt nicht möglich sein dürfte, da Männer, wie Euler, Legendre, Gauss und andere ausgezeichnete Mathematiker, welche sich mit jenen Funktionen beschäftiget haben, es nicht auszuführen vermochten. Man musste sich daher begnügen, zur Berechnung von $l\Pi z$ oder $l\Gamma(1+z)$ unendliche Reihen aufzustellen, aus welchen nun nach §. 27. durch Differenziren derselben eben solche Reihen zur Berechnung der Werthe von $\underset{a|d}{C}$ ohne alle Schwierigkeit hergeleitet werden können. Allein als Ergebniss dieser Herleitung, wenn sie wirklich vorgenommen wird, gelangt man wieder zur nämlichen Reihe, welche bereits in §. 10. auf einem anderen Wege gefunden wurde, oder doch zu einer solchen, die aus der letzteren leicht sich ableiten lässt. Auf diese Weise liefern daher die für $l\Pi z$ oder $l\Gamma(1+z)$ bekannten unendlichen Reihen kein neues Hilfsmittel zur Berechnung der harmonischen Konstanten.

Ueberdiess ist es den Bemühungen der vorangedeuteten höchst scharfsinnigen Männer gelungen, zwischen den Werthen, welche die von ihnen betrachteten Funktionen Πz oder Γz für verschiedene, doch in bestimmten Beziehungen zu einander stehende Werthe von z annehmen, eine bedeutende Anzahl merkwürdiger und zum Theile verwickelter Gleichungen aufzufinden, aus welchen nun nach §. 27. eben solche Gleichungen zwischen verschiedenen Werthen der harmonischen Konstanten $\underset{a|d}{C}$ sich aufstellen lassen. Wirklich könnten auf diesem Wege alle im Vorhergehenden bereits erwiesenen gegenseitigen Beziehungen zwischen den harmonischen Konstanten ebenfalls gefunden werden. So z. B. ist die Gleichung des §. 22. nichts anderes als eine Folgerung aus dem von Legendre aufgestellten Satze:

$$\Gamma x . \Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right) . \Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right) \ldots . \Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right) = \Gamma nx . (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} . n^{\frac{1}{2}-nx},$$

in welchem man nur beiderseits die Logarithmen zu nehmen, dann zu differenziren, aus §. 27. die Werthe zu substituiren und endlich $x = \frac{a}{nd}$ zu setzen braucht, um sogleich die vorbezeichnete Gleichung zu erhalten. Nun vergleiche man aber die Art, wie Legendre in den Exercices de calcul integral T. II. seine Formel ableitet, oder auch den Beweis, welchen Cauchy

in den Exercices de Mathematiques, 15me Livraison, davon gibt, mit dem im Vorgehenden eingeschlagenen Verfahren zur Auffindung der Gleichung I. des §. 22., man wird dann schwerlich im Zweifel sein, welche Methode in Bezug auf Klarheit, Kürze und vielleicht sogar Sicherheit den Vorzug verdiene.

Hiezu bemerke man ferner, dass man bei der Betrachtung der durch Γz bezeichneten bestimmten Integrale gewöhnlich von der Voraussetzung auszugehen pflegt, z bedeute eine additive rationale Zahl, welche Voraussetzung dann auch auf alle daraus zu ziehenden Folgerungen übergeht. Allein bei den harmonischen Konstanten ist die Beschränkung auf additive und rationale Werthe von a und d durchaus unzulässig, weil bei dem Gebrauche dieser Konstanten nicht selten Fälle vorkommen, in welchen a oder d nicht nur irrationale, sondern sogar komplexe Zahlen sind. Man sieht hieraus, dass die so geartete Uebertragung der Eigenschaften der bezeichneten Integrale auf die harmonischen Konstanten zuweilen unzureichend zu dem von den letzteren zu machenden Gebrauche ausfallen kann.

Das eben Gesagte in Verbindung mit demjenigen, was bereits in §. 11. über die sistematische Einreihung der Lehre von den harmonischen Reihen zwischen die übrigen Abtheilungen der Analysis angeführt wurde, wird es genügend erklären, wesshalb bisher zur Aufsuchung der Eigenschaften der harmonischen Konstanten von den schon seit längerer Zeit bekannten Relationen zwischen den Funktionen Πz oder Γz kein Gebrauch gemacht, sondern alles aus davon unabhängigen, mehr elementaren Gründen hergeleitet wurde. Diess soll auch in der Folge auf die nämliche Weise beobachtet und überhaupt die Integralrechnung niemals angewendet, sondern den davon unabhängigen Methoden stets der Vorzug eingeräumt werden.

§. 29.

Die Gleichungen des §. 27. können offenbar auch dazu dienen, um aus der als bekannt angenommenen Funktion $C_{x|1}$ die Funktionen Πz oder Γz abzuleiten. Desshalb ist es möglich, im Gegensatze zu dem in §. 28. betrachteten und als unzweckmässig befundenen den gerade umgekehrten Weg einzuschlagen, indem zuerst die Eigenschaften der harmonischen Konstanten unabhängig von den beiden anderen eben bezeichneten Funktionen aufgesucht und aus diesen erst jene von Πz oder Γz entwickelt werden können. Diese Ordnung der Behandlung gewährt den in

theoretischer Hinsicht wichtigen Vortheil, dass die Lehre von den harmonischen Reihen vor der Integralrechnung und auch, wenigstens der Hauptsache nach, vor der Differenzialrechnung vorgenommen und dort eingereicht werden kann, wohin sie bei sistematischer Eintheilung aller Zweige der Analysis eigentlich gehört, wenn auch späterhin vielleicht noch eine Ergänzung nachgetragen werden muss. Ferner erlangt man hiedurch den praktischen Nutzen, dass dieser Weg meistentheils *leichter* und zuweilen sogar *mit grösserer Sicherheit* sich betreten und durchführen lässt, als jener des §. 28. Die Richtigkeit dieser Behauptung wird man schon aus dem ebendort angedeuteten Beispiele entnehmen, sie wird aber noch einleuchtender werden, wenn man die Mühe nicht scheut, die Vergleichung beider Methoden weiter vorzunehmen. Man betrachte z. B. nur die gewiss nicht unbedenkliche Art, wie *Legendre* die wichtigen Entwickelungen von $l\Gamma z$ oder $l\Gamma(1+z)$ in Reihen nach den fortschreitenden Potenzen von z vornimmt, und vergleiche dieselbe mit der in der Folge gebrauchten Ableitung der entsprechenden Reihen für $\underset{1+z|1}{C}$; man wird dann schwerlich weiter einem Zweifel Raum geben. Hiebei wird man es besonders auffallend finden, dass *Legendre*, um zu seinen Reihen zu gelangen, *zuerst* eine Reihe für $\frac{\partial l\Gamma z}{\partial z}$ aufsucht und *daraus* dann durch Integration die Reihe für $l\Gamma z$ herleitet, was offenbar nichts anderes ist, als dass er zuerst die Reihe für $\underset{z|1}{C}$, und daraus dann auch jene für $l\Gamma z$ entwickelt, folglich rücksichtlich der Ordnung keineswegs den in §. 28. betrachteten, sondern eben den hier bevorworteten Weg einschlägt.

Wie ohnehin bekannt, lassen sich die Werthe einer sehr beträchtlichen Anzahl von bestimmten Integralen auf die Funktion $\frac{\partial l\Gamma z}{\partial z}$ oder nach §. 27. auf $\underset{z|1}{C}$ zurückführen. Wenn daher die Lehre von den harmonischen Reihen, wenngleich vielleicht nur der *ersten* Ordnung, bei Abhandlung der Integralrechnung als schon derselben vorhergehend angesehen werden darf, kann überall anstatt der *ersten* die *zweite* eben angegebene Funktionsform angewendet und hiedurch die angedeuteten Integralwerthe nicht unbedeutend vereinfacht werden, ja höchst wahrscheinlich wird auf diese Weise die *Anzahl* jener Integrale noch einer ansehnlichen *Vergrösserung* fähig sein.

Allein der eben berührte wichtige Gegenstand würde zu seiner nur einigermassen vollständigen Durchführung, die auch erst später vorgenommen werden könnte, einen beträchtlichen Raum

erfordern; überdiess liegt er keineswegs innerhalb des gleich anfangs vorgezeichneten Umfanges der gegenwärtigen Abhandlung. Desshalb soll von demselben fernerhin nicht mehr die Rede sein, sondern die eben darüber gegebenen Andeutungen genügen. Nur möge es gestattet sein, hier noch ein Beispiel beizubringen, aus welchem man die Leichtigkeit und Sicherheit des Ueberganges von den Eigenschaften der harmonischen Konstanten auf jene der Funktion Γx entnehmen kann, und welches zugleich geeignet ist, eine, so weit dem Verfasser bekannt ist, neue bemerkenswerthe Eigenschaft der letzteren Funktion nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke ist eben hauptsächlich die Gleichung II. in §. 23. aufgestellt worden, aus welcher nun die entsprechende Relation für Γx gefunden werden soll. Vermöge der Formel III. des §. 27. ist:

$$\underset{1+x|2}{C} = -\frac{\partial l\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)}{\partial x},\quad \underset{2+x|4}{C} = -\frac{\partial l\Gamma\left(\frac{2+x}{4}\right)}{\partial x},\quad \underset{4+x|8}{C} = -\frac{\partial l\Gamma\left(\frac{4+x}{8}\right)}{\partial x},$$

$$\underset{2^{n-1}+x|2^n}{C} = -\frac{\partial l\Gamma\left(\frac{2^{n-1}+x}{2^n}\right)}{\partial x},\quad \underset{2^n+x|2^n}{C} = -\frac{\partial l\Gamma\left(\frac{2^n+x}{2^n}\right)}{\partial x},$$

$$\underset{1+x|1}{C} = -\frac{\partial l\Gamma(1+x)}{\partial x}.$$

Durch Substitution aller dieser Werthe in der Gleichung II. des §. 23., nachherige Multiplikation mit ∂x und Veränderung aller Vorzeichen geht dieselbe in

$$\partial l\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right) + \partial l\Gamma\left(\frac{2+x}{4}\right) + \partial l\Gamma\left(\frac{4+x}{8}\right) + \dots + \partial l\Gamma\left(\frac{2^{n-1}+x}{2^n}\right)$$
$$+ \partial l\Gamma\left(\frac{2^n+x}{2^n}\right) = \partial l\Gamma(1+x) - l2.(2-\frac{1}{2^{n-1}}).dx$$

über, aus welcher man durch Integration, wenn die zugehörige Konstante durch lC bezeichnet wird,

$$l\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right) + l\Gamma\left(\frac{2+x}{4}\right) + l\Gamma\left(\frac{4+x}{8}\right) + \dots + l\Gamma\left(\frac{2^{n-1}+x}{2^n}\right) + l\Gamma\left(\frac{2^n+x}{2^n}\right)$$
$$= l\Gamma(1+x) - l2.(2-\frac{1}{2^{n-1}})x + lC,$$

dann durch den Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen selbst:

$$\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right).\Gamma\left(\frac{2+x}{4}\right).\Gamma\left(\frac{4+x}{8}\right)\dots\Gamma\left(\frac{2^{n-1}+x}{2^n}\right).\Gamma\left(\frac{2^n+x}{2^n}\right)$$
$$=\Gamma(1+x).2^{-(2-\frac{1}{2^{n-1}})x}.C,$$

oder auch

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{2}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{4}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{8})\dots\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{2^n}).\Gamma(1+\frac{x}{2^n})$$
$$=\Gamma(1+x).2^{-(2-\frac{1}{2^{n-1}})x}.C$$

erhält.

Hier erübriget nur noch, auch den Werth von C zu bestimmen, was keiner Schwierigkeit unterliegt. Denn wird in der zuletzt gefundenen Gleichung $x=0$ angenommen, so erhält man daraus:

$$(\Gamma\tfrac{1}{2})^n.\Gamma 1=\Gamma 1.C,$$

folglich ist:

$$C=(\Gamma\tfrac{1}{2})^n,$$

oder, weil bekanntlich

$$\Gamma\tfrac{1}{2}=\pi^{\frac{1}{2}}$$

ist, auch:

$$C=\pi^{\frac{n}{2}}.$$

Durch die Substitution dieses Werthes ergibt sich endlich die Gleichung:

I.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{2}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{4}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{8})\dots\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{2^n}).\Gamma(1+\frac{x}{2^n})$$
$$=\Gamma(1+x).2^{-(2-\frac{1}{2^{n-1}})x}.\pi^{\frac{n}{2}},$$

oder, weil

$$\Gamma(1+\frac{x}{2^n})=\frac{x}{2^n}.\Gamma\frac{x}{2^n}\quad\text{und}\quad\Gamma(1+x)=x\Gamma x$$

ist, auch:

II.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{2}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{4}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{8})\dots\Gamma(\tfrac{1}{2}+\frac{x}{2^n}).\Gamma\frac{x}{2^n}=\Gamma x.2^{n-(2-\frac{1}{2^{n-1}})x}.\pi^{\frac{n}{2}}.$$

Wollte man in I. ebenso, wie es in §. 23. II. geschehen ist, unmittelbar $n=\infty$ setzen, so würde man finden, dass der zweite Theil der Gleichung unendlich gross werden müsste, was

auch ganz richtig ist, weil unter dieser Voraussetzung der erste Theil eine unendliche Faktorenfolge wird, welche nicht konvergirt. Dividirt man hingegen I. vorher durch

$$(\sqrt{\pi})^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

und nimmt dann erst $n = \infty$ an, so erhält man folgenden bemerkenswerthen Ausdruck einer unendlichen Folge von konvergirenden Faktoren:

$$\text{III.} \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{x}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{x}{4})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{x}{8})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{x}{16})}{\sqrt{\pi}} \cdots = \Gamma(1+x).2^{-2x},$$

welcher bisher noch nicht bekannt gewesen zu sein scheint.

§. 30.

Die im Vorhergehenden erwiesenen Sätze enthalten die allgemeinen Eigenschaften der harmonischen Konstanten, so weit man sie bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft zu entwickeln vermochte; sie dienen als Grundlagen der Lehre von diesen Konstanten, indem aus ihnen alle übrigen Eigenschaften der letzteren sich ableiten lassen; sie sind ferner geeignet, alle wechselseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen einzelnen Konstanten daraus aufzufinden; endlich bieten sie auch die Hilfsmittel dar zur Summirung aller jener konvergenten unendlichen Reihen, welche aus den harmonischen der ersten Ordnung durch das Zusammenziehen ihrer gleichvielten Glieder entspringen können.

Es soll nunmehr zur wirklichen Berechnung der harmonischen Konstanten für bestimmt gegebene Werthe der Anfangszahl und Differenz geschritten werden, und zwar der Ordnung nach zuerst und in grösserer Ausführlichkeit für rationale solche Werthe, hernach auch für irrationale und komplexe, wenigstens in so weit, als diess bei den nachfolgend davon zu machenden Anwendungen nothwendig sein wird.

Was nun zunächst die Berechnung von $\underset{a|d}{C}$ für rationale Werthe von a und d betrifft, ist bereits in §. 18. und §. 20. gezeigt worden, dass man sich hiebei auf ganze und additive Werthe von a und d beschränken könne, weil auf dieselben alle übrigen Konstanten mit gebrochenen oder subtraktiven rationalen Anfangszahlen und Differenzen auf höchst einfache Weise sich

zurückführen lassen. Desshalb soll nur noch von den ersteren wirklich gehandelt werden, von den letzteren hingegen nicht weiter die Rede sein.

Bei der Vornahme dieser Berechnungen wird es sich sehr nützlich erweisen, was eigentlich schon wegen der leichteren Uebersicht des Ganzen nothwendig erscheint, eine bestimmte Ordnung festzustellen und dieselbe genau einzuhalten. Es wird demnach mit der zur kleinsten Differenz $d=1$ gehörigen Konstanten begonnen, und nur allmälig zu immer höheren Differenzen 2, 3, 4,.... übergegangen werden, so weit diess für dienlich erachtet werden wird; ferner soll bei jeder einzelnen Differenz stets mit der kleinsten Anfangszahl $a=1$ angefangen und nach und nach zu höheren fortgeschritten werden. Bei strenger Einhaltung dieser Ordnung wird sich bei den Konstanten rücksichtlich der Art ihrer Berechnung ein Unterschied heraus stellen, wodurch sie gleichsam in zwei Abtheilungen gespalten werden, die schon jetzt durch bestimmte Benennungen bezeichnet werden sollen.

Es wird sich zeigen, dass man gegenwärtig keine einzige harmonische Konstante kennt, deren Werth durch die üblichen analytischen Funktionen in geschlossener Form und ohne Beihilfe einer unendlichen Reihe, sei es jene des §. 10., oder die in §. 25. gefundene, oder irgend eine andere zu gleichem Zwecke taugliche, dargestellt werden kann. In dieser Beziehung besitzen daher alle jene Konstanten einerlei Verhalten. Hingegen wird man finden, dass einige dieser Konstanten auch mit Beiziehung der nach der aufgestellten Ordnung vorhergehend bereits berechneten in keiner Weise durch einen geschlossenen Ausdruck sich darstellen lassen, während man bei anderen diese Art der Ableitung kennt. Die ersteren sollen nun durch den Namen primäre oder auch ursprüngliche, die anderen aber als sekundäre oder abgeleitete bezeichnet werden, welche Bedeutungen in der Folge stets beibehalten werden.

Man erkennt hieraus wohl auf der Stelle, dass alle harmonischen Konstanten mit gebrochenen oder subtraktiven Anfangszahlen oder Differenzen eigentlich zu den sekundären gezählt werden müssen.

Vermöge der Formel II. des §. 19. kann die Anfangszahl einer harmonischen Konstante, wenn sie grösser ist als die Differenz, um ein beliebiges Vielfaches der letzteren verkleinert und daher die gegebene Konstante stets auf eine andere zurückgeführt werden, deren Anfangszahl nicht mehr grösser ist als die Differenz.

Daher gehören alle harmonischen Konstanten, deren Anfangszahl grösser ist als die Differenz, und wegen

$$\underset{d|d}{C} = \frac{1}{d} \cdot \underset{1|1}{C}$$

auch diejenige, bei welcher beide diese Zahlen einander gleich sind, mit alleiniger Ausnahme von $\underset{1|1}{C}$ jederzeit zu den sekundären, und kann fernerhin von ihrer Berechnung um so leichter ganz Umgang genommen werden, als die Ableitung immer auf höchst einfache Weise ausführbar ist. Es benöthigen demnach nur solche harmonische Konstanten einer besonderen Berechnung, bei welchen die Anfangszahl kleiner ist, als die Differenz.

Ferner erkennt man leicht aus I. in §. 17., dass alle harmonischen Konstanten, bei welchen Anfangszahl und Differenz einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, stets sekundäre sind und durch blosse Division aus anderen berechnet werden können. Desshalb kann die Berechnung der harmonischen Konstanten füglich auf solche beschränkt bleiben, bei welchen Anfangszahl und Differenz Primzahlen unter sich sind.

Nach Ausscheidung der eben bezeichneten drei Abtheilungen von sekundären Konstanten, von deren Berechnung nicht weiter gehandelt zu werden braucht, benöthigen nur noch jene harmonischen Konstanten einer unmittelbaren Berechnung, bei welchen a und d additive ganze Zahlen sind, ferner $a < d$ ist und a und d keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Die Anzahl dieser Konstanten kann im Allgemeinen, wenn die von 1 verschiedenen Primzahlen, durch welche d theilbar ist, durch d_1, d_2, d_3,... bezeichnet werden, mit

$$d \cdot \frac{d_1 - 1}{d_1} \cdot \frac{d_2 - 1}{d_2} \cdot \frac{d_3 - 1}{d_3} \cdots\cdot$$

ausgedrückt werden.

Man würde sich jedoch täuschen, wenn man glauben wollte, dass diese erübrigenden Konstanten sämmtlich primäre seien. Denn nebst den Gleichungen der §§. 18., 19., 20., welche im Vorhergehenden zur Absonderung von sekundären Konstanten angewendet worden sind, wurden in §. 22. und §. 26. ebenfalls Gleichungen zwischen verschiedenen harmonischen Konstanten aufgestellt, mittelst welcher stets die eine von den letzteren durch die anderen in geschlossener Form sich finden lässt, wodurch eben die berechnete als sekundäre sich darstellt. Es dürfte schwer sein, für die Anzahl der wirklich primären Konstanten bei jedem

Werthe von d eine allgemeine Formel aufzufinden. Doch gibt es zwei besondere Fälle, in welchen die vorläufige Bestimmung jener Anzahl keiner Schwierigkeit unterliegt, welche daher kurz angeführt werden sollen, insbesondere weil sie zugleich das Maximum und Minimum jener Anzahl darstellen.

Sei zuerst d eine Primzahl und grösser als 2. In diesem Falle ist offenbar die Anzahl der nach den obigen Ausscheidungen noch einer Berechnung bedürfenden Konstanten $d-1$. Zum Behufe der Bestimmung bietet die Relation I. des §. 22. nur eine einzige Gleichung dar und zwar eben in der dort aufgestellten Form II. Aus der Formel I. des §. 26. hingegen erhält man durchgängig unter einander verschiedene Gleichungen, wenn man anstatt a nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, ... $\frac{d-1}{2}$ setzt, indem durch die Substitution grösserer Zahlen nur die früheren Gleichungen sich wiederholen. Demnach ist die Gesammtanzahl aller vorhandenen Gleichungen

$$\frac{d-1}{2}+1=\frac{d+1}{2},$$

aus welchen eben so viele Konstanten durch die übrigen sich bestimmen lassen und hiedurch als sekundäre erscheinen. Zieht man daher diese letztere Zahl von der obigen Anzahl aller einer Berechnung bedürfenden Konstanten ab, so verbleiben noch

$$d-1-\frac{(d+1)}{2}=\frac{d-3}{2}$$

Konstanten, welche man aus anderen nicht abzuleiten vermag, die daher wirklich primäre sind.

Sei zweitens d das Doppelte einer ungeraden Zahl, nämlich $d=4n-2$. Nimmt man unter dieser Voraussetzung in I. des §. 22. $m=2$, $d=2n-1$ und anstatt a nach und nach die Zahlen 1, 2, 3,.... $2n-1$ an, so erhält man, wie man sich leicht überzeugt, der Zahl nach $2n-1$ Gleichungen, bei deren jeder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nur eine einzige harmonische Konstante mit der Differenz $2n-1$ vorkommt, welche daher nach der vorgeschriebenen Ordnung der Berechnung schon als bekannt anzusehen ist; auf der linken Seite hingegen erscheinen überall zwei solche Konstanten mit der Differenz $4n-2$, bei welchen stets die eine Anfangszahl gerade, die andere aber ungerade sein muss, weil beide um die ungerade Zahl $2n-1$ von einander verschieden sind. Hiebei ist die Konstante mit gerader Anfangszahl ebenfalls stets als bekannt zu betrachten,

weil bei ihr die letztere mit der Differenz den gemeinschaftlichen Faktor 2 hat und daher auf kleinere Zahlen sich zurückbringen lässt. Demnach kann aus einer jeden solchen Gleichung eine der Konstanten mit ungerader Anfangszahl gefunden und somit aus allen $2n-1$ Gleichungen auch alle $2n-1$ Konstanten mit ungeraden Anfangszahlen abgeleitet werden, welche daher eben so wohl als jene mit geraden Anfangszahlen sämmtlich sekundär sind. Man sieht hieraus, dass zu den Differenzen von der Form $4n-2$ niemals eine primäre harmonische Konstante gehöre.

In dem eben betrachteten Falle sind die aus §. 22. abgeleiteten Gleichungen für sich allein genommen hinreichend, um daraus die Werthe aller zu berechnenden Konstanten zu bestimmen, ohne hiezu nöthig zu haben, auch noch den §. 26. anzuwenden. Da aber aus dem letzteren ebenfalls eine oder mehrere Gleichungen zwischen den nämlichen Konstanten sich ergeben, so müssen diese Gleichungen eigentlich nur Folgerungen aus den vorher gebrauchten sein. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, dass bei der vereinigten Anwendung der §§. 22. und 26. Gleichungen zum Vorschein kommen, welche nicht alle von einander unabhängig sind, aus welchen daher nicht so viele Konstanten berechnet werden können, als man nach der Anzahl der Gleichungen vermuthen sollte. Man darf diesen Umstand nicht ausser Acht lassen, um nicht auf voreilige und desshalb unrichtige Folgerungen zu gerathen.

Nach diesen vorausgeschickten Bemerkungen soll nun zur wirklichen Vornahme der Berechnungen geschritten werden.

§. 31.

In dem ersten und einfachsten Falle, wenn nämlich $d=1$ angenommen wird, handelt es sich offenbar nur um die Bestimmung der einzigen Konstante $\underset{1|1}{C}$, bei welcher selbstverständlich von einer Herleitung aus anderen keine Rede sein kann. Diese Zahl, die auch bei anderen analytischen Untersuchungen, wie z.B. bei dem sogenannten Soldner'schen Integral-Logarithmus, auftritt, ist die einzige harmonische Konstante, deren Werth man bereits fast seit einem Jahrhunderte kennt. Dessen ungeachtet ist es bisher Niemandem gelungen, eine solche Beziehung zwischen ihr und den übrigen analytischen Funktionen aufzufinden, mittelst welcher erstere durch die letzteren in geschlossener Form ausgedrückt werden könnte, wesshalb noch gegenwärtig das einzige Hilfsmittel zu ihrer Berechnung in der Anwendung von un-

endlichen Reihen besteht. Auf diesem Wege hat sie zuerst Euler in 16 Dezimalstellen angegeben, von welchen freilich die letzte nicht ganz genau ist. Später ist sie zwar von Legendre und Anderen noch weiter genau berechnet worden, was auch mit Hilfe der Reihe III. des §. 10. ohne Schwierigkeit beliebig fortgesetzt werden könnte.

Da jedoch 16 Dezimalstellen zu jedem wirklich von jener Zahl zu machenden Gebrauche gewiss mehr als hinreichend sind, so wird es genügen, nur eben so viele Dezimalstellen hieher zu setzen, nämlich:

$$\underset{1|1}{C} = 0,5772\,1566\,4901\,5329.$$

Diese Konstante ist man genöthigt als eine eigenthümliche irrationale oder, wenn man lieber will, transzendente Zahl anzusehen, welche auch fernerhin in den Formeln, in welchen sie vorkommt, am schicklichsten durch das bisher dafür gebrauchte Zeichen $\underset{1|1}{C}$ dargestellt werden kann, an dessen Statt bei Rechnungen mit bestimmten Zahlen der angegebene genäherte Werth gesetzt werden muss.

Dass hiernach $\underset{1|1}{C}$ eine primäre Konstante sei, versteht sich von selbst.

§. 32.

Bei der zunächst zur Betrachtung kommenden Differenz $d=2$ ist ebenfalls nur die einzige Konstante $\underset{1|2}{C}$ vorhanden, die nach §. 30. einer ausdrücklichen Berechnung bedarf. Aus dem eben dort Angeführten ist auch ersichtlich, dass diese Konstante keine primäre sein könne, weil die Differenz 2 zu der Zahlform $4n-2$ gehört. Wirklich erhält man aus der Gleichung II. des §. 22., wenn darin $d=2$ gesetzt wird, auf der Stelle

$$\underset{1|2}{C} = \tfrac{1}{2}.\underset{1|1}{C} + l2,$$

woraus die Abhängigkeit der sekundären Konstante $\underset{1|2}{C}$ von der primären $\underset{1|1}{C}$ hervorgeht. Durch die Substitution der bestimmten Werthe für $\underset{1|1}{C}$ und $l2$ ergibt sich ferner in 16 Dezimalstellen genau:

$$\underset{1|2}{C} = 0,9817\,5501\,3010\,7117.$$

§. 33.

Für $d=3$ ist ebenfalls aus §. 30. klar, dass keine der hiebei zu berechnenden Konstanten $C_{1|3}$ und $C_{2|3}$ eine **primäre** sein könne, weil für die Differenz 3, als eine Primzahl, die Anzahl der primären Konstanten

$$\frac{3-3}{2}=0$$

sein muss. Um nun die bezeichneten Konstanten wirklich zu finden, setze man in §. 22. II. und §. 26. $d=3$ und $a=1$, dadurch erhält man die beiden Gleichungen:

$$C_{1|3}+C_{2|3}=\tfrac{2}{3}.C_{1|1}+l3$$

und

$$C_{1|3}-C_{2|3}=\frac{\pi}{3}\operatorname{cotang}\frac{\pi}{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9},$$

durch deren Auflösung sich

$$C_{1|3}=\tfrac{1}{3}.C_{1|1}+\frac{l3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

und

$$C_{2|3}=\tfrac{1}{3}.C_{1|1}+\frac{l3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

ergibt. Durch die Substitution der bestimmten Werthe von $C_{1|1}$, $l3$ und π, findet man hieraus:

$$C_{1|3}=1{,}0440\ 1126\ 0006\ 9354,$$

$$C_{2|3}=0{,}4394\ 1147\ 1928\ 8628.$$

§. 34.

Bei der Differenz $d=4$ sind die beiden Konstanten $C_{1|4}$ und $C_{3|4}$ zu berechnen. Zu diesem Behufe gibt die Gleichung I. des §. 22. für $a=1$, $d=2$, $m=2$:

$$C_{1|4}+C_{3|4}=C_{1|2}+\tfrac{1}{2}l2,$$

oder wenn hierin aus §. 32. für $C_{1|2}$ der Werth substituirt wird:

$$\underset{1|4}{C} + \underset{3|4}{C} = \tfrac{1}{2}.\underset{1|1}{C} + \frac{3l2}{2}.$$

Ferner findet man aus §. 26. für $a=1$, $d=4$:

$$\underset{1|4}{C} - \underset{3|4}{C} = \frac{\pi}{4}\operatorname{cotang}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Aus dieser und der unmittelbar vorhergehenden Gleichung folgt nun:

$$\underset{1|4}{C} = \tfrac{1}{4}.\underset{1|1}{C} + \frac{3l2}{4} + \frac{\pi}{8}$$

und

$$\underset{3|4}{C} = \tfrac{1}{4}\underset{1|1}{C} + \frac{3l2}{4} - \frac{\pi}{8},$$

oder durch die Substitution der bestimmten Werthe:

$$\underset{1|4}{C} = 1,0568\ 6338\ 3344\ 0664,$$

$$\underset{3|4}{C} = 0,2714\ 6521\ 9946\ 6180.$$

§. 35.

Bei den bisher betrachteten Differenzen ist ausser $\underset{1|1}{C}$ noch keine andere primäre Konstante zum Vorscheine gekommen. Diess wird jedoch bei der nächst folgenden Differenz 5 gewiss der Fall sein, weil für diese Primzahl die Anzahl der primären Konstanten $\frac{5-3}{2}=1$ ist. Daher muss $\underset{1|5}{C}$ eine primäre, hingegen die anderen hier zu berechnenden Konstanten, nämlich $\underset{2|5}{C}$, $\underset{3|5}{C}$, $\underset{4|5}{C}$ gewiss sekundäre sein. Zur Berechnung der letzteren erhält man aus §. 22. die Gleichung:

$$\underset{1|5}{C} + \underset{2|5}{C} + \underset{3|5}{C} + \underset{4|5}{C} = \tfrac{4}{5}.\underset{1|1}{C} + l5,$$

und aus §. 26. die beiden Gleichungen:

$$\underset{1|5}{C} - \underset{4|5}{C} = \frac{\pi}{5}\operatorname{cotang}\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)},$$

$$\underset{2|5}{C} - \underset{3|5}{C} = \frac{\pi}{5}\operatorname{cotang}\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)};$$

durch deren Auflösung die Werthe

$$\underset{2|5}{C} = \tfrac{2}{5}.\underset{1|1}{C} - \underset{1|5}{C} + \frac{l5}{2} + \frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)},$$

$$\underset{3|5}{C} = \tfrac{2}{5}.\underset{1|1}{C} - \underset{1|5}{C} + \frac{l5}{2} + \frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)},$$

$$\underset{4|5}{C} = \underset{1|5}{C} - \frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

zum Vorscheine kommen. Berechnet man nun den Werth von $\underset{1|5}{C}$ durch die Formel III. des §. 10. und substituirt sowohl diesen, als auch die Werthe der übrigen, hier nur durch Rechnungszeichen dargestellten Zahlen, so findet man in 16 Dezimalstellen genau:

$$\underset{1|5}{C} = 1{,}0578\ 0797\ 9318\ 4377,$$

$$\underset{2|5}{C} = 0{,}5122\ 7690\ 8917\ 0232,$$

$$\underset{3|5}{C} = 0{,}3081\ 2384\ 2778\ 6381,$$

$$\underset{4|5}{C} = 0{,}1390\ 0171\ 3341\ 2277.$$

§. 36.

Bei der nächst grösseren Differenz 6 kann wiederum keine primäre Konstante vorhanden sein, weil 6 von der Form $4n-2$ ist. Hiebei sind daher nur die zwei sekundären Konstanten $\underset{1|6}{C}$ und $\underset{5|6}{C}$ zu bestimmen. Die zu diesem Behufe nothwendigen Gleichungen ergeben sich aus I. in §. 22., indem man darin $d=3$, $m=2$ und ferner nach und nach $a=1$, $a=2$ setzt. Dadurch erhält man:

$$\underset{1|6}{C} + \underset{4|6}{C} = \underset{1|3}{C} + \frac{l2}{3}, \quad \underset{2|6}{C} + \underset{5|6}{C} = \underset{2|3}{C} + \frac{l2}{3},$$

aus welchen dann

$$\underset{1|6}{C} = \underset{1|3}{C} - \tfrac{1}{2}.\underset{2|3}{C} + \frac{l2}{3}, \quad \underset{5|6}{C} = \underset{2|3}{C} - \tfrac{1}{2}.\underset{1|3}{C} + \frac{l2}{3},$$

oder, wenn hierin anstatt $\underset{1|3}{C}$ und $\underset{2|3}{C}$ die Werthe aus §. 33. substituirt werden,

$$\underset{1|6}{C} = \tfrac{1}{6}.\underset{1|1}{C} + \frac{l2}{3} + \frac{l3}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}, \qquad \underset{5|6}{C} = \tfrac{1}{6}.\underset{1|1}{C} + \frac{l2}{3} + \frac{l3}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

folgt. In 16 Dezimalstellen genau findet man:

$$\underset{1|6}{C} = 1{,}0553\ 5458\ 4229\ 1525, \qquad \underset{5|6}{C} = 0{,}1484\ 5490\ 2112\ 0435.$$

§. 37.

Bisher sind die kleineren Differenzen wegen ihres häufigeren ommens ohne eine von ihnen zu überspringen nach der Ordnung :htet und die dazu gehörigen eine besondere Berechnung erfordernden harmonischen Konstanten vollständig angegeben worden. Es ist auch einleuchtend, dass man ohne Schwierigkeit auf dem gleichen Wege weiter fortschreiten und auf solche Art nach und nach die zu jeder beliebigen noch so grossen ganzen Differenz zugehörigen Konstanten bestimmen könnte. Um jedoch hiebei eine allzu grosse Weitläufigkeit zu vermeiden, sollen fernerhin nur noch die geraden Differenzen 8, 10, 12 und endlich 16 in Betracht gezogen werden, was schon wegen der von Euler angegebenen Beispiele nothwendig zu sein schien; die weitere Fortsetzung der Arbeit aber mag demjenigen überlassen bleiben, der einen Nutzen daraus zu ziehen wissen wird.

Um die 4 Konstanten $\underset{1|8}{C}$, $\underset{3|8}{C}$, $\underset{5|8}{C}$, $\underset{7|8}{C}$, welche bei der Differenz 8 nach §. 30. einer besonderen Berechnung bedürfen, zu bestimmen, bietet die Formel I. des §. 22., wenn darin $d=4$, $m=2$ und sowohl $a=1$ als $a=3$ angenommen wird, die beiden Gleichungen dar:

$$\underset{1|8}{C}+\underset{5|8}{C}=\underset{1|4}{C}+\frac{l2}{4},\qquad \underset{3|8}{C}+\underset{7|8}{C}=\underset{3|4}{C}+\frac{l2}{4}.$$

Man könnte aus der nämlichen Quelle allerdings durch die Annahme $a=1$, $d=2$, $m=4$ noch eine dritte Gleichung ableiten, von welcher man aber sogleich erkennen wird, dass sie nur die Summe der beiden früheren und daher nur eine Folgerung aus denselben sei. Ferner erhält man aus I. in §. 26. für $a=1$ und $d=8$, dann für $a=3$ und $d=8$, die zwei Gleichungen:

$$\underset{1|8}{C}-\underset{7|8}{C}=\frac{\pi}{8}\operatorname{cotang}\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}+1),$$

$$\underset{3|8}{C}-\underset{5|8}{C}=\frac{\pi}{8}\operatorname{cotang}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1).$$

Man sollte glauben, diese 4 Gleichungen seien eben hinreichend, um daraus die Werthe aller 4 Konstanten abzuleiten. Allein bei wirklicher Ausführung der Rechnung wird man finden, dass jedes Mal, sobald man aus diesen Gleichungen drei der zu berechnenden Konstanten zu eliminiren sucht, zugleich die vierte von selbst daraus verschwinde, was zum Beweise dient, dass jene Gleichungen keineswegs von einander unabhängig sind, sondern jede

von ihnen nur eine Folgerung aus den 3 anderen sei. Desshalb lassen sich aus ihnen nicht mehr als 3 Konstanten bestimmen, welche hiedurch als sekundäre erkannt werden, während eine derselben, der Ordnung nach $\underset{1|8}{C}$, eine primäre ist, und durch die Reihe III. des §. 10. oder eine andere hiezu taugliche näherungsweise berechnet werden muss. Nach Ausführung dieser Rechnung ergeben sich dann die drei anderen Konstanten durch die Auflösung von drei der obigen Gleichungen in folgender Weise:

$$\underset{3|8}{C} = \underset{3|4}{C} - \underset{1|8}{C} + \frac{l2}{4} + \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{1}{4}.\underset{1|1}{C} - \underset{1|8}{C} + l2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8},$$

$$\underset{5|8}{C} = \underset{1|4}{C} - \underset{1|8}{C} + \frac{l2}{4} = \tfrac{1}{4}.\underset{1|1}{C} - \underset{1|8}{C} + l2 + \frac{\pi}{8},$$

$$\underset{7|8}{C} = \underset{1|8}{C} - \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{8}.$$

Näherungsweise in 16 Dezimalstellen ausgedrückt, ist

$$\underset{1|8}{C} = 1,0485\ 6158\ 2911\ 9819,$$

$$\underset{3|8}{C} = 0,3442\ 4988\ 1143\ 1424,$$

$$\underset{5|8}{C} = 0,1815\ 8859\ 5572\ 0708,$$

$$\underset{7|8}{C} = 0,1005\ 0213\ 3943\ 4619.$$

§. 38.

Wenn $d = 10$ angenommen wird, ist aus §. 30. zu entnehmen, dass keine der zu berechnenden Konstanten $\underset{1|10}{C}, \underset{3|10}{C}, \underset{7|10}{C}, \underset{9|10}{C}$ eine primäre sein kann, indem zur Bestimmung der letzteren der §. 22. allein ausreichend sein muss. Wirklich erhält man hieraus, wenn darin $d = 5$, $m = 2$ und für a nach und nach 1, 2, 3, 4 gesetzt wird, die 4 Gleichungen:

$$\underset{1|10}{C} + \underset{6|10}{C} = \underset{1|5}{C} + \frac{l2}{5},$$

$$\underset{2|10}{C} + \underset{7|10}{C} = \underset{2|5}{C} + \frac{l2}{5},$$

$$\underset{3|10}{C} + \underset{8|10}{C} = \underset{3|5}{C} + \frac{l2}{5},$$

$$\underset{4|10}{C} + \underset{9|10}{C} = \underset{4|5}{C} + \frac{l2}{5};$$

aus welchen sich

$$\underset{1|10}{C}=\underset{1|5}{C}-\tfrac{1}{2}.\underset{3|5}{C}+\frac{l2}{5}=\tfrac{3}{2}.\underset{1|5}{C}-\tfrac{1}{5}.\underset{1|1}{C}+\frac{l2}{5}-\frac{l5}{4}-\frac{\pi}{10}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)},$$

$$\underset{3|10}{C}=\underset{3|5}{C}-\tfrac{1}{2}.\underset{4|5}{C}+\frac{l2}{5}=\tfrac{2}{5}.\underset{1|1}{C}-\tfrac{3}{2}.\underset{1|5}{C}+\frac{l2}{5}+\frac{l5}{2}+\frac{\pi}{10}\sqrt{\left(\frac{25+2\sqrt{5}}{5}\right)},$$

$$\underset{7|10}{C}=\underset{2|5}{C}-\tfrac{1}{2}.\underset{1|5}{C}+\frac{l2}{5}=\tfrac{2}{5}.\underset{1|1}{C}-\tfrac{1}{2}.\underset{1|5}{C}+\frac{l2}{5}+\frac{l5}{2}+\frac{\pi}{10}\sqrt{\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{5}\right)},$$

$$\underset{9|10}{C}=\underset{4|5}{C}-\tfrac{1}{2}.\underset{2|5}{C}+\frac{l2}{5}=\tfrac{3}{2}.\underset{1|5}{C}-\tfrac{1}{5}.\underset{1|1}{C}+\frac{l2}{5}-\frac{l5}{4}-\frac{\pi}{10}\sqrt{\left(\frac{65+29\sqrt{5}}{10}\right)};$$

und näherungsweise in 16 Dezimalstellen:

$$\underset{1|10}{C}=1{,}0423\ 7549\ 4041\ 1077,$$

$$\underset{3|10}{C}=0{,}3502\ 5242\ 2220\ 0133,$$

$$\underset{7|10}{C}=0{,}1220\ 0235\ 5369\ 7936,$$

$$\underset{9|10}{C}=0{,}0754\ 9269\ 4994\ 7051$$

ergibt.

§. 39.

Für $d=12$ sind nur die 4 Konstanten $\underset{1|12}{C}$, $\underset{5|12}{C}$, $\underset{7|12}{C}$, $\underset{11|12}{C}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke lassen sich schon aus der Formel I. des §. 22. sogar 8 scheinbar von einander verschiedene Gleichungen aufstellen, nämlich:

2 Gleichungen durch die Annahme $m=2$, $d=6$ und $a=1$ oder $a=5$,

2 - - - - $m=3$, $d=4$ und $a=1$ oder $a=3$,

2 - - - - $m=4$, $d=3$ und $a=1$ oder $a=2$,

1 Gleichung - - - $m=6$, $d=2$ und $a=1$,

endlich:

1 Gleichung - - - $m=12$, $d=1$ und $a=1$.

Ferner ergeben sich aus §. 26. noch 2 andere Gleichungen, indem man entweder $a=1$, $d=12$ oder $a=5$, $d=12$ setzt. Die verhältnissmässig grosse Anzahl von 10 Gleichungen sollte

man jedenfalls für zureichend erachten dürfen zur Berechnung von nur 4 harmonischen Konstanten. Dennoch ist diess nicht der Fall. Denn durch eine ganz leichte Untersuchung, die aber bei vollständiger Ausführung einen beträchtlichen Raum einnehmen würde und desshalb hier nicht beigebracht werden soll, kann man sich überzeugen, dass von jenen 10 Gleichungen eigentlich nur 3 von einander ganz unabhängig sind, indem aus diesen die übrigen 7 von selbst gefolgert werden können. Desshalb dienen die angedeuteten Gleichungen ungeachtet ihrer grossen Anzahl doch nur zur Bestimmung von 3 sekundären Konstanten, die erste von allen $C_{1|12}$ aber muss als eine primäre durch Hilfe der Reihe III. des §. 10. näherungsweise berechnet werden. Wählt man zur Bestimmung der sekundären Konstanten aus den vorhin angeführten Gleichungen die 3 zuerst bezeichneten, nämlich

$$C_{1|12} + C_{7|12} = C_{1|6} + \frac{l2}{6},$$

$$C_{5|12} + C_{11|12} = C_{5|6} + \frac{l2}{6},$$

$$C_{1|12} + C_{5|12} + C_{9|12} = C_{1|4} + \frac{l3}{4};$$

so erhält man durch Auflösung derselben und Substitution der schon bekannten Werthe:

$$C_{5|12} = C_{1|4} - C_{1|12} - \tfrac{1}{3} \cdot C_{3|4} + \frac{l3}{4} = \tfrac{1}{6} \cdot C_{1|1} - C_{1|12} + \frac{l2}{2} + \frac{l3}{4} + \frac{\pi}{6},$$

$$C_{7|12} = C_{1|6} - C_{1|12} + \frac{l2}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot C_{1|1} - C_{1|12} + \frac{l2}{2} + \frac{l3}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12},$$

$$C_{11|12} = C_{5|6} - C_{1|4} + C_{1|12} + \tfrac{1}{3} \cdot C_{3|4} + \frac{l2}{6} - \frac{l3}{4} = C_{1|12} - \frac{\pi(2+\sqrt{3})}{12}.$$

Durch näherungsweise Berechnung ergeben sich folgende bestimmte Werthe:

$$C_{1|12} = 1{,}0373\ 0877\ 6535\ 5688,$$

$$C_{5|12} = 0{,}2037\ 1927\ 2326\ 6523,$$

$$C_{7|12} = 0{,}1335\ 7033\ 7786\ 9079,$$

$$C_{11|12} = 0{,}0602\ 6015\ 9878\ 7155.$$

§. 40.

Wird zum Schlusse dieser einzelnen Rechnungen noch $d=16$ angenommen, so zeigt sich, dass hiebei die 8 Konstanten $C_{1|16}$, $C_{3|16}$, $C_{5|16}$, $C_{7|16}$, $C_{9|16}$, $C_{11|16}$, $C_{13|16}$, $C_{15|16}$ einer besonderen Bestimmung bedürfen. Hiezu ergeben sich aus I. in §. 22., indem darin $d=8$, $m=2$ und anstatt a nach und nach 1, 3, 5, 7 gesetzt wird, die 4 wirklich von einander unabhängigen Gleichungen:

$$C_{1|16}+C_{9|16}=C_{1|8}+\frac{l2}{8},$$

$$C_{3|16}+C_{11|16}=C_{3|8}+\frac{l2}{8},$$

$$C_{5|16}+C_{13|16}=C_{5|8}+\frac{l2}{8},$$

$$C_{7|16}+C_{15|16}=C_{7|8}+\frac{l2}{8}.$$

Alle anderen aus der nämlichen Formel noch ferner herzuleitenden Gleichungen erkennt man leicht als Folgerungen aus den eben angesetzten.

Ferner findet man aus §. 26. durch die Annahme $d=16$, $a=1$ und auch $a=3$, die beiden weiteren Gleichungen:

$$C_{1|16}-C_{15|16}=\frac{\pi}{16}\operatorname{cotang}\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{16}(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}+1),$$

$$C_{3|16}-C_{13|16}=\frac{\pi}{16}\operatorname{cotang}\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{16}(\sqrt{(4-2\sqrt{2})}+\sqrt{2}-1).$$

Die aus §. 26. durch die Annahmen $a=5$ und $a=7$ noch weiter folgenden Gleichungen gibt eine der in §. 39. angedeuteten ähnliche Untersuchung als solche zu erkennen, welche aus den bereits aufgestellten 6 Gleichungen ohnehin sich ableiten lassen. Diese 6 Gleichungen sind demnach die einzigen wirklich von einander unabhängigen, wie ihre sogleich nachfolgende Auflösung zeigt, die zur Berechnung der zur Differenz 16 gehörigen, vorhin angeführten 8 Konstanten angewendet werden können. Da nun aus 6 Gleichungen auch nur 6 Unbekannte sich finden lassen, so sieht man, dass die beiden ersten der obigen Konstanten $C_{1|16}$ und $C_{3|16}$ als primäre angesehen und durch die Reihe III. des §. 10. berechnet werden müssen, nur die 6 anderen sind sekundäre,

deren Werthe durch die Auflösung obiger Gleichungen im Allgemeinen folgende sind:

$$\underset{5|16}{C} = \tfrac{1}{4}.\underset{1|1}{C} - \underset{3|16}{C} - \underset{1|8}{C} + \frac{9l2}{8} + \frac{\pi}{16}(\sqrt{(4-2\sqrt{2})} + \sqrt{2} - 1),$$

$$\underset{7|16}{C} = \underset{1|8}{C} - \underset{1|16}{C} + \frac{l2}{8} + \frac{\pi}{16}(\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{2} + 1),$$

$$\underset{9|16}{C} = \underset{1|8}{C} - \underset{1|16}{C} + \frac{l2}{8},$$

$$\underset{11|16}{C} = \tfrac{1}{4}.\underset{1|1}{C} - \underset{3|16}{C} - \underset{1|8}{C} + \frac{9l2}{8} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8},$$

$$\underset{13|16}{C} = \underset{3|16}{C} - \frac{\pi}{16}(\sqrt{(4-2\sqrt{2})} + \sqrt{2} - 1),$$

$$\underset{15|16}{C} = \underset{1|16}{C} - \frac{\pi}{16}(\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{2} + 1).$$

Die numerischen Werthe aller 8 Konstanten findet man:

$$\underset{1|16}{C} = 1,0299\,2834\,3128\,7565,$$
$$\underset{3|16}{C} = 0,3523\,9574\,8960\,8271,$$
$$\underset{5|16}{C} = 0,2096\,9409\,8513\,1150,$$
$$\underset{7|16}{C} = 0,1443\,3298\,9357\,4740,$$
$$\underset{9|16}{C} = 0,1052\,7663\,7353\,2185,$$
$$\underset{11|16}{C} = 0,0784\,9752\,9752\,3085,$$
$$\underset{13|16}{C} = 0,0585\,3789\,4628\,9490,$$
$$\underset{15|16}{C} = 0,0428\,1254\,2155\,9811.$$

Fasst man die vorhergehenden speziellen Berechnungen der harmonischen Konstanten im Zusammenhange auf, so wird man bestätiget finden, was bereits in §. 30. vorläufig angeführt wurde, dass nämlich keine einzige solche Konstante bekannt sei, deren Werth durch die in der Analysis üblichen Funktionsformen mittelst eines geschlossenen Ausdruckes sich darstellen lasse. Dieser Umstand ist um so bemerkenswerther, weil die Funktionen Πz oder Γz, mit welchen die harmonischen Konstanten in der schon nachgewiesenen nahen Verbindung stehen, wenigstens in einigen besonderen Fällen, sobald nämlich z entweder eine ganze additive Zahl ist oder auch einen Bruch mit dem Nenner 2

bedeutet, eine solche Darstellung entweder rational oder mit Hilfe der Zahl π gestatten. Es kann desshalb dasjenige, was im §. 31. von $C_{1|1}$ gesagt wurde, auf alle harmonischen Konstanten ohne Unterschied ausgedehnt werden, dass sie nämlich eine ganz eigenthümliche Art von irrationalen oder transzendenten Zahlen ausmachen, die durch die gewöhnlichen analytischen Funktionen allein niemals in geschlossener Form dargestellt werden können, sondern entweder überhaupt gar nicht, wie diess bei den primären, oder nur mit Zuziehung der eben genannten, wie diess bei den sekundären harmonischen Konstanten der Fall ist.

§. 41.

Die Ordnung der Untersuchung führt nunmehr auf die Betrachtung der harmonischen Konstanten für irrationale Werthe von a oder d, um auch die zwischen solchen Konstanten etwa bestehenden wechselseitigen Beziehungen kennen zu lernen, oder wenigstens die Wege anzugeben, auf welchen man zu dieser Kenntniss gelangen kann. Da jedoch schon in §. 13., wo von der Berechnung der harmonischen Konstanten für irrationale Anfangszahlen oder Differenzen im Allgemeinen die Rede war, nur der einzelne Fall, wenn a die Form $\alpha+\sqrt{\beta}$ hat, und zugleich α, β und d rationale Zahlen sind, etwas näher untersucht wurde, soll eben diese Beschränkung auch fernerhin hier beibehalten werden.

Diess vorausgesetzt ist leicht einzusehen, dass vermöge §. 18. jede Konstante $C_{\alpha+\sqrt{\beta}|d}$, in welcher die beiden Zahlen α und d, auf deren Beschaffenheit es hiebei vorzüglich ankommt, gebrochene Zahlen sein oder solche enthalten sollten, stets auf eine andere sich bringen lasse, bei welcher α und d zugleich ganze Zahlen sind. Die nämliche Verwandlung lässt sich wohl auch, wenn man sie wünscht, bei der Zahl β vornehmen, ist jedoch bei ihr von geringerem Belange. Ferner kann durch Anwendung des §. 18. jeder Faktor, welchen etwa α und d gemeinschaftlich besitzen, aus diesen Zahlen weggeschafft und dieselben hiedurch verkleinert werden. Desshalb brauchen hier nur solche Konstanten, bei welchen α und d ganze Zahlen und zugleich Primzahlen unter sich sind, in Betracht gezogen, und nur für solche eine besondere Berechnung ihrer Werthe vorgenommen zu werden.

Mit Hilfe des §. 19. vermag man die Anfangszahl einer jeden harmonischen Konstante mit Leichtigkeit um ein beliebiges Viel-

faches der Differenz grösser oder kleiner zu machen, und dem zu Folge die Anfangszahl stets dergestalt zu verwandeln, dass $\alpha < d$ wird. Daher genügt es nur Konstanten zu untersuchen, bei welchen letzteres der Fall ist. Hiebei muss jedoch auf einen Unterschied, der zwischen den Konstanten mit rationalen und irrationalen Zahlen eintritt, aufmerksam gemacht werden. Bei den ersteren nämlich wurde der Fall, dass $a = 0$ sei, ganz übergangen, weil unter dieser Voraussetzung die Konstante nicht mehr endlich, sondern unendlich gross sein würde. Bei den irrationalen Anfangszahlen von der Form $\alpha + \sqrt{\beta}$ hingegen kann auch ohne Anstand $\alpha = 0$ sein, wenn nur nicht zugleich $\beta = 0$ ist. Desshalb darf hiebei der Fall, dass $\alpha = 0$ sei, nicht ausser Acht gelassen werden, so dass hier in der Regel bei jeder einzelnen Differenz um Eine Konstante mehr zu berücksichtigen kommt, als für die gleiche Differenz bei rationalen Anfangszahlen.

Endlich ist es vermöge §. 20. stets leicht ausführbar, die harmonischen Konstanten, bei welchen Anfangszahl oder Differenz subtraktiv sein sollten, ganz zu vermeiden und auf solche Art die Berechnung auf additive Werthe von α und d zu beschränken. Noch ist zu bemerken, dass rücksichtlich der Berechnung es ganz gleichgiltig sei, welches Zeichen das irrationale Glied $\sqrt{\beta}$ vor sich trage, weil nach dem in §. 13. bereits Erwiesenen die beiden Konstanten $C_{\alpha+\sqrt{\beta}\,|\,d}$ und $C_{\alpha-\sqrt{\beta}\,|\,d}$ stets gleichzeitig berechnet werden können.

§. 42.

In Folge dieser Ausschliessungen von sekundären harmonischen Konstanten, welche, wie man leicht sieht, genau den in §. 30. für rationale Anfangszahlen vorgenommenen entsprechen, ist bei der Annahme $d = 1$ nur die Berechnung der einzigen Konstante $C_{\sqrt{\beta}\,|\,1}$ nothwendig, bei welcher man schon im vorhinein versichert sein darf, dass sie eine primäre sein werde, weil sie in dem einfachsten Falle, wenn $\beta = 1$ angenommen wird, in $C_{1\,|\,1}$ übergeht, welche wirklich als eine primäre befunden wurde.

Die Berechnung selbst kann ohne weitere Schwierigkeit nach §. 13. vorgenommen werden. Bezeichnet man nämlich die Werthe, welche die dort unter III. und IV. angegebenen Ausdrücke für M und N annehmen, wenn darin $\alpha = 0$, $d = 1$ und daher $z = n$, wo n eine beliebig auszuwählende ganze Zahl sein kann, gesetzt

wird, beziehungsweise durch M_0 und N_0, so hat man vermöge der dortigen Formel II. unmittelbar:

$$\text{I.} \quad \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} = M_0 - N_0 . \sqrt{\beta}.$$

Beim ersten Anblicke sollte man glauben, als ob hier zur Bestimmung von $\underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C}$ die Berechnung der beiden Werthe M_0 und und N_0 durch die Formeln III. und IV. des §. 13. nothwendig sei. Diess ist jedoch keineswegs der Fall, wie man sich sehr leicht überzeugen kann. Denn vermöge I. in §. 26. ist:

$$\underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} - \underset{1-\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} = \pi \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta}.$$

Hieraus folgt:

$$\underset{1-\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} = \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} - \pi \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta} = M_0 - (N_0 + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta}) . \sqrt{\beta},$$

und daher vermöge des in §. 13. Erwiesenen durch Veränderung des Zeichens von $\sqrt{\beta}$:

$$\underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} = M_0 + (N_0 + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta}) . \sqrt{\beta}.$$

Aber nach II. in §. 19. ist auch:

$$\underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} = \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = M_0 - (N_0 + \frac{1}{\beta}) . \sqrt{\beta}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Werthe gibt auf der Stelle:

$$N_0 + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta} = -N_0 - \frac{1}{\beta},$$

woraus man ferner

$$\text{II)} \qquad N_0 = -\frac{1}{2\beta} - \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta}$$

und dann

$$\text{III.} \quad \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} = M_0 + \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \pi\sqrt{\beta}\right) . \sqrt{\beta}$$

erhält.

Wie man sieht, lässt sich die Summe der in §. 13. unter IV. angeführten unendlichen Reihe in dem Falle, wenn darin $\alpha = 0$ und $d = 1$ angenommen wird, durch den geschlossenen analytischen Ausdruck II. darstellen und desshalb ist zum Behufe der Berechnung der harmonischen Konstante $\underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C}$ nur noch die Be-

stimmung von M_0 durch die unendliche Reihe III. des §. 13. erforderlich.

§. 43.

Für $d=2$ sind nach §. 41. die beiden Konstanten $C_{\sqrt{\beta}\,|\,2}$ und $C_{1+\sqrt{\beta}\,|\,2}$ zu berechnen. Keine von diesen beiden ist eine primäre, sobald man annimmt, dass alle zur Differenz 1 gehörigen Konstanten, deren Anfangszahlen von der Form $\alpha+\sqrt{\beta}$ sind, und wo zugleich α eine ganze Zahl ist, bereits bekannt seien, insbesondere die Konstanten $C_{\sqrt{\beta}\,|\,1}$ und $C_{\sqrt{\frac{\beta}{4}}\,|\,1}$. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich vermöge §. 18.

$$\text{I.} \quad C_{\sqrt{\beta}\,|\,2} = \tfrac{1}{2}.\, C_{\sqrt{\frac{\beta}{4}}\,|\,1}$$

und nach §. 22. I., wenn darin $a=\sqrt{\beta}$, $d=1$, $m=2$ angenommen wird,

$$C_{\sqrt{\beta}\,|\,2} + C_{1+\sqrt{\beta}\,|\,2} = C_{\sqrt{\beta}\,|\,1} + l2,$$

woraus dann

$$\text{II.} \quad C_{1+\sqrt{\beta}\,|\,2} = C_{\sqrt{\beta}\,|\,1} + l2 - C_{\sqrt{\beta}\,|\,2} = C_{\sqrt{\beta}\,|\,1} + l2 - \tfrac{1}{2}.\, C_{\sqrt{\frac{\beta}{4}}\,|\,1}$$

folgt.

Will man aber nicht **beide** vorbezeichnete zur Differenz 1 gehörige Konstanten, sondern nur die **erste** derselben, nämlich $C_{\sqrt{\beta}\,|\,1}$, **allein** als bekannt voraussetzen, dann bezeichne man die Werthe, welche die in §. 13. unter III. und IV. angegebenen unendlichen Reihen M und N erhalten, wenn darin $\alpha=1$, $d=2$ und $z=2n+1$ gesetzt wird, beziehungsweise durch M_1 und N_1. Dadurch erhält man aus den dortigen Gleichungen II. und V.:

$$C_{1+\sqrt{\beta}\,|\,2} = M_1 - N_1.\sqrt{\beta} \quad \text{und} \quad C_{1-\sqrt{\beta}\,|\,2} = M_1 + N_1.\sqrt{\beta},$$

folglich:

$$C_{1+\sqrt{\beta}\,|\,2} - C_{1-\sqrt{\beta}\,|\,2} = -2N_1.\sqrt{\beta}.$$

Aus I. in §. 26. ergibt sich für $a=1+\sqrt{\beta}$ und $d=2$:

$$C_{1+\sqrt{\beta}\,|\,2} - C_{1-\sqrt{\beta}\,|\,2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{cotang}\frac{(1+\sqrt{\beta})\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Werthe zeigt, dass

$$\text{III.}\qquad N_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2},$$

und daher:

$$\text{IV.}\qquad \underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = M_1 - \frac{\pi}{4} . \operatorname{tang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2}$$

sei. Ferner setze man in I. des §. 22. $a = \sqrt{\beta}$, $d = 1$, $m = 2$. Dadurch findet man:

$$\underset{\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} + \underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} + l2,$$

mithin ist:

$$\underset{\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} + l2 - \underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,1}{C},$$

und durch die Substitution des Werthes IV.:

$$\text{V.}\qquad \underset{\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = \underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C} + l2 + \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} - M_1 .$$

In diesen letzten Formeln ist die Konstante $\underset{\sqrt{\frac{\beta}{4}}\,|\,1}{C}$, welche in I. und II. vorkommt, nicht vorhanden, hingegen erscheint darin die mit M_1 bezeichnete Reihe, deren Werth aus III. in §. 13. berechnet werden muss.

Auf die gleiche Weise, welche eben angewendet wurde, lässt sich auch noch die Konstante $\underset{\sqrt{\beta}\,|\,1}{C}$ aus V. wegschaffen, die sich in IV. ohnehin nicht befindet.

Setzt man nämlich

$$\underset{\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = M_2 - N_2 . \sqrt{\beta},$$

wo M_2 und N_2 die Werthe bezeichnen, welche beziehungsweise die Reihen III. und IV. in §. 13. erhalten, wenn darin $\alpha = 0$, $d = 2$ und mithin $z = 2n$ angenommen wird, so folgt daraus:

$$\underset{-\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = M_2 + N_2 . \sqrt{\beta},$$

ferner:

$$\underset{2-\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = \underset{-\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} - \frac{1}{-\sqrt{\beta}} = M_2 + (N_2 + \frac{1}{\beta}) . \sqrt{\beta},$$

und daher:

$$\underset{\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} - \underset{2-\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} = -(2N_2 + \frac{1}{\beta}) . \sqrt{\beta}.$$

Aber vermöge §. 26. ist auch:

$$C_{\sqrt{\beta}|2} - C_{2-\sqrt{\beta}|2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cotang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2},$$

woraus:

$$-(2N_2 + \frac{1}{\beta}).\sqrt{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cotang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2},$$

mithin:

$$\text{VI.} \qquad N_2 = -\frac{1}{2\beta} - \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2},$$

und daher:

$$\text{VII.} \qquad C_{\sqrt{\beta}|2} = M_2 + \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{2}\right).\sqrt{\beta}$$

sich ergibt, wo anstatt der früher vorhandenen Konstante $C_{\sqrt{\beta}|1}$ jetzt die aus III. des §. 13. zu berechnende Reihe M_2 erscheint.

§. 44.

Es ist offenbar möglich, durch Fortschreiten auf dem bisher betretenen Wege nach und nach auch die zu **grösseren** Differenzen gehörigen harmonischen Konstanten und ihre Eigenschaften und Beziehungen kennen zu lernen. Man sieht jedoch schon aus dem bereits Angeführten, dass diese letzteren keineswegs eben so einfach und daher auch nicht eben so nützlich sind, als sie sich bei den Konstanten mit rationalen Anfangszahlen ergeben haben. Desshalb soll hiebei jede fernere Weitläufigkeit vermieden und nur noch die zur Differenz 4 gehörigen Konstanten einer kurzen Betrachtung unterzogen werden, weil dieselben bei Reihen ihre Anwendung finden, deren mit **abwechselnden** Vorzeichen versehene Glieder ohne Rücksicht auf diese Vorzeichen eine harmonische Reihe mit der Differenz 2 bilden würden, aber wegen des Wechsels der Zeichen eigentlich der Unterschied zwischen zwei harmonischen Reihen mit der Differenz 4 sind.

Bei der Differenz 4 erfordern nur die Konstanten $C_{1+\sqrt{\beta}|4}$ und $C_{3+\sqrt{\beta}|4}$ eine besondere Berechnung, weil

$$C_{\sqrt{\beta}|4} = \tfrac{1}{4}.\, C_{\frac{\sqrt{\beta}}{4}|1} \qquad \text{und} \qquad C_{2+\sqrt{\beta}|4} = \tfrac{1}{2}.\, C_{1+\frac{\sqrt{\beta}}{2}|2}$$

ist, daher diese letzteren Konstanten schon nach den für die Differenzen 1 und 2 angegebenen Formeln sich berechnen lassen.

Zur Berechnung der beiden zuerst genannten Konstanten erhält man aus §. 22. die Gleichung:

$$\underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} + \underset{3+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = \underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,2}{C} + \frac{l2}{2},$$

oder durch die Substitution aus IV. in §. 43.:

$$\underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} + \underset{3+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = M_1 + \frac{l2}{2} - \frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2},$$

und aus §. 26.:

$$\underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} - \underset{3-\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = \frac{\pi}{4}\operatorname{cotang}\frac{(1+\sqrt{\beta})\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\sec\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} - \operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2}\right),$$

durch deren Subtraktion ferner:

$$\underset{3+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} + \underset{3-\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = M_1 + \frac{l2}{2} - \frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2}$$

sich ergibt. Bezeichnet man nun die Werthe, welche die in §. 13. unter III. und IV. angeführten Reihen annehmen, wenn darin $\alpha = 3$, $d = 4$, mithin $z = 4n + 3$ gesetzt wird, beziehungsweise durch M_3 und N_3, so hat man:

$$\underset{3+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = M_3 - N_3.\sqrt{\beta} \quad \text{und} \quad \underset{3-\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = M_3 + N_3.\sqrt{\beta},$$

daher:

$$\underset{3+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} + \underset{3-\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = 2M_3,$$

woraus:

$$\text{I.} \quad M_3 = \tfrac{1}{2}M_1 + \frac{l2}{4} - \frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2},$$

dann:

$$\text{II.} \quad \underset{3+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = \tfrac{1}{2}M_1 + \frac{l2}{4} - \frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} - N_3.\sqrt{\beta},$$

und

$$\text{III.} \quad \underset{1+\sqrt{\beta}\,|\,4}{C} = \tfrac{1}{2}M_1 + \frac{l2}{4} - \frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} + \frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} + N_3.\sqrt{\beta}$$

folgt.

§. 45.

Bei Betrachtung der eben ausgeführten Ableitungen dringt sich fast von selbst die Bemerkung auf, dass die in §. 13. unter

IV. aufgestellte und durch N bezeichnete unendliche Reihe, obgleich man nicht im Stande ist, ihre Summe im Allgemeinen durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck darzustellen, dennoch für einige bestimmte Werthe von α und d eine solche Darstellung gestattet, wie diess die Formeln II. in §. 42., III. und VI. in §. 43. zeigen. Die eben aufgezählten sind jedoch keineswegs die einzigen derartigen Fälle, sondern vielmehr nur einzelne Anwendungen eines viel umfassenderen Gesetzes, vermöge dessen überhaupt der Werth von N in §. 13. stets durch eine geschlossene analytische Formel ausgedrückt werden kann, sobald $\frac{\alpha}{d}$ entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch mit dem Nenner 2 ist. Der Beweis dieses Satzes lässt sich leicht aus dem Vorhergehenden ableiten.

Sei demnach zuerst $\frac{\alpha}{d}$ eine ganze, übrigens additive oder subtraktive Zahl, wobei der Fall, wenn $\alpha = 0$ wird, keineswegs ausgeschlossen bleibt.

Unter dieser Voraussetzung ist vermöge II. in §. 19.:

$$\underset{\alpha+\sqrt{\beta}\,|\,d}{C} = \frac{1}{d}.\underset{\frac{\alpha}{d}+\frac{\sqrt{\beta}}{d}\,|\,1}{C} = \frac{1}{d}.\Bigl(\underset{\frac{\sqrt{\beta}}{d}\,|\,1}{C} - \overset{\frac{\alpha}{d}}{\underset{\frac{\sqrt{\beta}}{d}\,|\,1}{S}}\Bigr) = \frac{1}{d}.\underset{\frac{\sqrt{\beta}}{d}\,|\,1}{C} - \overset{\frac{\alpha}{d}}{\underset{\sqrt{\beta}\,|\,d}{S}}.$$

Wird nun in der Gleichung III. des §. 42. $\frac{\sqrt{\beta}}{d}$ anstatt $\sqrt{\beta}$, daher $\frac{\beta}{d^2}$ anstatt β gesetzt, und zugleich der durch diese Substitution entspringende Werth des dortigen M_0 mit M_0' bezeichnet, so ergibt sich:

$$\underset{\frac{\sqrt{\beta}}{d}\,|\,1}{C} = M_0' + \Bigl(\frac{d}{2\beta} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\,\mathrm{cotang}\,\frac{\pi\sqrt{\beta}}{d}\Bigr).\sqrt{\beta}.$$

Ferner zeigt die in §. 13. vorgenommene Zerlegung I. der harmonischen Reihen mit Anfangszahlen von der Form $\alpha + \sqrt{\beta}$, wenn dabei $\alpha = 0$ angenommen wird, dass

$$\overset{\frac{\alpha}{d}}{\underset{\sqrt{\beta}\,|\,d}{S}} = \overset{\frac{\alpha}{d}}{S}\frac{(n-1)d}{(n-1)^2.d^2-\beta} - \sqrt{\beta}.\overset{\frac{\alpha}{d}}{S}\frac{1}{(n-1)^2.d^2-\beta}$$

sei. Werden diese beiden Werthe in dem vorher für $\underset{\alpha+\sqrt{\beta}\,|\,d}{C}$ aufgestellten substituirt, so erhält man:

$$\underset{\alpha+\sqrt{\beta}|d}{C} = \frac{1}{d} \cdot M_0' - \overset{\frac{\alpha}{d}}{S} \frac{(n-1)d}{(n-1)^2 d^2 - \beta}$$

$$+ \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{2d\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{d} + \overset{\frac{\alpha}{d}}{S} \frac{1}{(n-1)^2 d^2 - \beta} \right) \cdot \sqrt{\beta},$$

und aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit II. in §. 13. findet man sogleich:

$$\text{I.} \quad N = -\frac{1}{2\beta} - \frac{\pi}{2d\sqrt{\beta}} \operatorname{cotang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{d} - \overset{\frac{\alpha}{d}}{S} \frac{1}{(n-1)^2 d^2 - \beta}.$$

Nun nehme man zweitens an, $\frac{\alpha}{d}$ sei ein regelmässiger Bruch mit dem Nenner 2, dessen Zähler aber eine ungerade Zahl sein muss, weil sonst $\frac{\alpha}{d}$ eine ganze Zahl sein und daher der bereits vorher behandelte Fall eintreten würde. Bei dieser Annahme ist nach II. in §. 19.:

$$\underset{\alpha+\sqrt{\beta}|d}{C} = \frac{1}{d} \cdot \underset{\frac{\alpha}{d}+\frac{\sqrt{\beta}}{d}|1}{C} = \frac{1}{d} \cdot \underset{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\beta}}{d}|1}{C} - \underset{\frac{d}{2}+\sqrt{\beta}|d}{\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}} = \frac{2}{d} \cdot \underset{1+\frac{2\sqrt{\beta}}{d}|1}{C} - \underset{\frac{d}{2}+\sqrt{\beta}|d}{\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}}$$

ferner nach IV. in §. 43., wenn darin $\frac{2\sqrt{\beta}}{d}$ anstatt $\sqrt{\beta}$ gesetzt und zugleich der durch diese Substitution hervorkommende Werth von M_1 mit M_1' bezeichnet wird,

$$\underset{1+\frac{2\sqrt{\beta}}{d}|2}{C} = M_1' - \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi\sqrt{\beta}}{d},$$

und vermittelst der in §. 13. gezeigten Zerlegung I.:

$$\underset{\frac{d}{2}+\sqrt{\beta}|d}{\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}} = \overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S} \frac{\frac{d}{2}+(n-1)d}{\left(\frac{d}{2}+(n-1)d\right)^2 - \beta} - \sqrt{\beta} \cdot \overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S} \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+(n-1)d\right)^2 - \beta},$$

oder:

$$\underset{\frac{d}{2}+\sqrt{\beta}|d}{\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}} = 2d \cdot \overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S} \frac{2n-1}{(2n-1)^2 d^2 - 4\beta} - 4\sqrt{\beta} \cdot \overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S} \frac{1}{(2n-1)^2 d^2 - 4\beta}.$$

Die Substitution dieser Werthe gibt dann:

$$\underset{\alpha+\sqrt{\beta}\,|\,d}{C} = \frac{2}{d}.M_1' - 2d.\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}\frac{2n-1}{(2n-1)^2d^2-4\beta}$$

$$-\left(\frac{\pi}{2d\sqrt{\beta}}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{\beta}}{d} - 4.\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2d^2-4\beta}\right).\sqrt{\beta},$$

woraus

$$\text{II.}\quad N = \frac{\pi}{2d\sqrt{\beta}}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{\beta}}{d} - 4.\overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2d^2-4\beta}$$

folgt.

§. 46.

Es erübriget noch, auch die harmonischen Konstanten mit komplexen Anfangszahlen einer kurzen Betrachtung zu unterwerfen, um die Eigenschaften derselben wenigstens für die kleinsten Differenzen 1, 2 und 4 zu finden. Zu diesem Behufe könnte ganz der nämliche Weg betreten werden, welcher so eben für die Konstanten mit irrationalen Anfangszahlen eingeschlagen wurde. Es ist jedoch gar nicht nöthig, diese Rechnungen hier zu wiederholen, da sie sich von den vorhergehenden nur darin unterscheiden können, dass hier durchgängig βi anstatt des früheren $\sqrt{\beta}$ und daher $-\beta^2$ anstatt β gesetzt werden muss, durch welche Substitution zugleich die früheren in §. 13. durch M und N bezeichneten Reihen in P und Q des §. 14. übergehen. Diess ist so einleuchtend und leicht ausführbar, dass es vollkommen genügen wird, nur die Ergebnisse dieser Substitutionen in den hauptsächlichsten Formeln der §. 42—45. hierher zu setzen, dabei aber denjenigen von ihnen, welche hiedurch eine imaginäre Form erhalten, durch den Uebergang von den goniometrischen Funktionen zu den gleichgeltenden Exponential-Ausdrücken eine reelle Gestalt zu verleihen.

Auf diese Art entstehen aus II. und III. des §. 42. die neuen Formeln:

$$\text{I.}\quad Q_0 = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\pi}{2\beta}.\frac{e^{\pi\beta}+e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}},$$

$$\text{II.}\quad \underset{\beta i\,|\,1}{C} = P_0 - \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{2}.\frac{e^{\pi\beta}+e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}\right).i,$$

wo P_0 und Q_0 die Werthe von P und Q in §. 14. bedeuten, wenn darin $\alpha = 0$, $d = 1$ gesetzt wird. Ferner gehen die Formeln III., IV., V., VI., VII., des §. 43. in

$$\text{III.}\qquad Q_1=\frac{\pi}{4\beta}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{2}}-e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}{e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}},$$

$$\text{IV.}\qquad \underset{1+\beta i\,|\,2}{C}=P_1-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{2}}-e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}{e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}.i,$$

$$\text{V.}\qquad \underset{\beta i\,|\,2}{C}=\underset{\beta i\,|\,1}{C}+l2-P_1+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{2}}-e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}{e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}.i,$$

$$\text{VI.}\qquad Q_2=\frac{1}{2\beta^2}+\frac{\pi}{4\beta}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}{e^{\frac{\pi\beta}{2}}-e^{-\frac{\pi\beta}{2}}},$$

$$\text{VII.}\qquad \underset{\beta i\,|\,2}{C}=P_2-\left(\frac{1}{2\beta}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}{e^{\frac{\pi\beta}{2}}-e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}\right).i$$

über, wo P_1 und Q_1 die Werthe von P und Q für $\alpha=1$ und $d=2$, hingegen P_2 und Q_2 die Werthe von P und Q für $\alpha=0$ und $d=2$ bezeichnen. Aus II. und III. des §. 44. wird

$$\text{VIII.}\qquad \underset{3+\beta i\,|\,4}{C}=\tfrac{1}{2}.P_1+\frac{l2}{4}-\frac{\pi}{4\left(e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}\right)}-Q_3.\beta.i,$$

IX.

$$\underset{1+\beta i\,|\,4}{C}=\tfrac{1}{2}.P_1+\frac{l2}{4}+\frac{\pi}{4\left(e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}\right)}+\left(Q_3.\beta-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{2}}-e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}{e^{\frac{\pi\beta}{2}}+e^{-\frac{\pi\beta}{2}}}\right).i,$$

wo Q_3 den Werth von Q für $\alpha=3$ und $d=4$ ausdrückt. Endlich aus §. 45. erhält man in dem Falle, wenn $\frac{\alpha}{d}$ eine ganze Zahl ist,

$$\text{X.}\qquad Q=\frac{1}{2\beta^2}+\frac{\pi}{2d\beta}\cdot\frac{e^{\frac{\pi\beta}{d}}+e^{-\frac{\pi\beta}{d}}}{e^{\frac{\pi\beta}{d}}-e^{-\frac{\pi\beta}{d}}}-\overset{\frac{\alpha}{d}}{S}\frac{1}{(n-1)^2d^2+\beta^2}$$

und in dem Falle, wenn $\frac{\alpha}{d}$ ein Bruch mit dem Nenner 2 und einem ungeraden Zähler ist,

$$\text{XI.} \quad Q = \frac{\pi}{2d\beta} \cdot \frac{e^{\frac{\pi\beta}{d}} - e^{-\frac{\pi\beta}{d}}}{e^{\frac{\pi\beta}{d}} + e^{-\frac{\pi\beta}{d}}} - 4 \cdot \overset{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}{S} \frac{1}{(2n-1)^2 d^2 + 4\beta^2}.$$

§. 47.

Im Vorhergehenden ist die Theorie der harmonischen Reihen der ersten Ordnung und der ihnen zugehörigen Konstanten, so wie die Berechnung der letzteren, in solcher Ausführlichkeit und Vollständigkeit abgehandelt worden, als es zu dem hier davon zu machenden Gebrauche angemessen erschien. Demnach muss nunmehr zu den Anwendungen übergegangen werden, welche man von der erlangten Kenntniss dieser Zahlen und ihren wechselseitigen Beziehungen zu machen im Stande ist.

Die harmonischen Konstanten sind zuerst in §. 10. aufgetreten, und dort nur als Hilfszahlen erschienen, deren Kenntniss nothwendig war, um mit ihrer Hilfe die Summe einer jeden endlichen, wie immer grossen Anzahl von Gliedern einer harmonischen Reihe der ersten Ordnung ohne allzu grosse Beschwerlichkeit mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnen zu können. Allein dieser Gebrauch ist nur ein kleiner, und gewiss nicht der wichtigere Theil des Nutzens, welcher aus ihnen gezogen werden kann. Viel wichtiger muss der Nutzen geachtet werden, welchen die voraus erlangte Kenntniss von den Eigenschaften der harmonischen Konstanten bei der Werthbestimmung einer bedeutenden Anzahl bestimmter Integrale zu gewähren vermag, wie diess bereits in §. 29. angedeutet worden ist. Von dieser Art der Anwendung darf aber hier nicht weitläufiger gehandelt werden, weil dieselbe nicht zu dem Zwecke der gegenwärtigen Abhandlung gehört, indem letzterer nach §. 1. lediglich auf die harmonischen Reihen, und die aus solchen durch die Zusammenziehung ihrer gleichvielten Glieder entstehenden neuen Reihen gerichtet ist. Eben bei diesen letzteren Reihen spielen die harmonischen Konstanten eine höchst wichtige Rolle, indem die Summirung solcher unendlichen Reihen im Allgemeinen, wie sich bald zeigen wird, ausschliesslich auf der Kenntniss von den harmonischen Konstanten beruht. Desshalb soll nunmehr die Aufgabe von der Summirung aller jener unendlichen Reihen, welche durch das Zusammenziehen der gleichvielten Glieder beliebig vieler harmonischer Reihen, die sämmtlich der ersten Ordnung angehören, entspringend gedacht werden können, sogleich in ihrer grössten Allgemeinheit aufgefasst und gelöst werden.

Seien demnach mehrere, als ohne Ende fortlaufend gedachte, harmonische Reihen der ersten Ordnung

$$\underset{a\,|\,d}{S}\,,\ \underset{a_1\,|\,d_1}{S}\,,\ \underset{a_2\,|\,d_2}{S}\,,\ \underset{a_3\,|\,d_3}{S}\,,\ldots.$$

gegeben; jede derselben möge überdiess mit einem beliebigen, für alle Glieder einer jeden einzelnen Reihe gleichen, Faktor multiplizirt werden, nämlich beziehungsweise mit

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots.;$$

dann aber sollen die ersten, zweiten, dritten u. s. f., kurz die gleichvielten Glieder aller durch diese Multiplikation zum Vorscheine gekommenen Reihen mit den ihnen vermöge der beigefügten Faktoren zugehörenden Vorzeichen jedesmal in Ein Glied zusammen gefasst werden. Auf diese Art erhält man eine neue unendliche Reihe, welche nach der angenommenen Bezeichnungsweise durch

$$A.\underset{a\,|\,d}{S} + A_1.\underset{a_1\,|\,d_1}{S} + A_2.\underset{a_2\,|\,d_2}{S} + A_3.\underset{a_3\,|\,d_3}{S} + \ldots.$$

dargestellt werden kann, und um deren Summirung es sich nun handelt, wenn sie wirklich eine Summe besitzt, d. h. konvergent ist.

Aus der Divergenz einer jeden einzelnen harmonischen Reihe der ersten Ordnung ist sogleich einleuchtend, dass eine auf die eben beschriebene Weise entstandene neue Reihe in dem Falle unmöglich konvergiren könne, sobald sämmtliche Faktoren $A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots.$ durchgängig gleiche Vorzeichen haben; hingegen hat man durch die erfolgte Auffindung der endlichen Summen einer bedeutenden Anzahl solcher Reihen den praktischen Beweis geliefert, dass sie in vielen Fällen gewiss konvergent sind. Es stellt sich demnach vor Allem die Frage zur Beantwortung dar, welche Bedingungen es seien, von deren Erfüllung es abhängt, ob eine auf vorangegebene Art erhaltene Reihe konvergire oder divergire? Erst nach Auffindung der zur Konvergenz erforderlichen Bedingungen und unter der Voraussetzung, dass ihnen wirklich Genüge geleistet sei, kann die Aufgabe zur Lösung vorgelegt werden, die Summe einer solchen unendlichen Reihe auch zu bestimmen.

Bei dem ersten Anblicke sollte man glauben, dass die Lösung dieser beiden Aufgaben, wenn sie in so grosser Allgemeinheit aufgefasst werden, schwierig oder doch verwickelt sein müsse, bei näherer Untersuchung hingegen wird sich diess ganz leicht und einfach darstellen.

§. 48.

Zur Beurtheilung der Konvergenz oder Divergenz einer nach Anleitung des §. 47. entsprungenen unendlichen Reihe kann von einem Satze ausgegangen werden, der als Folgerung aus den bekannten, von Gauss aufgestellten Regeln hier keiner besonderen Beweisführung bedürfen wird, nämlich: dass jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion der Stellenzahl n ist, stets konvergire, sobald der Zähler wenigstens um zwei Grade niedriger ist als der Nenner, hingegen bei dem Abgange dieser Eigenschaft gewiss divergire. Nun sind die allgemeinen Glieder der in §. 47. angesetzten einzelnen harmonischen Reihen mit Einschluss des einer jeden von ihnen zugehörigen Faktors offenbar

$$\frac{A}{a+(n-1)d},\quad \frac{A_1}{a_1+(n-1)d_1},\quad \frac{A_2}{a_2+(n-1)d_2},\quad \frac{A_3}{a_3+(n-1)d_3},\ldots,$$

welche sich auch auf die Form

$$\frac{\frac{A}{d}}{n+\frac{a-d}{d}},\quad \frac{\frac{A_1}{d_1}}{n+\frac{a_1-d_1}{d_1}},\quad \frac{\frac{A_2}{d_2}}{n+\frac{a_2-d_2}{d_2}},\quad \frac{\frac{A_3}{d_3}}{n+\frac{a_3-d_3}{d_3}},\ldots$$

bringen lassen; folglich wird das allgemeine Glied der hieraus nach §. 47. entspringenden neuen Reihe nichts anderes als die Summe aller dieser einzelnen Glieder, nämlich:

$$\frac{\frac{A}{d}}{n+\frac{a-d}{d}}+\frac{\frac{A_1}{d_1}}{n+\frac{a_1-d_1}{d_1}}+\frac{\frac{A_2}{d_2}}{n+\frac{a_2-d_2}{d_2}}+\frac{\frac{A_3}{d_3}}{n+\frac{a_3-d_3}{d_3}}+\ldots.$$

sein, und man braucht nur alle diese Brüche auf gleiche Nenner zu bringen und in einen einzigen Bruch zusammen zu fassen, um dann aus der Beschaffenheit des Zählers und Nenners in Gemässheit des vorhin angeführten Satzes einen sicheren Schluss auf die Konvergenz oder Divergenz der neuen Reihe ziehen zu können.

Hiebei kann stets angenommen werden, dass die Nenner aller dieser einzelnen Brüche sämmtlich von einander verschieden seien, weil in dem Falle, wenn zwei oder mehrere von den gegebenen Brüchen wirklich gleiche Nenner haben sollten, man

dieselben durch die Addition ihrer Zähler in einen Bruch zusammen zu fassen vermag. Unter dieser Voraussetzung ist sogleich klar, dass der gemeinschaftliche Nenner das Produkt aus den Nennern aller einzelnen Brüche sein müsse; der gemeinschaftliche Zähler hingegen erhalten werde, indem man jeden einzelnen Zähler durch die Nenner aller übrigen Brüche, mit Ausnahme des eigenen, multiplizirt und alle diese Produkte zusammenaddirt. Die Ausführung dieser Rechnungen würde allerdings mühsam und langwierig sein, wenn man den Zähler und Nenner vollständig zu entwickeln nöthig hätte, zu dem hier davon zu machenden Gebrauche aber genügt es schon, nur das höchste Glied sowohl im Zähler als im Nenner zu kennen, weil von diesen Gliedern allein der Grad des einen und des anderen abhängt. Nun ist offenbar das höchste Glied in dem Produkte aller Nenner nichts anderes als das Produkt der ersten Glieder aller einzelnen Nenner, und daher, wenn man die Anzahl der Nenner oder Brüche durch m bezeichnet, stets n^m, wonach der Grad des gemeinschaftlichen Nenners durch m ausgedrückt wird. Das höchste Glied im gemeinschaftlichen Zähler hingegen wird nach dem vorher Gesagten gefunden, wenn man von den Produkten eines jeden einzelnen Zählers in die Nenner aller übrigen Brüche gleichfalls nur die höchsten Glieder entwickelt, welche sich mit

$$\frac{A}{d}.n^{m-1}, \quad \frac{A_1}{d_1}.n^{m-1}, \quad \frac{A_2}{d_2}.n^{m-1}, \quad \frac{A_3}{d_3}.n^{m-1}, \ldots.$$

ergeben, und dieselben, da sie sämmtlich vom gleichen Grade $m-1$ sind, in Ein Glied zusammen zieht, welches somit

$$\left(\frac{A}{d}+\frac{A_1}{d_1}+\frac{A_2}{d_2}+\frac{A_3}{d_3}+\ldots.\right).n^{m-1}$$

und daher ebenfalls vom Grade $m-1$ sein wird.

Kommt nun das eben gefundene Glied in dem gemeinschaftlichen Zähler wirklich vor, was stets der Fall sein muss, wenn nicht etwa die Bestandtheile des zwischen den Klammern enthaltenen Koeffizienten von n^{m-1} sich gegenseitig ganz aufheben, wodurch der Koeffizient gleich 0 werden und das Glied daher wegfallen würde, dann ist auch der bezeichnete Zähler vom Grade $m-1$, und folglich nur um Einen Grad niedriger als der Nenner, woraus vermöge des gleich anfangs ausgesprochenen Satzes sich ergibt, dass die Reihe divergent sei. Sobald hingegen das obige Glied dadurch, dass der Koeffizient von n^{m-1} gleich 0 wird, aus dem gemeinschaftlichen Zähler wegfällt, kann das zunächst

darauf folgende Glied in diesem Zähler nur höchstens vom Grade $m-2$, daher auch der Zähler selbst höchstens von eben diesem Grade und folglich wenigstens um zwei Grade niedriger als der Nenner sein, was dann die Konvergenz der Reihe zur nothwendigen Folge hat.

Diese Betrachtungen zeigen, dass die Konvergenz oder Divergenz einer nach Anleitung des §. 47. aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung hervorgehenden neuen Reihe lediglich von der Beschaffenheit des obigen Koeffizienten von n^{m-1} abhänge und die Reihe konvergent oder divergent sein werde, je nachdem jener Koeffizient gleich 0 ist oder nicht. Demnach besteht für die Konvergenz einer solchen Reihe nur eine einzige, zugleich nothwendige und zureichende, Bedingung, welche durch die höchst einfache Gleichung

$$\text{I.}\quad \frac{A}{d}+\frac{A_1}{d_1}+\frac{A_2}{d_2}+\frac{A_3}{d_3}+\ldots.=0$$

ausgedrückt werden kann, durch deren Erfüllung oder Nichterfüllung man die Konvergenz oder Divergenz einer auf besagte Art zu bildenden Reihe schon vorhinein eben so leicht als sicher zu beurtheilen vermag.

In dem Falle, wenn die Differenzen aller einzelnen harmonischen Reihen der ersten Ordnung, aus welchen nach §. 47. eine neue Reihe zusammen gesetzt werden soll, einander gleich sind, nämlich: $d=d_1=d_2=d_3=\ldots.$, nimmt die Bedingungsgleichung I. durch die Multiplikation mit den gleichen Nennern offenbar die noch einfachere Form an:

$$\text{II.}\quad A+A_1+A_2+A_3+\ldots.=0,$$

welche einfachere Form wohl auch als in allen Fällen hinreichend betrachtet werden könnte, da man weiss, wie leicht beliebige gegebene harmonische Reihen mit ungleichen Differenzen auf gleiche Differenzen sich bringen lassen.

Bei der vorhergehenden Ableitung ist von der Voraussetzung ausgegangen worden, dass die Nenner der allgemeinen Glieder aller einzelnen harmonischen Reihen von einander verschieden seien. Man könnte desshalb meinen, dass dieselbe Voraussetzung auch den Gleichungen I. und II. zum Grunde liege und daher die letzteren keine unmittelbare Anwendung finden, so lange unter den allgemeinen Gliedern noch solche mit gleichen Nennern vorkommen, sondern diese Brüche vorher in Einen Bruch zusammen gezogen werden müssen. Diess ist jedoch keineswegs der Fall. Denn da diese Zusammenziehung durch die Addition der zusammenge-

hörigen Zähler erfolgt, ist es offenbar ganz gleichgiltig, ob man die Addition schon vorher oder erst bei der Anwendung der Gleichungen I. oder II. vornimmt.

§. 49.

Nach dieser Voruntersuchung unterliegt es nunmehr durchaus keiner Schwierigkeit, auch die zweite in §. 47. ausgesprochene Aufgabe zu lösen, nämlich die Summe der dort angezeigten unendlichen Reihe unter der Voraussetzung ihrer Konvergenz durch eine allgemeine höchst einfache Formel auszudrücken. Zu diesem Behufe bezeichne man die Summe der n ersten Glieder der dortigen neuen Reihe durch x_n und die Summe eben dieser, aber ohne Ende fortlaufend gedachten, Reihe durch x, so dass

$$x_n = A.\overset{n}{\underset{a|d}{S}} + A_1.\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} + A_2.\overset{n}{\underset{a_2|d_2}{S}} + A_3.\overset{n}{\underset{a_3|d_3}{S}} + \ldots$$

und bei der unendlichen Zunahme von n

$$x = \lim x_n$$

ist. Da hiebei die Konvergenz der zu summirenden unendlichen Reihe x vorausgesetzt wird, müssen die Faktoren $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ und die Differenzen $d, d_1, d_2, d_3, \ldots$ dergestalt beschaffen sein, dass sie der Bedingungsgleichung I. des §. 48. Genüge leisten, folglich muss, wenn diese letztere mit ln multiplizirt wird,

$$\frac{A}{d}.ln + \frac{A_1}{d_1}.ln + \frac{A_2}{d_2}.ln + \frac{A_3}{d_3}.ln + \ldots = 0$$

sein.

Wird nun dieser Ausdruck von dem angegebenen Werthe von x_n abgezogen, so erhält man:

$$x_n = A\left[\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right] + A_1\left[\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} - \frac{1}{d_1}ln\right] + A_2\left[\overset{n}{\underset{a_2|d_2}{S}} - \frac{1}{d_2}ln\right]$$
$$+ A_3\left[\overset{n}{\underset{a_3|d_3}{S}} - \frac{1}{d_3}ln\right] + \ldots,$$

folglich bei dem unendlichen Wachsthume von n:

$$\lim x_n = A\lim\left[\overset{n}{\underset{a|d}{S}} - \frac{1}{d}ln\right] + A_1\lim\left[\overset{n}{\underset{a_1|d_1}{S}} - \frac{1}{d_1}ln\right]$$
$$+ A_2\lim\left[\overset{n}{\underset{a_2|d_2}{S}} - \frac{1}{d_2}ln\right] + A_3\lim\left[\overset{n}{\underset{a_3|d_3}{S}} - \frac{1}{d_3}ln\right] + \ldots,$$

oder vermöge §. 15.:

$$\text{I.}\quad x = A.\underset{a|d}{C} + A_1.\underset{a_1|d_1}{C} + A_2.\underset{a_2|d_2}{C} + A_3.\underset{a_3|d_3}{C} + \dots$$

Demnach wird die Summe einer jeden aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit Hinzufügung beliebiger Faktoren durch das Zusammenziehen ihrer gleichvielten Glieder hervorgehenden unendlichen Reihe unter der Voraussetzung ihrer nach §. 48. besonders zu beurtheilenden Konvergenz gefunden, indem man die einer jeden einzelnen Reihe entsprechende harmonische Konstante mit dem zugehörigen Faktor der Reihe multiplizirt, und alle diese Produkte mit ihren Zeichen zusammen nimmt, oder noch kürzer ausgedrückt, indem man in der in §. 47. angegebenen Bezeichnung der Reihe anstatt S durchgängig C setzt.

Dieser Satz zeigt, mit welcher Leichtigkeit die Summen solcher unendlichen Reihen gefunden werden können, sobald dabei die harmonischen Konstanten als bekannt angenommen werden, was in Folge der im Vorhergehenden ausgeführten oder doch angedeuteten Berechnungen stets als zulässig erscheint.

Ferner überzeugt man sich hieraus, dass es vollkommen gegründet war, wenn in §. 47. behauptet wurde, dass die Summirung der hier betrachteten unendlichen Reihen im Allgemeinen ausschliesslich auf der Kenntniss der harmonischen Konstanten beruhe.

§. 50.

Die Anwendung der eben gefundenen allgemeinen Summenformel unterliegt keinem Anstande, sobald die einzelnen harmonischen Reihen der ersten Ordnung, aus welchen durch Zusammenziehen ihrer gleichvielten Glieder eine neue gebildet werden soll, folglich auch ihre allgemeinen Glieder unmittelbar gegeben sind, und man zugleich die Faktoren kennt, mit welchen sie einzeln vorher multiplizirt werden sollen. Denn unter dieser Voraussetzung kann sogleich zur Beurtheilung der Konvergenz oder Divergenz der zu bildenden neuen Reihe vermittelst der Bedingungsgleichungen I. oder II. des §. 48. geschritten und, wenn sich hiedurch die Konvergenz der Reihe herausgestellt hat, die Summe derselben durch die Formel I. des §. 49. ausgedrückt werden, in welcher man nur noch anstatt der Zeichen der harmonischen Konstanten ihre nach der vorausgegangenen Anleitung

berechneten Werthe zu setzen braucht, um die gesuchte Summe entweder durch einen analytischen Ausdruck oder wenigstens näherungsweise in bestimmten Zahlen zu finden.

Man darf aber hiebei nicht ausser Acht lassen, dass bei dem Beweise der Summenformel I. in §. 49. die Konvergenz der Reihe ausdrücklich als wirklich vorhanden angenommen wurde und daher jene Formel auf nicht konvergente Reihen gar keine Anwendung finde. Aus diesem Grunde muss stets, bevor man jene Formel auf eine Reihe anwenden will, die Konvergenz derselben ausser Zweifel gestellt sein. Desshalb darf, wenn man nicht etwa schon aus anderen Gründen die Ueberzeugung von der Konvergenz der Reihe gewonnen haben sollte, die vorläufige Untersuchung derselben nach §. 48. niemals unterlassen werden, weil man durch Vernachlässigung dieser Vorsicht sich der Gefahr aussetzen würde, die Summenformel des §. 49. auf Fälle auszudehnen, in welchen sie weder erwiesen noch richtig ist, und auf solche Art ganz falsche Resultate zu erhalten. Einige andere mathematische Formeln besitzen allerdings die bequeme Eigenschaft, dass sie in jenen Fällen, für welche sie eigentlich nicht gelten, solche Ergebnisse liefern, deren Unbrauchbarkeit sogleich von selbst in die Augen fällt. Die gleiche Bequemlichkeit gewährt die Formel des §. 49. keineswegs. Diese würde vielmehr, wenn man sie auf divergente Reihen anwenden wollte, scheinbar auch für solche Reihen endliche Summen geben, die sie eben wegen der Divergenz gar nicht besitzen können. Desshalb ist die Beobachtung der vorhin empfohlenen Vorsicht in so lange streng nothwendig, bis man etwa auf anderem Wege die Ueberzeugung von der Konvergenz oder Divergenz der zu summirenden Reihe erlangt hat. Uebrigens ist der ganze Hergang der Rechnung bei der eben erklärten Summirungsart so einfach, dass die Anführung eines einzigen, nicht sehr verwickelten Beispiels, auf welches auch noch später Bezug genommen werden soll, hinreichen wird, um Alles in das klarste Licht zu setzen. Zu diesem Zwecke soll die Aufgabe vorgelegt werden, die Summe einer unendlichen Reihe zu finden, welche aus den vier harmonischen Reihen der ersten Ordnung

$$\underset{5|2}{S},\ \underset{5|3}{S},\ \underset{5|4}{S},\ \underset{5|6}{S}$$

beziehungsweise multiplizirt mit den Faktoren

$$-\frac{9}{500},\ \frac{4}{125},\ -\frac{1}{125},\ \frac{1}{500}$$

nach Anleitung des §. 47. hervorgeht. Dass diese Reihe

konvergent sein werde, gibt die Bedingungsgleichung I. des §. 48. auf der Stelle zu erkennen, denn es ist wirklich:

$$-\frac{9}{500.2}+\frac{4}{125.3}-\frac{1}{125.4}+\frac{1}{500.6}=\frac{-27+32-6+1}{3000}=0.$$

Nachdem hiedurch die Anwendbarkeit der Summenformel des §. 49. ausser Zweifel gestellt wurde, erhält man durch dieselbe für die gesuchte Summe den Ausdruck:

$$-\frac{9}{500}\cdot \underset{5|2}{C}+\frac{4}{125}\cdot \underset{5|3}{C}-\frac{1}{125}\cdot \underset{5|4}{C}+\frac{1}{500}\cdot \underset{5|6}{C}.$$

Nun ist vermöge II. in §. 19. und §. 32.:

$$\underset{5|2}{C}=\underset{1|2}{C}-\underset{1|2}{\overset{2}{S}}=\underset{1|2}{C}-\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot \underset{1|1}{C}+l2-\frac{4}{3},$$

ferner nach §. 33.:

$$\underset{5|3}{C}=\underset{2|3}{C}-\underset{2|3}{\overset{1}{S}}=\underset{2|3}{C}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot \underset{1|1}{C}+\frac{l3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{1}{2},$$

dann wegen §. 34.:

$$\underset{5|4}{C}=\underset{1|4}{C}-\underset{1|4}{\overset{1}{S}}=\underset{1|4}{C}-1=\frac{1}{4}\cdot \underset{1|1}{C}+\frac{3l2}{4}+\frac{\pi}{8}-1,$$

endlich aus §. 36.:

$$\underset{5|6}{C}=\frac{1}{6}\cdot \underset{1|1}{C}+\frac{l2}{3}+\frac{l3}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Werden alle diese Werthe in der vorhin angesetzten Summe substituirt, so wird man nach gehöriger Abkürzung dafür den Ausdruck finden:

$$\frac{2}{125}+\frac{33l3}{2000}-\frac{7l2}{300}-\frac{\pi(18+35\sqrt{3})}{18000},$$

oder wenn man die angezeigten Rechnungen in 16 Dezimalstellen ausführt,

$$0{,}0042\ 3157\ 9605\ 0024.$$

§. 51.

Die Summenformel des §. 49. dürfte vielleicht nur selten in derjenigen Weise zur Anwendung kommen, wie es in §. 50. angenommen und an dem dortigen Beispiele gezeigt wurde. Weit öfter wird es sich ereignen, dass nicht sowohl die zusammenz-

ziehenden einzelnen harmonischen Reihen und die ihnen zukommenden Faktoren, als vielmehr die daraus entstandene Reihe gegeben und ihre Summirung verlangt wird. In einem solchen Falle ist es vorerst nothwendig, zu entscheiden, ob die gegebene Reihe wirklich aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung auf die in §. 47. erklärte Art entstanden gedacht werden könne? Dann muss gefragt werden, aus welchen solchen Reihen jene hervorgegangen sei und mit welchem Faktor jede einzelne von diesen multiplizirt vorgestellt werden müsse? Erst nach erfolgter Beantwortung dieser Vorfragen kann von Summirung der gegebenen Reihe durch die Formel des §. 49. die Rede und wird dann auch ganz leicht zu bewerkstellen sein.

Zur gewünschten Entscheidung über die eben vorgelegten Fragen gelangt man durch folgende kurze Betrachtungen.

Aus demjenigen, was in §. 48. über die Darstellung des allgemeinen Gliedes einer aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit was immer für beständigen Faktoren durch Zusammenziehung ihrer gleichvielten Glieder entspringenden neuen Reihe angeführt wurde, entnimmt man auf der Stelle, dass ein solches allgemeines Glied in jedem Falle eine rationale gebrochene Funktion der Stellenzahl n sei oder in eine solche sich verwandeln lasse; ferner dass der Nenner dieser Funktion stets ein Produkt aus Faktoren des ersten Grades sein werde, die sämmtlich unter einander verschieden sind, endlich der Zähler derselben im Allgemeinen um Einen Grad, sobald hingegen die Reihe konvergent sein soll, wenigstens um zwei Grade niedriger sein muss, als der Nenner. Hieraus folgt, dass jede Reihe, deren allgemeines Glied die eben aufgezählten drei Eigenschaften nicht insgesammt besitzt, unmöglich aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung nach §. 47. hervorgegangen und durch die Summenformel des §. 49. summirt werden könne.

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied die angeführten drei Eigenschaften wirklich an sich trägt, stets nach §. 49. sich summiren lasse. Denn stellt man sich den Nenner eines so beschaffenen allgemeinen Gliedes in seine einfachen Faktoren, die nach der Voraussetzung sämmtlich von einander verschieden sein müssen, aufgelöst vor und zerlegt demgemäss den Bruch in seine einfachen sogenannten Partialbrüche, so kann jeder solche Partialbruch mit einstweiliger Beiseitesetzung seines Zählers als das allgemeine Glied einer harmonischen Reihe der ersten Ordnung angesehen, demselben

der früher beiseite gelassene Zähler wieder als Faktor hinzugefügt und somit die gegebene Reihe als durch die Zusammenziehung der gleichvielten Glieder aller angedeuteten harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit den ihnen beigefügten Faktoren entstanden gedacht werden. Zugleich kennt man auf diese Weise sowohl alle einzelnen Reihen, als auch die ihnen zugehörigen Faktoren und kann daher die Summirung ganz wie in §. 50. vornehmen, wobei es sich von selbst versteht, dass hier die Vornahme einer besonderen Untersuchung über die Konvergenz oder Divergenz der zu summirenden Reihe mit Hilfe der Bedingungsgleichung des §. 48. ganz überflüssig sein würde, weil das Urtheil hierüber schon aus der Beschaffenheit des Zählers und Nenners des allgemeinen Gliedes der gegebenen Reihe mit voller Sicherheit gefällt werden kann.

Als Resultat der eben angestellten Betrachtungen geht demnach der allgemeine Satz hervor, dass jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion der Stellenzahl ist, sich durch die harmonischen Konstanten mittelst der Formel des §. 49. summiren lasse, sobald der Nenner ein Produkt aus einfachen, durchgängig von einander verschiedenen Faktoren und zugleich wenigstens um zwei Grade höher ist als der Zähler.

§. 52.

Ein Paar einfacher Beispiele wird hinreichen, um zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit die eben aufgestellten Regeln in Ausführung gebracht werden können. Sei zuerst die unendliche Reihe

$$\frac{1}{5.5.5.5}+\frac{4}{7.8.9.11}+\frac{9}{9.11.13.17}+\frac{16}{11.14.17.23}+\ldots$$

zur Summirung vorgelegt, deren allgemeines Glied

$$\frac{n^2}{(2n+3)(3n+2)(4n+1)(6n-1)}$$

ist. Da hier der Nenner bereits in seine einfachen Faktoren zerlegt erscheint, die sämmtlich von einander verschieden sind, überdiess der Zähler vom zweiten, der Nenner hingegen vom vierten Grade ist, so sieht man sogleich, dass hiebei alle in §. 51. geforderten Bedingungen vorhanden seien, die Reihe daher gewiss konvergire und ihre Summe nach der vorausgehenden Anweisung gefunden werden könne.

Das angeführte allgemeine Glied geht nun durch die Zerlegung in Partialbrüche in

$$-\frac{\frac{9}{500}}{2n+3}+\frac{\frac{4}{125}}{3n+2}-\frac{\frac{1}{125}}{4n+1}+\frac{\frac{1}{500}}{6n-1}$$

über, woraus sich zeigt, dass die gegebene unendliche Reihe aus den vier harmonischen Reihen der ersten Ordnung

$$\underset{5|2}{S},\ \underset{5|3}{S},\ \underset{5|4}{S},\ \underset{5|6}{S}$$

beziehungsweise multiplizirt mit den Faktoren

$$-\frac{9}{500},\ \frac{4}{125},\ -\frac{1}{125},\ \frac{1}{500}$$

nach §. 47. entstanden gedacht werden könne. Eben diese Reihe ist bereits in §. 50. als Beispiel vorgelegt und die Summirung dort vollständig ausgeführt worden, so dass die dortige Arbeit sammt dem erhaltenen Resultate sich unmittelbar hier anschliesst.

Als **zweites** Beispiel mag die unendliche Reihe dienen:

$$\frac{7}{1.1.5}+\frac{19}{4.5.17}+\frac{31}{7.9.29}+\frac{43}{10.13.41}+\ldots,$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{12n-5}{(3n-2)(4n-3)(12n-7)},$$

oder, in Partialbrüche zerlegt,

$$-\frac{9}{3n-2}+\frac{8}{4n-3}+\frac{12}{12n-7}$$

ist. Auch hier zeigt der blosse Anblick des allgemeinen Gliedes, dass alle zur Anwendung der Summenformel des §. 49. erforderlichen Bedingungen wirklich vorhanden sind. Desshalb wird die Summe der gegebenen unendlichen Reihe durch

$$-9.\underset{1|3}{C}+8.\underset{1|4}{C}+12.\underset{5|12}{C},$$

oder, wenn hierin die Werthe von $\underset{1|3}{C}$, $\underset{1|4}{C}$ und $\underset{5|12}{C}$ substituirt werden, durch

$$\underset{1|1}{C}-12.\underset{1|12}{C}+12l2-\frac{3l3}{2}+\frac{\pi(6-\sqrt{3})}{2}$$

ausgedrückt werden. Näherungsweise in 16 Dezimalstellen berechnet ist diese Summe

1,5034 3699 4609 9393.

§. 53.

Alle Reihensummen, welche sich durch die Formel des §. 49. auffinden lassen, werden mittelst derselben zunächst durch die harmonischen Konstanten ausgedrückt, welche letztere man in keinem Falle durch die bereits in die Analysis eingeführten Funktionen in geschlossener Form darzustellen im Stande ist, indem die primären aus ihnen nur mit Hilfe unendlicher Reihen berechnet und die sekundären nur auf die ersteren zurückgeführt werden können, wobei allerdings nicht nur algebraische Ausdrücke, sondern auch Logarithmen und Kreisfunktionen oder die den letzteren gleichgeltenden Exponential-Ausdrücke hinein kommen können. Als eine selbstverständliche Folge hievon muss es angesehen werden, dass die Summen der nach Anleitung des §. 47. entstehenden, oder, was völlig einerlei ist, derjenigen unendlichen Reihen, deren allgemeine Glieder die in §. 51. aufgezählten Eigenschaften besitzen, im Allgemeinen durch die bis jetzt in der Analysis üblichen Funktionen allein in endlicher Form nicht dargestellt werden können, sondern hiezu wenigstens in der Regel noch die Beiziehung einer oder mehrerer harmonischen Konstanten nothwendig erscheint. Da die letzteren bisher, mit Ausnahme einer einzigen, nämlich von $\underset{1|1}{C}$, in der Analysis nicht gebraucht wurden, waren die erwähnten Reihen nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche in der Regel gar nicht und nur ausnamsweise in besonderen Fällen summirbar, während diess, wie vorher gezeigt wurde, in allen Fällen ohne Ausnahme wirklich Statt findet, sobald man auch die harmonischen Konstanten als analytische Funktionen anerkennt und behandelt, was ihnen in Gemässheit ihrer erwiesenen Eigenschaften nicht nur gebührt, sondern was sie in Betracht des von ihnen zu gewärtigenden Nutzens auch verdienen dürften.

Man weiss übrigens bereits seit langer Zeit durch Leibnitz, Bernoulli, Euler und Andere, dass sehr viele zu den vorerwähnten gehörende unendliche Reihen auch ohne die harmonischen Konstanten lediglich durch die bisher gebräuchlichen analytischen Funktionen und häufig sogar in algebraischer und rationaler Gestalt sich summiren lassen. Desshalb gibt es bei diesen Reihen eine zweifache Art der Summirbarkeit, nämlich die allgemeine, welche allen solchen Reihen ohne Ausnahme zukommt, wozu aber die Hilfe der har-

monischen Konstanten nothwendig ist, dann eine besondere, welche allerdings nur in einigen Fällen ausführbar ist, jedoch allein durch die bis jetzt üblichen analytischen Funktionen mit Ausschluss aller harmonischen Konstanten bewerkstelliget werden kann. Um diese letztere Art der Summirung kurz und unzweideutig zu bezeichnen, soll sie künftighin durch den Beisatz „analytisch" erkennbar gemacht werden. Auf diese Weise ist die in §. 52. als erstes Beispiel angeführte unendliche Reihe, wie ihre in §. 50. aufgestellte Summe zeigt, analytisch summirbar, hingegen die eben dort als zweites Beispiel berechnete nicht analytisch summirbar.

Ferner soll noch jede unendliche Reihe, deren Summe durch einen algebraischen geschlossenen Ausdruck ohne Beimengung der sogenannten transzendenten Zahlen, hier insbesondere der Logarithmen und der Kreis- oder Exponential-Funktionen, dargestellt werden kann, algebraisch summirbar heissen.

Da nach dem Gesagten die analytische Summirbarkeit keine allgemeine Eigenschaft sämmtlicher nach Anleitung des §. 47. entspringenden unendlichen Reihen, von welchen in §. 51. die Beschaffenheit ihrer allgemeinen Glieder angegeben wurde, ist, so muss das wirkliche Eintreffen der analytischen Summirbarkeit in irgend einem besonderen Falle, und ebenso das etwaige Vorhandensein der algebraischen Summirbarkeit einer solchen Reihe von der Erfüllung gewisser Bedingungen abhängen, welche aufzusuchen und näher zu betrachten es wohl der Mühe werth sein dürfte. Zwischen die beiden eben angedeuteten Aufgaben drängen sich gleichsam als Uebergang von der einen zur anderen zwei neue Aufgaben ein, welche, wenn gleich vielleicht von minderer Wichtigkeit als die früheren, doch immerhin nicht ganz unerheblich werden befunden werden. Demnach sollen nunmehr vier Aufgaben vorgelegt und ihre Lösung versucht werden, nämlich die Bedingungen aufzusuchen, deren Erfüllung entweder nothwendig oder doch hinreichend ist, damit eine nach §. 47. hervorgehende oder die in §. 51. aufgezählten Eigenschaften besitzende unendliche Reihe entweder

1. überhaupt analytisch summirbar, oder
2. analytisch summirbar, jedoch mit Ausschluss aller Kreis- oder der gleichgeltenden Exponential-Funktionen, ferner
3. analytisch summirbar, mit Ausschluss der Logarithmen, endlich
4. algebraisch summirbar sei.

Hoffentlich wird man es nicht unangemessen finden, wenn bei der Behandlung dieser Aufgaben hauptsächlich nur der einfachste Fall in's Auge gefasst wird, in welchem die Anfangszahlen und Differenzen aller einzelnen harmonischen Reihen, mögen sie nun, wie in §. 50. angenommen wurde, unmittelbar gegeben, oder nach §. 51. erst aus dem gegebenen allgemeinen Gliede abzuleiten sein, rationale oder eigentlich ganze Zahlen sind. Durch diese Beschränkung auf den am häufigsten vorkommenden und desshalb nützlichsten Fall soll jede unnöthige Weitläufigkeit hintangehalten werden, während man doch daraus hinlänglich zu erkennen im Stande sein wird, wie man auch in den anderen Fällen, wenn sie wirklich vorkommen sollten, zu verfahren habe, um zur Lösung der nämlichen Aufgaben zu gelangen.

§. 54.

Die Auflösung aller so eben vorgelegten Aufgaben ist ausserordentlich einfach.

Bei jeder von diesen Aufgaben wird gefordert, dass eine oder mehrere von den Zahlen, welche im Allgemeinen in dem Summenausdrucke des §. 49. vorkommen können, aus demselben hinwegfallen sollen, nämlich bei der Aufgabe 1. das Wegfallen aller harmonischen Konstanten, bei 2. und 3. noch überdiess das Hinwegfallen entweder der Kreisfunktionen oder der Logarithmen, bei 4. endlich aller beider eben genannten Funktionsformen. Nun kann das Verschwinden einer Zahl aus einem Ausdrucke nur dadurch herbeigeführt werden, erfolgt aber dann auch gewiss, wenn der Koeffizient jener Zahl gleich 0 wird. Man braucht daher zur Lösung einer jeden von den obigen Aufgaben nichts weiter zu thun, als den Koeffizienten jeder einzelnen Zahl, welche hinwegfallen soll, im Allgemeinen zu bestimmen und gleich 0 zu setzen. Dadurch erhält man für das Verschwinden einer jeden Zahl eine Bedingungsgleichung und der Inbegriff aller dieser Gleichungen ist dann der Ausdruck der Bedingungen, deren Erfüllung nothwendig und zugleich hinreichend ist, um der vorgelegten Aufgabe Genüge zu leisten.

Man sieht hieraus sogleich, dass zur Auflösung der Aufgabe 1. die Erfüllung der geringsten Anzahl von Bedingungsgleichungen nothwendig ist, dass bei 2. und 3. zu den vorhergehenden noch eine oder mehrere neue Bedingungsgleichungen hinzukommen müssen, endlich die Aufgabe 4. durch die gleichzeitige Erfüllung aller zu 1., 2. und 3. als nothwendig erkannten Bedingungen gelöst werde.

Dieses eben in seinen allgemeinen Umrissen erklärte Verfahren ist zu einfach, um einer weitläufigeren Auseinandersetzung zu bedürfen. Beispiele hiezu sollen bei Erörterung der einzelnen Aufgaben beigebracht werden.

§. 55.

Was die Anwendung der vorhergehenden Methode insbesondere auf die erste in §. 53. vorgelegte Aufgabe betrifft, kann dabei zunächst die Frage aufgeworfen werden, wie viele Bedingungsgleichungen in jedem Falle zu erfüllen seien, um eine durch die Formel des §. 49. gefundene Summirung in eine analytische im Sinne des §. 53. zu verwandeln, d. h. alle harmonischen Konstanten daraus verschwinden zu machen. Hiebei zeigt sich sogleich die Nothwendigkeit der in §. 30. aufgestellten Unterscheidung zwischen den primären und sekundären harmonischen Konstanten. Denn anstatt der letzteren können durchgängig ihre Werthe, ausgedrückt durch die primären, mit Beihilfe bestimmter analytischer Funktionen, in der Summenformel des §. 49. substituirt werden, wonach man nur nöthig hat, für jede einzelne noch vorkommende primäre Konstante die zu ihrem Wegfallen erforderliche Bedingungsgleichung aufzustellen, um durch deren Erfüllung die Summe zu einer analytischen zu machen. Hieraus ist klar, dass die Anzahl der zu dem angeführten Zwecke nothwendigen besonderen Bedingungsgleichungen niemals grösser ist, als die Zahl der primären Konstanten, welche im gegebenen Falle die Summenformel des §. 49. enthält, wozu allerdings noch die allgemeine Bedingungsgleichung des §. 48. hinzu kommt, von der die Konvergenz und daher die Summirbarkeit der Reihe überhaupt abhängt.

Die so eben ihrer Zahl nach bestimmten, zur Herbeiführung der analytischen Summirbarkeit einer Reihe geeigneten Bedingungsgleichungen sind insoferne auch alle nothwendig, dass keine von ihnen unerfüllt bleiben darf, weil sonst die Reihe entweder überhaupt nicht oder doch nicht analytisch summirbar sein würde. Dadurch ist jedoch die Möglichkeit keineswegs ausgeschlossen, dass die nach der angegebenen Vorschrift aufgestellten Bedingungsgleichungen nicht sämmtlich von einander unabhängig seien, sondern vielleicht eine oder mehrere von ihnen nur Folgerungen aus den übrigen darstellen, in welchem Falle auch eine geringere Anzahl von Bedingungsgleichungen, als der vorhergehende Satz ausspricht, zur Herbeiführung der analytischen Summirbarkeit für die vorgelegte Reihe genügen würde.

Hiebei muss auf eine mit der gegenwärtigen Untersuchung im Zusammenhange stehende **Thatsache** aufmerksam gemacht werden, welche, wenn sie auch strenge genommen nichts beweist, doch immerhin auffallend genug ist, um sich zu einem Versuche ihrer Erklärung veranlasst zu fühlen.

Wie man aus den vorausgegangenen Berechnungen der harmonischen Konstanten für ganze Anfangszahlen und Differenzen sieht, ist die Konstante $\underset{1|1}{C}$ die einzige primäre, welche bei einigen, und zwar gerade den kleinsten und daher am häufigsten zur Anwendung kommenden, Differenzen in den Werthen der zugehörigen Konstanten enthalten ist. Man könnte sich für berechtigt halten, hieraus schliessen zu dürfen, dass es eine grosse Anzahl von Reihen, die nach der Formel des §. 49. sich summiren lassen, geben werde, deren Summen man durch $\underset{1|1}{C}$, und zwar mit Ausschluss jeder anderen harmonischen Konstante, darzustellen im Stande sei. Diess ist jedoch keineswegs der Fall. Denn ungeachtet man den Werth von $\underset{1|1}{C}$ schon seit langer Zeit kennt, hat doch bisher keiner der ausgezeichnet scharfsinnigen Männer, welche sich mit der Summirung solcher Reihen beschäftiget haben, auch nur eine einzige nach §. 49. summirbare Reihe aufzufinden vermocht, deren Summe durch $\underset{1|1}{C}$ ausgedrückt werden könnte. Auch die beiden in §. 52. angeführten Beispiele zeigen, dass in der einen Summe $\underset{1|1}{C}$ gar nicht vorkommt, in der andern hingegen ist zwar $\underset{1|1}{C}$ enthalten, jedoch nicht für sich allein, sondern in Begleitung noch einer anderen primären harmonischen Konstante, nämlich von $\underset{1|12}{C}$. Sogar gegenwärtig, nachdem vermöge des Vorhergehenden die Werthe aller harmonischen Konstanten entweder bereits bekannt sind oder leicht berechnet werden können, wird man sich vergebens bemühen, eine Reihe zu finden, deren Summe durch $\underset{1|1}{C}$ ohne Beimengung einer andern harmonischen Konstante nach §. 49. ausgedrückt werden könnte, man wird sich vielmehr überzeugen, dass in jedem einzelnen Falle entweder $\underset{1|1}{C}$ aus der Summe ganz verschwindet, oder mit ihr zugleich noch eine andere primäre harmonische Konstante darin zurückbleibt. Dieser bemerkenswerthe Umstand deutet offenbar darauf hin, dass es mit derjenigen Bedingungsgleichung, durch deren Erfüllung das Wegfallen der Konstante $\underset{1|1}{C}$ aus der Summenformel des §. 49. herbei-

geführt werden soll, eine besondere Bewandtniss haben müsse, welche aufzusuchen um so mehr der Mühe werth sein dürfte, weil daraus zugleich einige nicht unwichtige Folgerungen sich ergeben werden.

§. 56.

Um zu dem eben ausgesprochenen Ziele zu gelangen, denke man sich jede einzelne harmonische Konstante $\underset{a|d}{C}$ in zwei Theile zerlegt, deren Einer $\frac{1}{d}.\underset{1|1}{C}$ sein, der andere hingegen durch $\underset{a|d}{K}$ bezeichnet werden mag, so dass

$$\text{I.}\quad \underset{a|d}{C} = \frac{1}{d}.\underset{1|1}{C} + \underset{a|d}{K}$$

und umgekehrt

$$\text{II.}\quad \underset{a|d}{K} = \underset{a|d}{C} - \frac{1}{d}.\underset{1|1}{C}$$

ist. Der erste Theil ist, wie man sieht, nicht von a, sondern nur von d abhängig, während der andere eben so wie $\underset{a|d}{C}$ selbst eine Funktion von a und d ist, welche in der Folge kurzweg als die zur harmonischen Konstante $\underset{a|d}{C}$ gehörige Zahl K benannt werden wird, wobei noch zu bemerken ist, dass jede solche Zahl K eine primäre oder sekundäre heissen soll, je nachdem sie zu einer primären oder zu einer sekundären harmonischen Konstante gehört.

Die Gleichung II. zeigt, wie aus jeder bekannten harmonischen Konstante $\underset{a|d}{C}$ der Werth der zugehörigen Zahl $\underset{a|d}{K}$ auf höchst einfache Weise gefunden werden kann. Insbesondere aber ergibt sich daraus, wenn $a = d = 1$ angenommen wird, die für das Nachstehende wichtige Folgerung

$$\text{III.}\quad \underset{1|1}{K} = \underset{1|1}{C} - \frac{1}{1}.\underset{1|1}{C} = 0.$$

Die Formel I. kann dazu benützt werden, eine jede gegebene Gleichung, in welcher eine oder mehrere harmonische Konstanten vorkommen, durch die Substitution der Werthe derselben in eine andere umzuwandeln, in welcher jene Konstanten nicht mehr, sondern dafür die ihnen zugehörigen Zahlen K, und zwar stets mit den nämlichen Koeffizienten und Vorzeichen versehen, welche

früher die harmonischen Konstanten hatten, an deren Stelle die Zahlen K getreten sind, erscheinen, wozu im Allgemeinen allerdings noch Glieder mit dem Faktor $C_{1|1}$ kommen können.

Wendet man nun das erklärte Substitutionsverfahren auf die sämmtlichen, in den §§. 18. bis 26. aufgestellten Gleichungen an, so wird man sich durch eine Rechnung, die zu einfach ist, um nöthig zu haben, sie ausführlich hieher zu setzen, leicht überzeugen, dass auf diese Weise neue Gleichungen zum Vorscheine kommen, deren jede einzelne von der früheren, aus welcher sie hergeleitet wurde, nur allein dadurch sich unterscheidet, dass an die Stelle des früheren Zeichens C nunmehr das Zeichen K getreten ist, indem die Glieder mit dem Faktor $C_{1|1}$ überall gegenseitig unter einander sich aufheben, wesshalb in keiner von diesen neuen Gleichungen ein solches Glied vorhanden ist. Als eine nothwendige Folge aus der eben bemerkten Eigenschaft wird man erkennen, dass eben so, wie aus den Gleichungen der §§. 18. bis 26. alle zwischen den **harmonischen Konstanten** bestehenden Relationen, mittelst welcher die sekundären aus ihnen auf die primären sich zurückführen lassen, abgeleitet wurden, nun auch mit Hilfe der neuen Gleichungen zwischen den sekundären und primären Zahlen K die ganz gleichen Relationen sich ergeben müssen, welche sich von den früheren nur dadurch unterscheiden können, dass die beiden Zeichen C und K unter einander verwechselt sind.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen kann unmittelbar zur Summenformel des §. 49. übergegangen und auch in derselben die Einführung der Zahlen K an die Stelle der harmonischen Konstanten durch die Formel I. vollzogen werden. Man wird auf diesem Wege finden, wenn x den in §. 49. angenommenen Werth beibehält:

$$x = A.(K_{a|d} + \frac{1}{d}.C_{1|1}) + A_1.(K_{a_1|d_1} + \frac{1}{d_1}.C_{1|1}) + A_2.(K_{a_2|d_2} + \frac{1}{d_2}.C_{1|1}) + \ldots,$$

oder nach gehöriger Absonderung der Glieder:

$$x = A.K_{a|d} + A_1.K_{a_1|d_1} + A_2.K_{a_2|d_2} + A_3.K_{a_3|d_3} + \ldots$$
$$+ \left[\frac{A}{d} + \frac{A_1}{d_1} + \frac{A_2}{d_2} + \frac{A_3}{d_3} + \ldots\right].C_{1|1},$$

oder endlich, weil hier der Koeffizient von $C_{1|1}$ wegen der Bedin-

gungsgleichung I. des §. 48. nothwendig gleich 0 sein muss, wodurch dieses Glied von selbst wegfällt,

$$\text{IV.}\quad x = A.\underset{a|d}{K} + A_1.\underset{a_1|d_1}{K} + A_2.\underset{a_2|d_2}{K} + A_3.\underset{a_3|d_3}{K} + \ldots.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit jenem des §. 49. zeigt sogleich, dass beide durch Vertauschung der Zeichen C und K vollständig in einander übergehen. Die nämliche Eigenschaft muss aber den beiden Ausdrücken auch dann noch verbleiben, wenn in jedem derselben alle vorkommenden sekundären Konstanten und Zahlen K auf ihre entsprechenden primären zurück geführt werden, weil diese Zurückführung, wie früher gezeigt wurde, durch vollkommen übereinstimmende Relationen bewerkstelligt wird. Hieraus folgt dann, dass nach geschehener solcher Umänderung die Bedingungsgleichungen, durch deren Erfüllung aus der Summe I. des §. 49. alle primären harmonischen Konstanten wegfallen müssen, zugleich aus dem obigen umgeänderten Ausdrucke IV. alle primären Zahlen K verschwinden machen und umgekehrt. Betrachtet man nun zunächst diesen letzteren Ausdruck, so sieht man sogleich, dass aus demselben die Zahl $\underset{1|1}{K}$ schon vermöge ihres vorhin in III. erwiesenen Werthes 0 von selbst verschwinden müsse, ohne dass es hiezu der Erfüllung irgend einer besonderen Bedingung bedarf. Stellt man daher nur so viele und solche Bedingungsgleichungen auf, durch welche das Hinwegfallen aller übrigen primären Zahlen K mit Uebergehung von $\underset{1|1}{K}$ aus der Formel IV. herbeigeführt werden kann, und leistet denselben Genüge, so müssen auf diese Art die sämmtlichen Zahlen K aus der Summe verschwinden und diese letztere im Sinne des §. 53. eine analytische werden. Durch die Erfüllung der nämlichen Bedingungen fallen nach dem Erwiesenen zugleich aus der umgeänderten Formel I. des §. 49. alle übrigen primären harmonischen Konstanten mit alleiniger Ausnahme von $\underset{1|1}{C}$ nothwendig weg, so dass nur diese letztere für sich allein in dem Summenausdrucke zurück bleiben könnte. Diess ist jedoch desshalb nicht möglich, weil dann, wenn es der Fall wäre, die gefundene Summe der Reihe keine analytische sein würde, was sie doch wirklich sein muss, wie aus der vorhergehenden Betrachtung des Ausdruckes IV. bereits erkannt worden ist. Demnach muss unter den gegebenen Bedingungen die Konstante $\underset{1|1}{C}$ aus der Summenformel des §. 49. jederzeit von selbst wegfallen, ohne dass

es hiezu der Erfüllung noch einer weiteren besonderen Bedingungsgleichung bedarf. Diess gibt folgenden bemerkenswerthen Satz: Zur Bewirkung der analytischen Summirbarkeit einer Reihe durch die Summenformel des §. 49. genügt es, nur so viele und solche Bedingungsgleichungen aufzustellen und ihnen zu entsprechen, wie viele und welche nebst der allgemeinen des §. 48. erforderlich sind, um nach Zurückführung aller sekundären harmonischen Konstanten auf die primären diese letzteren sämmtlich, mit alleiniger Ausnahme von $C_{1|1}$, aus der Summe verschwinden zu machen.

Man sieht hieraus, dass es niemals nöthig ist, eine eigenthümliche Bedingungsgleichung aufzustellen, um durch deren Erfüllung die Konstante $C_{1|1}$ aus der nach §. 49. zu bestimmenden Summe in Wegfall zu bringen, indem diess schon durch diejenigen Bedingungsgleichungen, welche das Verschwinden aller übrigen primären harmonischen Konstanten aus der Summe herbei zu führen geeignet sind, in Verbindung mit der allgemeinen Bedingungsgleichung des §. 48. von selbst bewerkstelliget wird.

Zugleich erklärt das eben Gesagte vollkommen, aus welchem Grunde bisher Niemand im Stande war, eine nach §. 49. summirbare Reihe aufzufinden, deren Summe lediglich durch $C_{1|1}$ ohne Beimengung einer anderen harmonischen Konstante sich ausdrücken lässt, weil nämlich stets, wenn in der Formel des §. 49. die Konstante $C_{1|1}$ vorkommen soll, zugleich noch eine oder mehrere andere primäre harmonische Konstanten darin enthalten sein müssen, da mit dem Wegfallen aller letzteren auch die erste von selbst verschwindet. Demnach gibt es keine nach §. 49. summirbare Reihe, deren Summe durch $C_{1|1}$ für sich allein dargestellt werden könnte, wesshalb es auch nicht möglich ist, eine solche Reihe zu finden. — Die Zahlen K sind hier nur zu dem Zwecke eingeführt worden, um mit ihrer Hilfe den vorstehenden Satz allgemein beweisen zu können. Es ist aber leicht zu erkennen, dass dieselben vermöge der Formel IV. auch zur Summirung der Reihen zu benützen seien, ja sie sind überhaupt geeignet, die Stelle der harmonischen Konstanten in allen Fällen vollkommen zu vertreten. Da jedoch jene Zahlen aus den Reihen des §. 10. nicht unmittelbar hervorgehen, sondern erst aus den dort definirten harmonischen Konstanten sich herleiten lassen; da ferner durch jene Zahlen mit Ausnahme der eben geführten Deduction schwer-

lich irgend etwas geleistet werden kann, was nicht auch durch die harmonischen Konstanten mit gleicher Leichtigkeit sich ergeben würde: so soll zur Vermeidung jeder unnöthigen Weitläufigkeit fernerhin kein weiterer Gebrauch davon gemacht werden.

§. 57.

Die einfachste und zugleich bemerkenswertheste Folgerung aus dem eben bewiesenen allgemeinen Gesetze geht aus demselben dadurch hervor, wenn man annimmt, *alle einzelnen harmonischen Reihen der ersten Ordnung, aus welchen nach §. 47. eine neue Reihe gebildet werden soll, seien von solcher Beschaffenheit, dass in den Werthen der ihnen zugehörigen Konstanten keine andere primäre vorkomme, als nur allein* $C_{1|1}$. In einem solchen Falle kann vermöge §. 56. zum Behufe der analytischen Summirbarkeit der Reihe auch *keine besondere Bedingungsgleichung* zu erfüllen nothwendig sein, sondern wird hiezu schon die allgemeine Gleichung des §. 48. für sich allein genügen. Wie man aus den in den §§. 31., 32., 33., 34. und 36. vorgenommenen Berechnungen entnimmt, trifft die eben ausgesprochene Voraussetzung bei den sämmtlichen harmonischen Reihen der ersten Ordnung wirklich ein, deren Anfangszahlen ganze Werthe besitzen und deren Differenzen 1, 2, 3, 4 oder 6 sind. Demnach ergibt sich hieraus der sehr umfassende Satz: *Alle aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung nach Anleitung des §. 47. hervorgehenden unendlichen Reihen sind ohne Ausnahme analytisch summirbar, sobald die einzelnen Reihen durchgängig ganze Anfangszahlen und keine anderen Differenzen als 1, 2, 3, 4 oder 6 besitzen und die zu summirende Reihe selbst nach §. 48. konvergent ist.*

Dieser Satz kann in Gemässheit dessen, was in §. 51. angeführt wurde, offenbar auch auf folgende Weise ausgedrückt werden: *Jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion der Stellenzahl n ist, wird stets analytisch summirbar sein, sobald der Zähler wenigstens um zwei Grade niedriger ist als der Nenner, und letzterer sich in ein Produkt aus durchgängig von einander verschiedenen Faktoren von den Formen: $n+a$, $2n+a_1$, $3n+a_2$, $4n+a_3$ und $6n+a_4$ zerlegen lässt, wo a, a_1, a_2, a_3 und a_4 beliebige ganze, übrigens additive oder subtraktive Zahlen bedeuten*

mögen, nur darf im letzteren Falle keiner der Faktoren gleich 0 werden können.

Durch diese Gesetze ist man im Stande, mit Leichtigkeit eine unbeschränkte Anzahl von analytisch summirbaren Reihen der mannigfaltigsten Art aufzustellen und ihre Summen nach §. 49. zu finden, von welchen bis jetzt nur einige wenige der einfachsten wirklich summirt worden sind. Den ganzen Umfang dieser Sätze scheint man bisher noch nicht erkannt zu haben.

§. 58.

Nachdem so eben die Fälle, in welchen die Aufstellung einer besonderen Bedingungsgleichung für die analytische Summirbarkeit ganz entfällt, ausgeschieden wurden, soll nunmehr zur wirklichen Aufstellung derselben in jenen Fällen, wenn sie nothwendig sich zeigt, geschritten werden. Um jedoch diese Aufstellung im Allgemeinen kurz und deutlich vornehmen zu können, muss vorher eine bisher nicht gebrauchte Bezeichnungsart eingeführt werden, welche nicht nur hier den angegebenen Zweck zu erreichen sehr geeignet sich zeigen wird, sondern auch bei den nachfolgend zur Behandlung kommenden Aufgaben den gleichen Dienst zu leisten vermag.

Werden von einer gegebenen wie immer grossen Anzahl von harmonischen Reihen, welche durchgängig gleiche Differenzen und ganze Anfangszahlen und Differenzen besitzen, nur diejenigen besonders hervorgehoben, bei welchen die Anfangszahl getheilt durch die Differenz einen bestimmten Rest r gibt, so soll die Summe aller diesen Reihen zukommenden Faktoren durch

$$F_r$$

bezeichnet werden, wobei r stets als additiv und kleiner als die Differenz d angenommen werden kann und soll. Demnach bezeichnet F_0 die Faktorensumme jener Reihen, deren Anfangszahlen durch d theilbar oder von der Form dn sind, hingegen F_1, F_2, F_3, ... F_{d-1} die Faktorensummen jener Reihen, deren Anfangszahlen den Formen $dn+1$, $dn+2$, $dn+3$,...., $dn+d-1$ angehören. Die Anzahl dieser Summen kann offenbar niemals grösser als d sein, zugleich aber lässt sich immer annehmen, dass diese d Summen wirklich vorhanden seien, wenn man nur die etwa abgängigen durch 0 ersetzt sich vorstellt. Noch muss bemerkt werden, dass mit Hilfe dieser neuen Bezeichnung die Bedingungsgleichung II. des §. 48. auch auf folgende Art sich ausdrücken lässt:

$$\text{I.}\quad F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{d-1} = 0.$$

Die Anwendung dieser Bezeichnungen ist zwar allerdings auf Reihen mit gleichen Differenzen und ganzen Anfangszahlen und Differenzen beschränkt, allein es ist auch bereits zu wiederholten Malen erinnert worden, dass diese Beschaffenheit der Reihen ohne Schwierigkeit hergestellt werden kann, sobald nur alle Anfangszahlen und Differenzen rationale Werthe haben.

§. 59.

Zur grösseren Deutlichkeit des einzuschlagenden Verfahrens bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die analytische Summirbarkeit der durch die Formel des §. 49. überhaupt summirbaren Reihen soll hier anstatt allgemeiner Betrachtungen vielmehr ein bestimmter Fall vorgenommen werden, und zwar unter Voraussetzung der kleinsten Differenz, bei welcher die Erfüllung einer besonderen Bedingungsgleichung zu dem angegebenen Zwecke erforderlich ist, nämlich der Differenz 5.

Seien demnach die Bedingungsgleichungen aufzufinden, deren Erfüllung nothwendig und auch zureichend ist, um eine aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit der gleichen Differenz 5 und durchgängig ganzen Anfangszahlen nach Anleitung des §. 47. entspringende neue Reihe analytisch summirbar zu machen. — Dass hiezu jedenfalls die Gleichung II. des §. 48. oder in veränderter Form I. des §. 58. erfordert werde, ist ohnehin klar, weil hievon die Konvergenz der neuen Reihe abhängt, ohne welche die Summenformel des §. 49. gar nicht angewendet werden dürfte. Unter der Voraussetzung der Richtigkeit jener Gleichung wird dann die Summe der Reihe durch

$$\text{I.}\quad A.\underset{1|5}{C} + A_1.\underset{2|5}{C} + A_2.\underset{3|5}{C} + A_3.\underset{4|5}{C} + A_4.\underset{5|5}{C} + A_5.\underset{6|5}{C} + \ldots$$

ausgedrückt gefunden. Betrachtet man nun die Werthe der hierin enthaltenen Konstanten, wie sie für die kleineren Anfangszahlen in §. 35. ausdrücklich angesetzt sind, für die grösseren Anfangszahlen aber leicht daraus hergeleitet werden können, so wird man sogleich sehen, dass darin ausser $\underset{1|1}{C}$, welche Zahl nach §. 56. nicht berücksichtiget zu werden braucht, nur noch die einzige primäre Konstante $\underset{1|5}{C}$ vorkomme, wesshalb auch nur eine einzige besondere Bedingungsgleichung erforderlich ist, um durch deren Erfüllung $\underset{1|5}{C}$ aus der Gesammtsumme verschwinden und

hiedurch die letztere zu einer analytischen im Sinne des §. 53. zu machen. Aus §. 35. zeigt sich ferner, dass in der Summe I. die Konstante $\underset{1|5}{C}$ in den ersten 5 Gliedern beziehungsweise die Koeffizienten

$$A, \quad -A_1, \quad -A_2, \quad A_3, \quad 0$$

erhalten müsse, da wegen $\underset{5|5}{C} = \frac{1}{5} \cdot \underset{1|1}{C}$ im 5ten Gliede die Konstante $\underset{1|5}{C}$ gar nicht erscheint. In den folgenden 5 Gliedern werden offenbar die Koefizienten von $\underset{1|5}{C}$ nach der Ordnung

$$A_5, \quad -A_6, \quad -A_7, \quad A_8, \quad 0,$$

und dann ferner

$$A_{10}, \; -A_{11}, \; -A_{12}, \; A_{13}, \; 0, \text{ u. s. f.}$$

sein. Alle diese Koeffizienten zusammen genommen müssen gleich 0 gesetzt werden, wenn $\underset{1|5}{C}$ aus I. verschwinden soll. Nun ist aber vermöge der in §. 58. eingeführten Bezeichnungsart

$$\begin{aligned}
A + A_5 + A_{10} + \ldots &= F_1 \\
A_1 + A_6 + A_{11} + \ldots &= F_2 \\
A_2 + A_7 + A_{12} + \ldots &= F_3 \\
A_3 + A_8 + A_{13} + \ldots &= F_4 \\
A_4 + A_9 + A_{14} + \ldots &= F_0,
\end{aligned}$$

daher ergibt sich auf der Stelle die besondere Bedingungsgleichung

$$\text{II.} \quad F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 0$$

die, mit der allgemeinen I. des §. 58., welche letztere für $d=5$ die Form

$$\text{III.} \quad F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$$

erhält, vereinigt, nothwendig und zugleich hinreichend ist, um durch deren Erfüllung die Summe der Reihe in eine analytische zu verwandeln. Man erkennt hieraus leicht, dass stets 3 von den angesetzten Faktorensummen ganz willkürlich angenommen werden dürfen und nur die 2 übrigen so bestimmt werden müssen, dass sie den beiden Gleichungen II. und III. Genüge leisten, was selbstverständlich durch die Auflösung der letzteren erreicht wird.

Um dieses sehr weit umfassende Beispiel etwas enger zu begränzen, nehme man an, dass dabei keine Reihe vorhanden sei, deren Anfangszahl grösser ist als die Differenz 5. Dadurch

fallen in der Summe I. alle Glieder nach dem 5ten weg, und man hat offenbar

$$F_0 = A_4,\quad F_1 = A,\quad F_2 = A_1,\quad F_3 = A_2,\quad F_4 = A_3,$$

Werthe, durch deren Substitution die Gleichungen II. und III. in

$$\text{IV.}\quad A - A_1 - A_2 + A_3 = 0$$

und

$$\text{V.}\quad A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

übergehen. Wünscht man hierin die 3 Faktoren A, A_1 und A_2 willkürlich anzunehmen, so findet man durch Auflösung eben dieser Gleichungen

$$A_3 = A_1 + A_2 - A \quad \text{und} \quad A_4 = -2(A_1 + A_2).$$

Dass für diese gefundenen Werthe die Summe I. wirklich eine analytische werde, davon kann man sich leicht überzeugen. Denn substituirt man in I. nicht nur die eben erhaltenen, sondern zugleich anstatt $\underset{2|5}{C}$, $\underset{3|5}{C}$, $\underset{4|5}{C}$ ihre Werthe aus §. 35. und überdiess $\frac{1}{5}.\underset{1|1}{C}$ anstatt $\underset{5|5}{C}$ mit Hinweglassung aller auf das 5te folgenden Glieder, so erhält man daraus nach vorgenommener Abkürzung

$$\text{VI.}\quad \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2).l5 + (A - A_1).\frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)} + (A - A_2.)\frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)},$$

welcher Ausdruck keine harmonische Konstante enthält, und daher die Summe wirklich als eine analytische im Sinne des §. 53. darstellt.

Die vorhergehende Ableitung hat aber nicht nur die analytische Summirbarkeit vorhinein nachgewiesen, sondern es geht daraus zugleich hervor, dass aus den 5 Reihen $\underset{1|5}{S}$, $\underset{2|5}{S}$, $\underset{3|5}{S}$, $\underset{4|5}{S}$ und $\underset{5|5}{S}$ überhaupt keine andere analytisch summirbare Reihe nach §. 47. gebildet werden könne, als nur diejenigen, welche den aufgestellten Bedingungsgleichungen entsprechen, deren Summen demnach in der letzten Formel als einzelne Fälle enthalten sind.

Das allgemeine Glied der eben summirten Reihe ergibt sich durch die Zusammenziehung der allgemeinen Glieder der einzelnen Reihen mit Beifügung der ihnen zugehörigen Faktoren:

$$\text{VII.}\quad \frac{\left\{\begin{array}{c}125n^3(3A + 4A_1 + 3A_2) - 125n^2(3A + 6A_1 + 5A_2) \\ + 10n(9A + 34A_1 + 32A_2) - 48(A_1 + A_2)\end{array}\right\}}{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)5n},$$

aus welchem man durch willkürliche Annahme der Werthe von A, A_1 und A_2 eine unbeschränkte Anzahl von analytisch summirbaren Reihen herzuleiten vermag.

Noch verdient bemerkt zu werden, dass in den vorstehenden Formeln auch diejenigen Fälle eingeschlossen sind, in welchen **nicht alle**, sondern **nur einige** der angesetzten Reihen vorkommen, weil man in einem solchen Falle nur die Faktoren oder Faktorensummen der abgängigen Reihen einzeln gleich 0 anzunehmen nöthig hat. Wollte man z. B. nur aus den 3 Reihen $\underset{1|5}{S}$, $\underset{3|5}{S}$, $\underset{5|5}{S}$ eine analytisch summirbare Reihe nach §. 47. herleiten, so muss $A_1=0$ und $A_3=0$ gesetzt werden. Hiedurch gehen die Bedingungsgleichungen IV. und V. in $A-A_2=0$ und $A+A_2+A_4=0$ über, aus welchen $A_2=A$ und $A_4=-2A$ folgt. Durch die Substitution dieser Werthe verwandelt sich das allgemeine Glied VII. in

$$\frac{750An^3-1000An^2+410An-48A}{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)5n}=2A\cdot\frac{15n-8}{(5n-4)(5n-2)5n}$$

und die Summe VI. in

$$\tfrac{1}{2}A\,l5+A\cdot\frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}=2A\cdot\left[\frac{l5}{4}+\frac{\pi}{10}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}\right].$$

Man sieht hieraus nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Faktors $2A$, dass aus den **drei harmonischen Reihen** $\underset{1|5}{S}$, $\underset{3|5}{S}$, $\underset{5|5}{S}$ **eigentlich nur eine einzige analytisch summirbare Reihe sich ableiten lasse**, deren allgemeines Glied

$$\frac{15n-8}{(5n-4)(5n-2)5n},$$

und ihre Summe

$$\frac{l5}{4}+\frac{\pi}{10}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$$

ist.

§. 60.

Zur Auflösung der **zweiten** in §. 53. vorgelegten Aufgabe ist es, wie bereits in §. 54. gesagt wurde, nothwendig, zu denjenigen Bedingungsgleichungen, durch deren Erfüllung die **analytische** Summirbarkeit der zu summirenden Reihe herbeigeführt wird, noch jene hinzu zu fügen, welche das Wegfallen **aller Kreisfunktionen** aus der Summenformel zu bewirken geeignet

sind. Nachdem im Vorhergehenden von der Aufsuchung der ersteren mit einiger Ausführlichkeit gehandelt wurde, wird man sich leicht überzeugen, dass auch die letzteren auf ganz gleiche Weise sich finden und mit Hilfe der in §. 58. erklärten Bezeichnungen ebenso einfach darstellen lassen, ohne dass es nöthig sein wird, in grössere Weitläufigkeit hierüber sich einzulassen. Desshalb wird es genügen, das Verfahren nur auf das bereits in §. 59. beigebrachte Beispiel anzuwenden.

Aus §. 35. erkennt man, dass die dem Kreise angehörige Zahl π bei der Differenz 5 nur in den Konstanten jener Reihen vorkomme, deren Anfangszahlen von den Formen $5n+2$, $5n+3$ oder $5n+4$ sind und zwar beziehungsweise mit den Konffizienten

$$\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)},\quad \frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)},\quad -\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

behaftet. Hieraus ergibt sich für das Verschwinden der Zahl π aus der Summenformel I. des §. 59. auf der Stelle die Bedingungsgleichung

$$F_2.\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}+F_3.\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}-F_4.\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}=0,$$

welche sich auch auf die einfachere Form

$$\text{I.}\quad F_2.\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}+F_3.\frac{(3-\sqrt{5})}{2}-F_4=0$$

bringen lässt. Der eben gefundenen, sowie zugleich den Gleichungen II. und III. des §. 59. muss Genüge geleistet werden, wenn die Summirung der Reihe analytisch sein und ohne Beiziehung der Zahl π erfolgen soll. Insbesondere für die auf Reihen, deren Anfangszahlen nicht grösser als 5 sind, beschränkte Aufgabe gehen diese 3 Bedingungsgleichungen in IV. und V. des §. 59. und

$$A_1.\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}+A_2.\frac{(3-\sqrt{5})}{2}-A_3=0$$

über, aus welchen man, wenn für A und A_1 willkürliche Werthe angenommen werden,

$$A_2=A.\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}-A_1.\frac{(\sqrt{5}-1)}{2},$$

$$A_3=A.\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}+A_1.\frac{(3-\sqrt{5})}{2},$$

$$A_4=-A.(\sqrt{5}+1)-A_1.(3-\sqrt{5}),$$

dann ferner das allgemeine Glied der Reihe durch

$$\frac{A}{5n-4}+\frac{A_1}{5n-3}+\frac{A_2}{5n-2}+\frac{A_3}{5n-1}+\frac{A_4}{5n}$$

und die Summe derselben vermöge VI. in §. 59. durch

$$\left(A.\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}+A_1.\frac{(3-\sqrt{5})}{4}\right).l5$$

ausgedrückt erhält. Letztere ist, wie man sieht, wirklich mit Ausschluss der Zahl π lediglich durch Logarithmen dargestellt.

Das eben angeführte allgemeine Glied könnte offenbar nach Substitution der Werthe von A_2, A_3, A_4 in Einen Bruch zusammen gezogen werden, der aber wegen seiner Weitläufigkeit hier nicht angesetzt werden soll.

Bei dieser Aufgabe verdient noch folgende Bemerkung kurz hervorgehoben zu werden.

Durch die Betrachtung der in §. 31. und §. 32. angeführten harmonischen Konstanten erkennt man, dass in den Werthen der letzteren bei den Differenzen 1 und 2 eine Kreisfunktion gar nicht vorkomme. Hieraus folgt sogleich, dass jede nach §. 47. entspringende unendliche Reihe ohne irgend eine besondere Bedingung analytisch mit Ausschluss aller Kreisfunktionen sich summiren lasse, sobald alle einzelnen Reihen ganze Anfangszahlen und keine anderen Differenzen als 1 oder 2 besitzen und die Reihe überhaupt nach §. 48. summirbar ist.

§. 61.

Einen besonderen Fall, in welchem einige aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung nach §. 47. entstehende neue Reihen sich ausschliesslich durch Logarithmen und zwar auf höchst einfache Weise summiren lassen, hat bereits Euler gefunden. Es bleibt nun zu zeigen, wie leicht die Euler'sche Formel aus den vorhergehenden Sätzen abgeleitet werden könne, wobei dieselbe zugleich eine kleine Erweiterung erlangen wird.

Zieht man von der Gleichung I. des §. 22. die beiden gleichen Werthe

$$m.\underset{ma|md}{C}=\underset{a|d}{C}$$

ab, so ergibt sich daraus

$$\underset{a|md}{C}+\underset{a+d|md}{C}+\underset{a+2d|md}{C}+\ldots+\underset{a+(m-1)d|md}{C}-m.\underset{ma|md}{C}=\frac{1}{d}.lm.$$

Hier drückt der auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehende Theil offenbar vermöge §. 49. die Summe der unendlichen Reihe

$$\underset{a|md}{S} + \underset{a+d|md}{S} + \underset{a+2d|md}{S} + \ldots + \underset{a+(m-1)d|md}{S} - m.\underset{ma|md}{S}$$

aus, weil dabei, wie man sich leicht überzeugt, der Bedingungsgleichung II. des §. 48. entsprochen ist. Man hat daher die Summirung

$$\text{I.}\quad \underset{a|md}{S} + \underset{a+d|md}{S} + \underset{a+2d|md}{S} + \ldots + \underset{a+(m-1)d|md}{S} - m.\underset{ma|md}{S} = \frac{1}{d}.lm.$$

Dieser Ausdruck ist schon desshalb bemerkenswerth, weil dabei die Zahl a, welche doch in allen einzelnen Gliedern der unendlichen Reihe enthalten ist, auf die Summe der ganzen Reihe keinen Einfluss ausübt. Der gleiche Umstand tritt übrigens bekanntlich auch bei einigen anderen unendlichen Reihen ein.

Wird ferner in der eben gefundenen Gleichung I. $a = d = 1$ angenommen, so geht dieselbe in

$$\underset{1|m}{S} + \underset{2|m}{S} + \underset{3|m}{S} + \ldots + \underset{m-1|m}{S} + \underset{m|m}{S} - m.\underset{m|m}{S} = lm,$$

oder, wenn man die beiden letzten Glieder linker Hand zusammen zieht und dann anstatt m den zur Bezeichnung der Differenz gewohnten Buchstaben d wieder einführt, in

$$\text{II.}\quad \underset{1|d}{S} + \underset{2|d}{S} + \underset{3|d}{S} + \ldots + \underset{d-1|d}{S} - (d-1).\underset{d|d}{S} = ld$$

über. Diess ist die von Euler gefundene Formel, in den hier eingeführten Zeichen ausgedrückt. Es versteht sich dabei von selbst, dass in II. der Buchstabe d, da er an die Stelle des früheren m getreten ist, eine ganze additive Zahl sein muss. Bei der umfassenderen Formel I. ist das Gleiche keineswegs der Fall, dort können vielmehr sowohl a als d auch beliebige andere Werthe besitzen.

Man darf übrigens nicht glauben, diese Formeln seien die einzigen, durch welche die Reihensummen mit Hilfe der Logarithmen in solcher Einfachheit ausgedrückt gefunden werden, wie es durch I. und II. wirklich der Fall ist. Ein einziges Beispiel wird genügen, die Möglichkeit anderer eben so einfacher Summirungen durch die Logarithmen zu zeigen. Setzt man nämlich in dem Beispiele des §. 60.

$$A = 3 - \sqrt{5}, \quad A_1 = 2,$$

so folgt daraus

$$A_2 = 0, \quad A_3 = \sqrt{5} - 1, \quad A_4 = -4.$$

Dadurch ergibt sich das allgemeine Glied der dortigen Reihe

$$\frac{3-\sqrt{5}}{5n-4}+\frac{2}{5n-3}+\frac{\sqrt{5}-1}{5n-1}-\frac{4}{5n}=\frac{25n^2(17-3\sqrt{5})-5n(71-9\sqrt{5})+48}{(5n-4)(5n-3)(5n-1)5n},$$

und die Summe derselben

$$\left[\frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{4}+2.\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right]l5=l5,$$

welcher Ausdruck die gleiche Einfachheit besitzt, wie die durch die Euler'sche Formel II. sich ergebenden Summen.

§. 62.

Die Auflösung der dritten in §. 53. angeführten Aufgabe bietet keine grösseren Schwierigkeiten dar, kann vielmehr auf ganz gleiche Weise bewerkstelliget werden, wie die vorhergehende. Desshalb wird es auch hier genügen, das Verfahren nur an dem Beispiele des §. 59. zu zeigen.

In den Werthen der zur Differenz 5 gehörigen harmonischen Konstanten kommt, wie man aus §. 35. erkennt, nur ein einziger Logarithmus vor, nämlich $l5$, und zwar bei jenen Konstanten, deren Anfangszahlen von den Formen $5n+2$ oder $5n+3$ sind, überall mit dem gleichen Koeffizienten $\frac{1}{4}$ versehen. Um daher aus der Reihensumme jenen Logarithmus verschwinden zu machen, braucht man nur zu den beiden bereits in §. 59. aufgestellten Bedingungsgleichungen die neue Gleichung

$$F_2.\tfrac{1}{4}+F_3.\tfrac{1}{4}=0 \quad \text{oder} \quad F_2+F_3=0$$

hinzu zu fügen, welche für den Fall, wenn man sich auf Reihen beschränkt, in denen keine Anfangszahl grösser ist als 5, in die Form

$$A_1+A_2=0$$

übergeht. In diesem letzteren Falle erhält man, wenn dabei A und A_1 willkürlich angenommen werden, die Werthe

$$A_2=-A_1\ ,\ A_3=-A\ ,\ A_4=0,$$

durch deren Substitution das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{A}{5n-4}+\frac{A_1}{5n-3}-\frac{A_1}{5n-2}-\frac{A}{5n-1}=\frac{25(3A+A_1)(n^2-n)+18A+4A_1}{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)},$$

und die Summe derselben

$$A.\frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}+A_1.\frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

gefunden wird. Die einfachste Reihe dieser Art ergibt sich hieraus, wenn man $A=\frac{1}{6}$ und $A_1=-\frac{1}{2}$ annimmt. Denn bei diesen Werthen ist das allgemeine Glied:

$$\frac{1}{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)},$$

und die Summe dieser Reihe:

$$\frac{\pi}{30}\left[\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}-3.\sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)}\right]=\frac{\pi}{15}\left[2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}-\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}\right].$$

§. 63.

Betrachtet man die im Vorhergehenden aufgestellten und benützten Gleichungen, auf welchen die Berechnung der harmonischen Konstanten, wie auch die daraus hervorgehenden Summirungen unendlicher Reihen beruhen, so wird sich nicht verkennen lassen, dass es die Gleichung I. des §. 26. ist, durch welche die Kreisfunktionen in die Resultate dieser Rechnungen eingeführt werden, hingegen die Logarithmen durch Anwendung der Gleichungen des §. 22. in dieselben hinein kommen. Als Folge hievon ergibt sich, dass jede Summirung einer Reihe, welche unmittelbar durch die Formel des §. 26. und ohne Zuziehung des §. 22. bewerkstelliget werden kann, eine analytische mit Ausschluss der Logarithmen sein müsse. Desshalb soll nunmehr untersucht werden, welche Beschaffenheit jene Reihen besitzen, deren Summen aus §. 26. ohne Beihilfe des §. 22. sich finden lassen.

Vermöge der Formeln II. des §. 9. ist, wenn darin $r=1$ angenommen wird,

$$\underset{a+md|d}{S}=\underset{a|d}{S}-\overset{m}{\underset{a|d}{S}} \quad\text{und}\quad \underset{m_1d-a|d}{S}=\underset{d-a|d}{S}-\overset{m_1-1}{\underset{d-a|d}{S}},$$

und folglich durch Subtraktion dieser Gleichungen

$$\underset{a+md|d}{S}-\underset{m_1d-a|d}{S}=\underset{a|d}{S}-\underset{d-a|d}{S}-\overset{m}{\underset{a|d}{S}}+\overset{m_1-1}{\underset{d-a|d}{S}},$$

oder auch wegen IV. in §. 24. und I. in §. 26.:

$$\underset{a+md|d}{S}-\underset{m_1d-a|d}{S}=\frac{\pi}{d}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}-\overset{m}{\underset{a|d}{S}}+\overset{m_1-1}{\underset{d-a|d}{S}},$$

wo m und m_1 beliebige ganze Zahlen bedeuten können.

Nun ist ferner

$$\underset{a+md|d}{S} = S\frac{1}{a+md+(n-1)d} = S\frac{1}{nd+(m-1)d+a},$$

$$\underset{m_1d-a|d}{S} = S\frac{1}{m_1d-a+(n-1)d} = S\frac{1}{nd+(m_1-1)d-a},$$

daher

$$\underset{a+md|d}{S} - \underset{m_1d-a|d}{S} = S\left[\frac{1}{nd+(m-1)d+a} - \frac{1}{nd+(m_1-1)d-a}\right],$$

oder

$$\underset{a+md|d}{S} - \underset{m_1d-a|d}{S}$$

$$= S\frac{(m_1-m)d-2a}{d^2n^2+(m+m_1-2)d^2n+(m-1)(m_1-1)d^2+(m_1-m)ad-a^2}.$$

Wird dieser Werth dem vorher gefundenen gleich gesetzt, und auch durch $(m_1-m)d-2a$ beiderseits dividirt, so erhält man die Summirung

$$S\frac{1}{d^2n^2+(m+m_1-2)d^2n+(m-1)(m_1-1)d^2+(m_1-m)ad-a^2}$$

$$= \frac{1}{(m_1-m)d-2a}\left[\frac{\pi}{d}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d} - \overset{m}{\underset{a|d}{S}} + \overset{m_1-1}{\underset{d-a|d}{S}}\right].$$

Um diesem Ausdrucke eine kürzere Gestalt zu geben, setze man

$$d^2=\gamma,\quad (m+m_1-2)d^2=\delta,\quad (m-1)(m_1-1)d^2+(m_1-m)ad-a^2=\varepsilon.$$

Hieraus ergibt sich

$$d=\sqrt{\gamma},\quad m+m_1-2=\frac{\delta}{d^2}=\frac{\delta}{\gamma},\quad a=\frac{(m_1-m)\gamma+\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}}{2\sqrt{\gamma}},$$

und auch

$$(m_1-m)d-2a=-\frac{\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Durch die Substitution aller dieser Werthe nimmt die obige Summenformel folgende kurze Form an:

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}}\left[\overset{m}{\underset{a|\sqrt{\gamma}}{S}} - \overset{m_1-1}{\underset{\sqrt{\gamma}-a|\sqrt{\gamma}}{S}} - \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{\sqrt{\gamma}}\right],$$

wo der Buchstabe a den vorhin angesetzten Werth bedeutet.

Hier müssen, wie schon vorher bemerkt wurde, m und m_1 nothwendig ganze Zahlen und daher auch $m+m_1-2=\frac{\delta}{\gamma}$ eine eben

solche Zahl sein. Man sieht daraus, dass durch die Formel I. keine andere unendliche Reihe summirt werden könne, als nur solche, deren allgemeines Glied zu der Form

$$\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}$$

gehört, wobei zugleich $\frac{\delta}{\gamma}$ eine ganze Zahl sein muss.

Nachdem auf solche Art diese letztere Bedingung als allgemein nothwendig anerkannt wurde, lässt sich die Formel I. noch etwas mehr vereinfachen, indem man darin $m_1=1$ annimmt. Dadurch wird

$$m=\frac{\delta}{\gamma}+1,\quad a=\frac{-\delta+\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}}{2\sqrt{\gamma}},\quad \underset{\sqrt{\gamma}-a|\sqrt{\gamma}}{\overset{m_1-1}{S}} = \underset{\sqrt{\gamma}-a|\sqrt{\gamma}}{\overset{0}{S}} = 0$$

und die Formel I. geht in

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\delta^2-4\gamma\varepsilon}\right)}\cdot\left[\underset{a|\sqrt{\gamma}}{\overset{\frac{\delta}{\gamma}+1}{S}}-\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{\sqrt{\gamma}}\right]$$

über. Durch diese Formel kann im Allgemeinen die Summe einer jeden unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied unter der vorhin angesetzten Form enthalten ist, sobald dabei $\frac{\delta}{\gamma}$ eine ganze, übrigens additive oder subtraktive Zahl ist, analytisch, und zwar durch Kreisfunktionen mit Ausschluss der Logarithmen ausgedrückt werden.

Hievon machen nur einige besondere Fälle, welche bald näher betrachtet werden sollen, eine Ausnahme.

§. 64.

Die Summenformel II. besitzt ungeachtet ihrer nur durch die angedeuteten Ausnahmen beschränkten Allgemeinheit doch einige bedeutende Gebrechen, welche der Bequemlichkeit ihres Gebrauches hinderlich sind. Erstlich nämlich wird durch dieselbe für die gesuchte Summe nur dann ein reeller Ausdruck erhalten, wenn unter der Voraussetzung, dass γ additiv sei, was stets angenommen werden darf, $\delta^2-4\gamma\varepsilon$ additiv und folglich $\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}$ sowohl, als a reelle Zahlen sind. Sobald hingegen $\delta^2-4\gamma\varepsilon$ subtraktiv, mithin $\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}$ und auch a imaginär sind, erscheint die Summe unter einer imaginären Gestalt, ohngeachtet sie in Wirklichkeit immer reell sein muss, wenn alle

Glieder der Reihe reell sind und zugleich die Reihe konvergirt. Ferner sind in der obigen Formel die rationalen und irrationalen oder auch die reellen und imaginären Glieder nicht von einander gesondert, und wenn diese Sonderung vorgenommen wird, überzeugt man sich, dass dabei Glieder vorkommen, welche sich gegenseitig unter einander aufheben, welche daher zweimal aufgestellt werden, nur um zu erkennen, dass man sie eigentlich schon anfänglich hätte weglassen können. Zur Beseitigung dieser Uebelstände müssen bei dem Gebrauche jener Formel mehrere einzelne Fälle unterschieden und demgemäss die entsprechenden Umänderungen in dem Ausdrucke derselben vorgenommen werden, damit sie das Resultat stets in unmittelbar brauchbarer Form auf die bequemste Weise ergebe. Diese wenngleich nicht eben schwierige doch immerhin etwas weitläufige Arbeit kann man sich jedoch ersparen, weil die gleichen Ergebnisse auch auf einem anderen Wege mit Hilfe einiger im Vorhergehenden bereits erwiesenen Sätze erlangt werden können.

Um mit dem Falle zu beginnen, wenn $\delta^2-4\gamma\varepsilon$ additiv, daher $\sqrt{(\delta^2-4\gamma\varepsilon)}$ reell ist, setze man der kürzeren Bezeichnung wegen

$$\frac{\delta^2-4\gamma\varepsilon}{4\gamma^2}=p,$$

wo demnach p stets eine additive Zahl ist.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich durch Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{p}}\left[\frac{1}{n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}}-\frac{1}{n+\frac{\delta}{2\gamma}+\sqrt{p}}\right].$$

Daher ist vermöge §. 49.:

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{p}}\left[C_{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|1}-C_{1+\frac{\delta}{2\gamma}+\sqrt{p}|1}\right].$$

Wird nun in den Werthen von M und N, welche in §. 13. unter III. und IV. angegeben sich befinden,

$$\alpha=1+\frac{\delta}{2\gamma},\quad \beta=p,\quad d=1$$

angenommen, so hat man vermöge des ebendort Erwiesenen

$$C_{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|1}=M+N.\sqrt{p},\qquad C_{1+\frac{\delta}{2\gamma}+\sqrt{p}|1}=M-N.\sqrt{p}.$$

Mithin ist

$$C_{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|1} - C_{1+\frac{\delta}{2\gamma}+\sqrt{p}|1} = 2N.\sqrt{p},$$

und wenn dieser Werth in der obigen Summe substituirt wird,

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{\gamma}.N.$$

Der Werth von N aber ist bereits in §. 45. für die beiden Fälle, wenn die dortige Zahl $\frac{\alpha}{d}$, an deren Stelle hier in Gemässheit der vorhin angezeigten Substitionen $1+\frac{\delta}{2\gamma}$ tritt, entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch mit dem Nenner 2 ist, unter I. und II. analytisch ausgedrückt in geschlossener Form gefunden worden.

Wenn man daher in den beiden eben bezeichneten Formeln die vorgeschriebenen Substitutionen vornimmt, und die hiedurch zum Vorscheine kommenden Werthe anstatt N in dem letzten Ausdrucke der Summen setzt, erhält man für den Fall, wenn $1+\frac{\delta}{2\gamma}$, folglich auch $\frac{\delta}{2\gamma}$ eine ganze und somit $\frac{\delta}{\gamma}$ eine gerade Zahl ist,

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=-\frac{1}{2\gamma p}-\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{p}}\operatorname{cotang}\pi\sqrt{p}-\frac{1}{\gamma}.\overset{1+\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(n-1)^2-p},$$

oder, weil offenbar

$$\overset{1+\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(n-1)^2-p}=\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{n^2-p}-\frac{1}{p}$$

ist, auch

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma p}-\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{p}}\operatorname{cotang}\pi\sqrt{p}-\frac{1}{\gamma}.\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{n^2-p};$$

für den Fall hingegen, wenn $1+\frac{\delta}{2\gamma}$ ein Bruch mit dem Nenner 2, folglich $\frac{\delta}{2\gamma}$ ein eben solcher Bruch und somit $\frac{\delta}{\gamma}$ eine ungerade ganze Zahl ist, ergibt sich

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{p}}\operatorname{tang}\pi\sqrt{p}-\frac{4}{\gamma}.\overset{\frac{\delta+\gamma}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2-4p}.$$

Um auch in dem zweiten Falle, wenn nämlich $\delta^2-4\gamma\varepsilon$ subtraktiv und daher $4\gamma\varepsilon-\delta^2$ additiv ist, die entsprechenden

Summenformeln zu finden, könnte ganz der gleiche Weg eingeschlagen werden, wie so eben. Man gelangt aber weit kürzer zu dem nämlichen Ziele, indem man nur in I. und II.

$$p = -q^2, \text{ daher } \sqrt{p} = qi \text{ und } q = \frac{\sqrt{(4\gamma\varepsilon - \delta^2)}}{2\gamma}$$

setzt und dann anstatt der goniometrischen Funktionen imaginärer Bögen die gleichgeltenden Exponential-Ausdrücke substituirt. Auf diese Art erhält man für den Fall, wenn $\frac{\delta}{\gamma}$ eine gerade Zahl ist,

$$\text{III.} \quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon} = -\frac{1}{2\gamma q^2} + \frac{\pi}{2\gamma q}\cdot\frac{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}{e^{q\pi}-e^{-q\pi}} - \frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{n^2+q^2},$$

für den Fall hingegen, wenn $\frac{\delta}{\gamma}$ eine ungerade Zahl ist,

$$\text{IV.} \quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon} = \frac{\pi}{2\gamma q}\cdot\frac{e^{q\pi}-e^{-q\pi}}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}} - \frac{4}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta+\gamma}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2+4q^2}.$$

Die gefundenen vier Ausdrücke, obgleich jeder von ihnen nur für einen besonderen Fall gilt, vertreten doch zusammen genommen vollständig die Stelle der allgemeinen Formel II. des §. 63. nur mit dem Unterschiede, dass hier die gesuchte Summe stets unmittelbar in reeller und zum Gebrauche möglichst bequemer Form erhalten wird, wozu nach §. 63. immer erst eine, wenn auch keineswegs schwierige Umwandlung des unmittelbar sich ergebenden Resultates erforderlich sein würde.

§. 65.

Aus den in §. 64. unter I. und III. aufgestellten Formeln lassen sich mit Leichtigkeit noch andere Summirungen ableiten, welche nicht mit Stillschweigen übergangen werden dürfen. Setzt man nämlich in den beiden bezeichneten Formeln 4γ anstatt γ und 2δ anstatt δ, so geht hiedurch, wenn man für die Buchstaben p und q dieselben Bedeutungen beibehält, welche sie schon in §. 64. ausgedrückt haben, nämlich $p = \frac{\delta^2 - 4\gamma\varepsilon}{4\gamma^2}$ und $q = \frac{\sqrt{(4\gamma\varepsilon - \delta^2)}}{2\gamma}$, der frühere Werth von p nunmehr in:

$$\frac{4\delta^2 - 16\gamma\varepsilon}{64\gamma^2} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\delta^2 - 4\gamma\varepsilon}{4\gamma^2} = \frac{p}{4},$$

und der frühere Werth von q in:

$$\frac{\sqrt{(16\gamma\varepsilon-4\delta^2)}}{8\gamma}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(4\gamma\varepsilon-\delta^2)}}{2\gamma}=\frac{q}{2}$$

über, und indem man alle diese Werthe in I. und III. substituirt, erhält man daraus:

$$S\frac{1}{4\gamma n^2+2\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma p}-\frac{\pi}{4\gamma\sqrt{p}}\operatorname{cotang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{4n^2-p},$$

und

$$S\frac{1}{4\gamma n^2+2\delta n+\varepsilon}=-\frac{1}{2\gamma q^2}+\frac{\pi}{4\gamma q}\cdot\frac{e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}}}{e^{\frac{q\pi}{2}}-e^{-\frac{q\pi}{2}}}-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{4n^2+q^2}.$$

Werden nun diese beiden Ausdrücke, in welchen γ, δ, ε, p und q die nämlichen Werthe bezeichnen, wie in I. und III. des §. 64., von eben diesen Formeln beziehungsweise subtrahirt, so erhält man, weil, wie man sich leicht überzeugt,

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}-S\frac{1}{4\gamma n^2+2\delta n+\varepsilon}=S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon},$$

$$-\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{p}}\cdot\operatorname{cotang}\pi\sqrt{p}+\frac{\pi}{4\gamma\sqrt{p}}\operatorname{cotang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}=\frac{\pi}{4\gamma\sqrt{p}}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2},$$

$$\frac{\pi}{2\gamma q}\cdot\frac{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}{e^{q\pi}-e^{-q\pi}}-\frac{\pi}{4\gamma q}\cdot\frac{e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}}}{e^{\frac{q\pi}{2}}-e^{-\frac{q\pi}{2}}}=\frac{\pi}{4\gamma q}\cdot\frac{e^{\frac{q\pi}{2}}-e^{-\frac{q\pi}{2}}}{e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}}},$$

$$-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{n^2-p}+\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{4n^2-p}=-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2-p},$$

$$-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{n^2+q^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{4n^2+q^2}=-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2+q^2}$$

ist, die beiden neuen Summenformeln

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon}=\frac{\pi}{4\gamma\sqrt{p}}\cdot\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2-p}$$

und

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon}=\frac{\pi}{4\gamma q}\cdot\frac{e^{\frac{q\pi}{2}}-e^{-\frac{q\pi}{2}}}{e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}}}-\frac{1}{\gamma}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{(2n-1)^2+q^2}.$$

Werden endlich von eben diesen Summen die nämlichen Ausdrücke, durch deren Subtraktion sie gefunden wurden, nun nochmals beziehungsweise subtrahirt, so ergeben sich auf gleiche Weise die beiden Formeln:

$$\text{III.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=-\frac{1}{2\gamma p}+\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{p}}\operatorname{cosec}\pi\sqrt{p}-\frac{1}{\gamma}.\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-p}$$

und

$$\text{IV.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma q^2}-\frac{\pi}{\gamma q(e^{q\pi}-e^{-q\pi})}-\frac{1}{\gamma}.\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+q^2}.$$

Man sieht wohl von selbst, dass die beiden Formeln I. und II. die Summe derjenigen Glieder der Reihe $S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}$ ausdrücken, welche den ungeraden Stellenzahlen entsprechen; durch III. und IV. hingegen wird der Unterschied zwischen den Gliedern an den ungeraden und den geraden Stellen derselben Reihe gefunden; I. und III. dienen für den Fall, wenn $\delta^2-4\gamma\varepsilon$ additiv, II. und IV. aber, wenn eben diese Zahl subtraktiv ist; die Werthe von p und q sind gleich anfangs, übereinstimmend mit §. 64., angegeben worden. Uebrigens zeigt schon die Beschaffenheit dieser Ausdrücke, wie es auch aus ihrer Ableitung als nothwendig sich erkennen lässt, dass in I. und II. $\frac{\delta}{4\gamma}$ eine ganze, folglich $\frac{\delta}{\gamma}$ eine durch 4 theilbare ganze Zahl sein müsse, in III. und IV. genügt es, wenn $\frac{\delta}{2\gamma}$ eine ganze und daher $\frac{\delta}{\gamma}$ eine einfach gerade Zahl ist. Wie sich hieraus von selbst versteht, dürfen diese Formeln auf andere Werthe von $\frac{\delta}{\gamma}$ nicht angewendet werden, nur wird man hiebei nicht übersehen, dass die Zahl 0 sowohl zu den einfach geraden, als auch zu den durch 4 theilbaren Zahlen gerechnet werden müsse.

§. 66.

Sämmtliche in den §§. 63., 64. und 65. entwickelte Summenformeln versagen ihren Dienst, sobald die Koeffizienten $\gamma, \delta, \varepsilon$ so beschaffen sind, dass $\delta^2=4\gamma\varepsilon$ oder $\delta^2-4\gamma\varepsilon=0$ ist. Denn bei dieser Voraussetzung wird sowohl $p=0$, als auch $q=0$, und hiedurch nehmen alle bezeichneten Ausdrücke eine unbestimmte Form an und lassen auf solche Art ihre Unbrauchbarkeit für den

vorliegenden Fall nicht verkennen. Der Grund dieses Umstandes ist leicht einzusehen, weil bei dieser Voraussetzung der Nenner des allgemeinen Gliedes $\frac{1}{\gamma n^2 + \delta n + \varepsilon}$ sich in ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren zerlegen lässt und daher die Eigenschaften nicht besitzt, welche nach §. 51. vorhanden sein müssen, damit die Reihe durch die harmonischen Konstanten summirt werden könne. Vielmehr ist in diesem Falle die Reihe eine harmonische der zweiten Ordnung, von welchen erst später wird gehandelt werden. Uebrigens ist wegen dieses Ausnahmefalles keine besondere Aufmerksamkeit anzuwenden erforderlich, weil sein wenn gleich nicht vorausgesehenes Eintreffen durch die Beschaffenheit des Resultates der vorhergehenden Formeln jederzeit selbst zu erkennen gegeben wird.

Ausser dem eben betrachteten gibt es für einige der aufgestellten Formeln noch einen zweiten Fall, in welchem sie zur Auffindung der gesuchten Summe nicht tauglich sind, und diese Unbrauchbarkeit ebenfalls auf die vorhin erwähnte Weise selbst anzeigen, nämlich die Formeln I. des §. 64. und III. des §. 65. dann, wenn $\sqrt{p}$ eine ganze Zahl ist, die Formel II. des §. 64., wenn $\sqrt{p}$ ein Bruch mit dem Nenner 2 und einem ungeraden Zähler, endlich die Formel I. des §. 65., wenn $\sqrt{p}$ eine ungerade ganze Zahl ist. Ohne sich in eine umständliche Erörterung dieser einzelnen Fälle einzulassen, soll doch, um nicht genöthigt zu sein, später abermals hierauf zurückkommen zu müssen, sogleich hier kurz gezeigt werden, wie man in denselben den bestimmten Werth der gesuchten Summe zu finden im Stande sei, woraus sich zugleich ergeben wird, dass unter den diesen Fällen zum Grunde liegenden Voraussetzungen die Summe nicht bloss analytisch, sondern sogar rational sei, und desshalb ihre Auffindung eigentlich nicht zur gegenwärtig in Verhandlung stehenden, sondern zur nächst folgenden Aufgabe gehöre.

Demnach soll angenommen werden, dass $\sqrt{p}$ entweder eine ganze Zahl oder auch ein Bruch mit dem Nenner 2, und folglich in beiden Fällen $2\sqrt{p}$ eine ganze Zahl sei. Wird unter dieser Voraussetzung in §. 19.:

$$a = 1 + \frac{\delta}{2\gamma} - \sqrt{p}, \quad d = 1, \quad m = 2\sqrt{p}$$

gesetzt, so findet man daraus:

$$\underset{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|1}{C} - \underset{1+\frac{\delta}{2\gamma}+\sqrt{p}|1}{C} = \overset{2\sqrt{p}}{\underset{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|1}{S}},$$

und wenn dieser Werth in dem gleich anfangs des §. 64. für

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}$$

aufgestellten Ausdrucke substituirt wird, erhält man daraus sogleich die Summenformel:

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{p}}\cdot \overset{2\sqrt{p}}{\underset{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|1}{S}},$$

durch deren Hilfe die gesuchte Summe stets gefunden werden kann, sobald $2\sqrt{p}$ eine ganze Zahl und daher $\sqrt{p}$ entweder ebenfalls eine solche oder auch ein Bruch mit dem Nenner 2 ist. Diese Formel dient daher anstatt I. und II. des §. 64. in den angezeigten Ausnahmefällen.

Aus der eben erhaltenen lassen sich auf die nämliche Weise, welche in §. 65. angewendet wurde, noch zwei andere Formeln ableiten, welche in den vorhin bezeichneten Ausnahmefällen an die Stelle von I. und III. des §. 65. zu treten geeignet sind. Es wird nicht nöthig sein, die keiner Schwierigkeit unterliegende Rechnung hier zu wiederholen. Die Formeln selbst ergeben sich:

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{p}}\cdot \overset{\sqrt{p}}{\underset{1+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}|2}{S}}$$

und

$$\text{III.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{p}}\cdot \overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}},$$

deren erste ihre Anwendung findet, wenn $\sqrt{p}$ eine ganze Zahl ist, die andere hingegen, sobald $2\sqrt{p}$ eine ganze Zahl und folglich $\sqrt{p}$ entweder eine eben solche oder auch einen Bruch mit dem Nenner 2 bedeutet.

§. 67.

Der einfachste Fall, in welchem die in den §§. 64. und 65. aufgestellten Summenformeln sich anwenden lassen, tritt dann ein, wenn darin $\delta=0$ angenommen wird. Hiebei handelt es sich, weil unter dieser Voraussetzung auch $\frac{\delta}{\gamma}=0$ ist, und 0 stets unter die geraden Zahlen gerechnet werden muss, um die Formeln I. und III. des §. 64., so wie um die sämmtlichen Formeln des §. 65.

Durch die Annahme $\delta=0$ wird $p=-\frac{\varepsilon}{\gamma}$, $\sqrt{p}=\sqrt{-\frac{\varepsilon}{\gamma}}$ und $q=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}$. Um nun den Ausdrücken durchgängig eine reelle Form zu ertheilen, kann zugleich in I. des §. 64. und I. und III. des §. 65. ε mit $-\varepsilon$ vertauscht werden, wodurch man folgende Gleichungen erhält:

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2-\varepsilon}=\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{\pi}{2\sqrt{(\gamma\varepsilon)}}\operatorname{cotang}\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}},$$

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{\gamma n^2+\varepsilon}=\frac{\pi}{2\sqrt{(\gamma\varepsilon)}}\cdot\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}+e^{-\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}}{e^{\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}-e^{-\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}}-\frac{1}{2\varepsilon},$$

$$\text{III.}\quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2-\varepsilon}=\frac{\pi}{4\sqrt{(\gamma\varepsilon)}}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}},$$

$$\text{IV.}\quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\varepsilon}=\frac{\pi}{4\sqrt{(\gamma\varepsilon)}}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}-e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}}{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}+e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}},$$

$$\text{V.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2-\varepsilon}=\frac{\pi}{2\sqrt{(\gamma\varepsilon)}}\operatorname{cosec}\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}-\frac{1}{2\varepsilon},$$

$$\text{VI.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2+\varepsilon}=\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{\pi}{\sqrt{(\gamma\varepsilon)}.\left(e^{\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}-e^{-\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}\right)}.$$

Diese sechs Formeln enthalten die von Euler gefundenen wichtigen, hieher gehörigen Summirungen, welche, wie man aus der hier vorgenommenen Ableitung sieht, nur den ersten und einfachsten Fall zur Anwendung der in den §§. 64. und 65. aufgestellten umfassenderen Ausdrücke darstellen.

§. 68.

In Bezug auf den Gebrauch, welcher sich von den eben angeführten Euler'schen Summirungen machen lässt, möge es gestattet sein, eine Bemerkung beizufügen, die auch auf die vorhergehenden allgemeineren Formeln ihre Anwendung findet. Man pflegt sich hiebei nach dem Vorgange Euler's auf Fälle zu beschränken, in welchen die hier durch γ und ε bezeichneten Koeffizienten reelle Werthe besitzen. Diese Beschränkung ist aber keineswegs als nothwendig in der Natur der Ausdrücke enthalten, vielmehr dürfen darin ohne Anstand für γ und ε auch komplexe

Werthe angenommen werden. Freilich werden in diesem letzteren Falle unmittelbar nur Summen von Reihen mit komplexen Gliedern gefunden, und man dürfte desshalb geneigt sein, dieser weiteren Ausdehnung des Gebrauches einen sehr geringen Werth beizulegen. Allein bekanntlich lassen sich durch das Zusammenziehen zweier oder mehrerer Reihen der letztgedachten Art zuweilen wieder Reihen mit reellen Gliedern daraus ableiten und dadurch ihre Summen analytisch darstellen, welche auf andere Weise vielleicht nur schwer zu erreichen sein dürften.

Ein Beispiel mag genügen, um die Richtigkeit dieser Behauptung ersichtlich zu machen. Setzt man in den beiden ersten Formeln des §. 67.:

$$\gamma = 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon = m^2.i,$$

so erhält man daraus:

$$S\frac{1}{n^2-m^2.i}=\frac{1}{2m^2i}-\frac{\pi}{2m\sqrt{i}}\text{cotang}\, m\pi\sqrt{i}$$

$$=-\frac{i}{2m^2}+\frac{\pi(i-1)}{2m\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{m\pi\sqrt{2}}-e^{-m\pi\sqrt{2}}+2i\sin m\pi\sqrt{2}}{e^{m\pi\sqrt{2}}+e^{-m\pi\sqrt{2}}-2\cos m\pi\sqrt{2}}$$

und

$$S\frac{1}{n^2+m^2.i}=-\frac{1}{2m^2i}+\frac{\pi}{2m\sqrt{i}}\cdot\frac{e^{m\pi\sqrt{i}}+e^{-m\pi\sqrt{i}}}{e^{m\pi\sqrt{i}}-e^{-m\pi\sqrt{i}}}$$

$$=\frac{i}{2m^2}-\frac{\pi(i+1)}{2m\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{m\pi\sqrt{2}}-e^{-m\pi\sqrt{2}}-2i\sin m\pi\sqrt{2}}{e^{m\pi\sqrt{2}}+e^{-m\pi\sqrt{2}}-2\cos m\pi\sqrt{2}}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{n^2-m^2.i}-\frac{1}{n^2+m^2.i}=\frac{2m^2i}{n^4+m^4}=2m^2i.\frac{1}{n^4+m^4},$$

folglich auch:

$$S\frac{1}{n^4+m^4}=\frac{1}{2m^2i}[S\frac{1}{n^2-m^2i}-S\frac{1}{n^2+m^2i}],$$

oder nach geschehener Substitution der vorhergehenden Werthe:

$$S\frac{1}{n^4+m^4}=-\frac{1}{2m^4}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4m^3}\cdot\frac{e^{m\pi\sqrt{2}}-e^{-m\pi\sqrt{2}}+2\sin m\pi\sqrt{2}}{e^{m\pi\sqrt{2}}+e^{-m\pi\sqrt{2}}-2\cos m\pi\sqrt{2}}.$$

Es ist ferner einleuchtend, dass man auf dem betretenen Wege auch noch weiter fortschreiten könnte. Denn setzt man in dem letzten Ausdrucke anstatt m sowohl $m\sqrt[4]{i}$, als auch $m\sqrt[4]{-i}$, so ergeben sich daraus offenbar die Werthe der beiden Summen:

$$S\frac{1}{n^4+m^4i} \text{ und } S\frac{1}{n^4-m^4i},$$

und ferner:

$$S\frac{1}{n^8+m^8}=\frac{1}{2m^4i}\left[S\frac{1}{n^4-m^4i}-S\frac{1}{n^4+m^4i}\right],$$

woraus wieder auf gleiche Weise nach und nach die Summe einer jeden unendlichen Reihe analytisch ausgedrückt gefunden werden kann, deren allgemeines Glied unter der Form

$$\frac{1}{n^{2^r}+m^{2^r}}$$

enthalten ist, was für eine additive ganze Zahl auch r sein mag.

Dieses einfache Beispiel wird hoffentlich hinreichen, den Nutzen zu zeigen, welchen die angeführte Erweiterung des Gebrauches der Euler'schen Formeln auch in anderen mehr verwickelten Fällen zu gewähren vermag.

§. 69.

Um auch die Anwendung der allgemeineren Formeln der §§. 64. und 65. an einem Paare von Beispielen nachzuweisen, sei zuerst die unendliche Reihe zur Summirung vorgelegt, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{2n^2-6n+5}$$

ist. Die Vergleichung mit dem in §. 64. aufgestellten allgemeinen Gliede zeigt, dass hier

$$\gamma=2, \quad \delta=-6, \quad \varepsilon=5,$$

mithin $\frac{\delta}{\gamma}=-3$ eine ungerade Zahl und $\delta^2-4\gamma\varepsilon=-4$ subtraktiv sei.

Daher muss hiebei die Formel IV. des §. 64. zur Anwendung kommen, und es ist:

$$q=\frac{\sqrt{(4\gamma\varepsilon-\delta^2)}}{2\gamma}=\frac{\sqrt{4}}{4}=\tfrac{1}{2} \text{ und } \frac{\delta+\gamma}{2\gamma}=\frac{-6+2}{4}=-1.$$

Durch die Substitution dieser Werthe in der bezeichneten Formel erhält man:

$$S\frac{1}{2n^2-6n+5}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}-2.\overset{-1}{S}\frac{1}{(2n-1)^2+1}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}+1.$$

Dieses Beispiel dient zugleich als Beleg zu der in §. 8. nachgewiesenen Bedeutung des Summenzeichens $\overset{m}{S}$ für den Fall, wenn m eine ganze subtraktive Zahl ist, indem vermöge III. in §. 8.:

$$\overset{-1}{S}\frac{1}{(2n-1)^2+1}=-\overset{1}{S}\frac{1}{(1-2n)^2+1}=-\tfrac{1}{2}$$

ist.

Als zweites, etwas mehr verwickeltes Beispiel, auf welches auch die Bemerkung des §. 68. ihre Anwendung findet, mag die unendliche Reihe summirt werden, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(n^2-n)^2+1}$$

ist. Diese Reihe lässt sich zwar durch keine der vorhin aufgestellten Formeln unmittelbar summiren, wohl aber findet man leicht, dass

$$S\frac{1}{(n^2-n)^2+1}=\frac{1}{2i}\left[S\frac{1}{n^2-n-i}-S\frac{1}{n^2-n+i}\right]$$

ist, wo beide einzelnen Reihen allerdings zu den nach §. 64. summirbaren gehören.

Um zuerst $S\frac{1}{n^2-n-i}$ zu erhalten, hat man:

$$\gamma=1,\quad \delta=-1,\quad \varepsilon=-i,\ \text{folglich}\ \frac{\delta}{\gamma}=-1,$$

was, weil es eine ungerade Zahl ist, zeigt, dass die Summirung durch die Formel II. des §. 64. zu geschehen habe. Ferner ist

$$\frac{\delta+\gamma}{\gamma}=\frac{-1+1}{1}=0$$

und

$$p=\frac{1+4i}{4},\quad \sqrt{p}=\frac{\sqrt{(1+4i)}}{2}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)}+i\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}\right]$$

oder, wenn man zur kürzeren Darstellung des Ausdruckes

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)}=p_1 \text{ und } \sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}=q_1$$

annimmt,

$$\sqrt{p}=\tfrac{1}{2}(p_1+q_1.i).$$

Durch die Substitution dieser Werthe in II. des §. 64. ergibt sich nun:

$$S\frac{1}{n^2-n-i}=\frac{\pi}{p_1+q_1.i}.\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}(p_1+q_1.i)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{17}}.(p_1-q_1.i)\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}.(p_1+q_1.i).$$

Auf ganz gleiche Weise oder noch kürzer durch Vertauschung von i mit $-i$ in dieser letzten Formel erhält man auch:

$$S\frac{1}{n^2-n+i}=\frac{\pi}{\sqrt{17}}.(p_1+q_1.i)\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}.(p_1-q_1.i),$$

und durch die Substitution beider einzelnen Summen:

$$S\frac{1}{(n^2-n)^2+1}$$

$$=\frac{\pi}{2i\sqrt{17}}[(p_1-q_1.i)\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}(p_1+q_1.i)-(p_1+q_1.i)\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}(p_1-q_1.i)].$$

Hier erübriget noch, dem Ausdrucke eine reelle Form zu verleihen, was durch die Entwickelung der einzelnen Glieder und nachherige Einführung der Exponential- anstatt der gleichgeltenden goniometrischen Funktionen imaginärer Bögen ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden kann. Es wird nicht nöthig sein, die immerhin etwas umständliche Rechnung hieher zu setzen; als Resultat derselben ergibt sich:

$$S\frac{1}{(n^2-n)^2+1}=\frac{\pi}{\sqrt{17}}.\frac{p_1(e^{q_1\pi}-e^{-q_1\pi})-2q_1\sin p_1\pi}{e^{q_1\pi}+e^{-q_1\pi}+2\cos p_1\pi},$$

wo man nur anstatt p_1 und q_1 die durch diese Buchstaben bezeichneten besonderen Werthe zu setzen braucht.

§. 70.

Nachdem im Vorhergehenden bereits drei von den in §. 53. ausgesprochenen Aufgaben einer zwar kurzen, doch zu dem gegenwärtigen Zwecke genügenden Betrachtung unterzogen wurden, bleibt nur noch übrig, auch die letzte dortige Aufgabe in gleicher Weise zu behandeln. Diese Aufgabe wird, wie schon in §. 54. bemerkt wurde, stets durch die gleichzeitige Auflösung aller drei früheren Aufgaben gleichfalls gelöst; sie erfordert daher die Erfüllung der grössten Anzahl von Bedingungsgleichungen und ist eben desshalb in der Anzahl der möglichen Auflösungen am meisten beschränkt. Zu ihr gehören die ersten derartigen Summirungen, welche von Leibnitz und Jakob Bernoulli gefunden

wurden, und sie bietet schon desshalb ein grösseres Interesse dar. Zwar erfolgt die Aufstellung der Bedingungsgleichungen hier ganz auf dieselbe Weise und mit gleicher Leichtigkeit, wie bei den früheren Aufgaben; dennoch dürfte es für angemessen erachtet werden, sich hier nicht auf das einzelne, früher durchweg gebrauchte Beispiel $d=5$ zu beschränken, sondern vielmehr die zur algebraischen Summirbarkeit nothwendigen Bedingungsgleichungen für die kleineren Differenzen, etwa bis $d=6$, abgesondert aufzustellen, um hiedurch in den Stand gesetzt zu werden, die Vergleichung sowohl mit der früher betrachteten analytischen Summirbarkeit, als auch mit einem in der Folge zu behandelnden besonderen Falle mit Leichtigkeit vorzunehmen und die auf solche Art sich ergebenden Unterschiede deutlich hervorzuheben.

Noch muss hier bemerkt werden, dass durch die Erfüllung der bald aufzustellenden Bedingungsgleichungen die Summe der Reihe eigentlich nur dann wirklich ein algebraischer Ausdruck wird, wenn zugleich sowohl die Anfangszahlen und Differenzen aller einzelnen Reihen, als auch die eben diesen Reihen zugehörenden Faktoren algebraische, nicht etwa transzendente Werthe besitzen. Auf diese Unterscheidung soll jedoch in der Folge keine weitere Rücksicht genommen, sondern jede Reihe stets als algebraisch summirbar angesehen werden, sobald ihre Summe durch eine endliche algebraische Funktion der eben genannten Zahlen dargestellt werden kann, mögen auch vielleicht einige dieser Zahlen für sich betrachtet transzendent sein.

§. 71.

Was nun zuerst den Fall betrifft, wenn alle nach §. 47. zusammenzuziehende Reihen die gleiche Differenz $d=1$ haben, und zugleich alle Anfangszahlen derselben ganze Werthe besitzen, kommen in den Konstanten, die solchen Reihen angehören, ohnehin weder ein Logarithmus, noch eine Kreisfunktion vor, sondern nur die einzige primäre Konstante $\underset{1|1}{C}$, wesshalb in dem vorausgesetzten Falle auch die Summenformel des §. 49. überhaupt keine andere nicht algebraische Zahl enthalten kann, als eben $\underset{1|1}{C}$, und folglich nothwendig algebraisch wird, sobald letztere daraus wegfällt. Aber vermöge des in §. 56. Erwiesenen muss $\underset{1|1}{C}$ aus der Summe jederzeit verschwinden, sobald keine andere von ihr verschiedene primäre harmonische Konstante in eben dieser Summe vorkommt, ohne dass es hiezu der Erfüllung irgend einer anderen Bedingungsgleichung bedarf, als der allgemeinen des §. 48. oder

§. 58., von welcher die Konvergenz der Reihe überhaupt abhängt. Daher ergibt sich hieraus der Satz, dass jede aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit der gemeinschaftlichen Differenz 1 und durchgängig ganzen Anfangszahlen nach §. 47. entspringende unendliche Reihe nothwendig algebraisch summirbar sei, sobald sie konvergent ist, d. h. der Bedingungsgleichung des §. 48. entspricht, oder mit anderen Worten, dass jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion von n ist, algebraisch summirbar sein werde, sobald der Zähler wenigstens um 2 Grade niedriger ist als der Nenner und zugleich der letztere in ein Produkt aus lauter von einander verschiedenen Faktoren von der Form $n+a$ zerlegt werden kann, bei welchen a eine ganze Zahl bedeutet.

Es würde ganz leicht sein, für den hier besprochenen Fall eine und sogar mehrere bestimmte Formeln aufzufinden, um daraus die Summe der Reihe zu berechnen. Da sich jedoch bald Gelegenheit ergeben wird, andere etwas umfassendere Ausdrücke aufzustellen, in welchen die hier anzuwendenden nur als einzelne Fälle enthalten sein werden, dürfte es nicht nothwendig sein, die selbständige Entwickelung dieser letzteren hier vorzunehmen, sondern soll nur am gehörigen Orte darauf zurückverwiesen werden.

§. 72.

Wird nun zu dem Falle übergegangen, dass die gemeinschaftliche Differenz aller einzelnen Reihen $d=2$ sei, so sieht man aus §. 32., dass in den zugehörigen Konstanten ausser $\underset{1|1}{C}$, welche Zahl, da sie von selbst wegfallen muss, nicht weiter beachtet zu werden braucht, nur noch die einzige nicht algebraische Zahl $l2$ vorkommt, und zwar nur in den Konstanten mit ungeraden Anfangszahlen, durchgängig mit dem Koeffizienten 1 behaftet. Für das Wegfallen dieser Zahl aus der Summe hat man daher die Bedingungsgleichung $F_1=0$, welche nebst der allgemeinen des §. 58., die für $d=2$ die Form $F_0+F_1=0$ annimmt, erfüllt werden muss, um die Summe algebraisch zu machen. Durch die Auflösung dieser zwei Gleichungen erhält man nun:

$$F_0=0 \quad \text{und} \quad F_1=0,$$

d. h. es müssen für $d=2$ die Faktorensummen der Reihen mit geraden und jener mit ungeraden Anfangs-

zahlen einzeln gleich 0 sein, damit die Summe algebraisch werde.

Hieraus folgt von selbst, dass in dem Falle, wenn keine anderen Reihen als nur solche mit ungeraden Anfangszahlen gegeben sind, die Summe stets algebraisch sein müsse, sobald die Reihe nur überhaupt konvergent ist, oder auf andere Weise ausgedrückt: jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion von n ist, wird stets algebraisch summirbar sein, sobald der Zähler wenigstens um 2 Grade niedriger ist als der Nenner, und zugleich der letztere in ein Produkt aus lauter von einander verschiedenen Faktoren von der Form $2n+a$ zerlegt werden kann, bei welchen a durchgängig eine ungerade Zahl ist.

§. 73.

Für $d=3$ enthalten vermöge §. 33. diejenigen Konstanten, deren Anfangszahlen durch 3 nicht theilbar sind, ausser $C_{1|1}$ noch die beiden nicht algebraischen Zahlen $l2$ und π, und zwar die erstere durchgängig mit dem Koeffizienten $\frac{1}{3}$ versehen, π hingegen hat bei den Anfangszahlen von der Form $3n+1$ den Koeffizienten $\frac{\sqrt{3}}{18}$, bei der Form $3n+2$ aber $-\frac{\sqrt{3}}{18}$. Das Verschwinden dieser beiden Zahlen aus der Summe der Reihe erfordert daher die Erfüllung der zwei besonderen Bedingungsgleichungen

$$\tfrac{1}{3}F_1+\tfrac{1}{3}F_2=0 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{3}}{18}\cdot F_1-\frac{\sqrt{3}}{18}F_2=0,$$

oder:

$$F_1+F_2=0 \quad \text{und} \quad F_1-F_2=0,$$

durch deren Auflösung, in Verbindung mit der allgemeinen Bedingungsgleichung des §. 58., welche hier in $F_0+F_1+F_2=0$ übergeht, man erhält:

$$F_0=0, \quad F_1=0, \quad F_2=0,$$

d. h. die Faktorensummen derjenigen Reihen, deren Anfangszahlen zu den Formen $3n$, $3n+1$, $3n+2$ gehören, müssen einzeln genommen gleich 0 sein, damit die Reihe algebraisch summirbar werde.

Dass hieraus ähnliche Folgerungen abgeleitet werden können, wie in §. 72., ist von selbst einleuchtend.

§. 74.

In den Werthen der Konstanten, welche zur Differenz $d = 4$ gehören, kommen vermöge §. 34. ausser $\underset{1|1}{C}$ nur die beiden nicht algebraischen Zahlen $l2$ und π vor. Die erste dieser Zahlen erscheint in allen Konstanten, deren Anfangszahlen durch 4 nicht theilbar sind, nur mit dem Unterschiede, dass sie bei den Anfangszahlen von den Formen $4n+1$ und $4n+3$ den Koeffizienten $\frac{3}{4}$, bei den Anfangszahlen von der Form $4n+2$ hingegen den Koeffizienten $\frac{1}{2}$ erhält; in den Konstanten, deren Anfangszahlen durch 4 theilbar sind, ist $l2$ nicht vorhanden. Damit daher die Zahl $l2$ aus der Summe wegfalle, muss nothwendig

$$\tfrac{3}{4}F_1+\tfrac{1}{2}F_2+\tfrac{3}{4}F_3=0 \quad \text{oder} \quad 3F_1+2F_2+3F_3=0$$

sein. Die Zahl π erscheint nur in jenen Konstanten, deren Anfangszahlen den Formen $4n+1$ und $4n+3$ angehören, und zwar bei den ersteren mit dem Koeffizienten $\frac{1}{8}$, bei den letzteren mit $-\frac{1}{8}$. Das Wegfallen von π aus der Summe wird desshalb durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{8}F_1-\tfrac{1}{8}F_3=0 \quad \text{oder} \quad F_1-F_3=0$$

bedingt. Somit müssen zur algebraischen Summirbarkeit der Reihe die drei Bedingungsgleichungen

$$F_0+F_1+F_2+F_3=0, \quad 3F_1+2F_2+3F_3=0, \quad F_1-F_3=0$$

gleichzeitig erfüllt werden, was, wie man sich leicht überzeugt, identisch ist mit

$$F_0=F_1=F_3=-\tfrac{1}{3}F_2.$$

Aus der Beschaffenheit dieser Gleichungen sieht man sogleich, dass ihnen stets Genüge geleistet werde, sobald alle Faktorensummen einzeln genommen gleich 0 sind, dass daher unter dieser Voraussetzung die Reihe gewiss algebraisch summirbar sei; hingegen kann jenen Gleichungen auch durch andere Werthe der Faktorensummen entsprochen werden, was bei den früher betrachteten Differenzen nicht der Fall war. Um diess an einem ganz einfachen Beispiele zu zeigen, beschränke man sich auf Reihen, deren Anfangszahlen die Differenz 4 nicht übersteigen, wodurch die obigen Bedingungsgleichungen in

$$A=A_2=A_3=-\tfrac{1}{3}A_1$$

übergehen. Nimmt man nun A willkürlich an, so folgt daraus:

$$A_1 = -3A, \quad \text{und} \quad A_2 = A_3 = A.$$

Daher wird das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{A}{4n-3} - \frac{3A}{4n-2} + \frac{A}{4n-1} + \frac{A}{4n} = \frac{-16n^2+20n-3}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)4n}.2A,$$

und die Summe derselben vermöge §. 49. und nach geschehener Substitution der Werthe aus §. 34.:

$$A[\underset{1|4}{C} - 3\underset{2|4}{C} + \underset{3|4}{C} + \underset{4|4}{C}] = 0$$

gefunden, was offenbar bedeutet, dass das erste additive Glied der Reihe der Summe aller folgenden subtraktiven Glieder gleich sei. Man sieht hieraus zugleich, dass es ausser der eben erhaltenen keine andere algebraisch summirbare Reihe gebe, welche aus den vier harmonischen Reihen $\underset{1|4}{S}$, $\underset{2|4}{S}$, $\underset{3|4}{S}$, $\underset{4|4}{S}$ nach Anleitung des §. 47. entstehen könnte.

§. 75.

Die zur algebraischen Summirbarkeit erforderlichen Bedingungsgleichungen in dem Falle, wenn $d = 5$ ist, sind im Vorhergehenden bereits aufgestellt worden, indem in §. 59. die beiden zur analytischen Summirung nothwendigen Gleichungen:

$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0, \quad F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 0,$$

dann in §. 60. zum Wegfallen der Zahl π die weitere Gleichung

$$F_2 . \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} + F_3 . \frac{(3-\sqrt{5})}{2} - F_4 = 0,$$

endlich in §. 62. zum Verschwinden der Zahl $\mathfrak{B}$ noch

$$F_2 + F_3 = 0$$

gefunden wurden. Diese Gleichungen, welche sich leicht auf die einfacheren Formen

$$F_0 = 0, \quad F_2 = -F_3 = -F_1 . (\sqrt{5}+2), \quad F_4 = -F_1$$

bringen lassen, zeigen, dass F_0 keinen anderen Werth als 0 haben dürfe, von den 4 übrigen Faktorensummen hingegen die eine willkürlich angenommen und daraus die übrigen bestimmt werden können.

Will man sich auch hiebei, wie es im Vorhergehenden gewöhnlich geschah, auf Reihen beschränken, deren Anfangszahlen nicht grösser sind als die Differenz 5, so gehen die 4 Bedingungsgleichungen in

$$A_4=0,\quad A_1=-A_2=-A(\sqrt{5}+2),\quad A_3=-A$$

über, wodurch das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{A}{5n-4}-\frac{A(\sqrt{5}+2)}{5n-3}+\frac{A(\sqrt{5}+2)}{5n-2}-\frac{A}{5n-1}$$
$$=A.\frac{25(\sqrt{5}-1)(n-n^2)+10-4\sqrt{5}}{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)},$$

und die Summe derselben

$$A.[\underset{1|5}{S}-(\sqrt{5}+2).\underset{2|5}{S}+(\sqrt{5}+2).\underset{3|5}{S}-\underset{4|5}{S}]=0$$

gefunden wird. Dass hiebei die nämlichen Bemerkungen wie in §. 74. Statt haben, ist zu sehr in die Augen fallend, um einer Wiederholung zu bedürfen.

§. 76.

Zum Behufe der algebraischen Summirbarkeit in dem Falle, wenn die gemeinschaftliche Differenz aller einzelnen Reihen $d=6$ ist, sind offenbar vier Bedingungsgleichungen zu erfüllen, nämlich nebst der allgemeinen des §. 58. noch 3 besondere, um die nicht algebraischen Zahlen $l2$, $l3$ und π aus der Summe wegfallen zu machen. Es ist leicht, auf die schon wiederholt angewandte Weise sich zu überzeugen, dass diese Gleichungen unmittelbar in den Formen

$$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=0,\quad F_1+F_3+F_5=0,$$
$$F_1+F_2+F_4+F_5=0,\quad 3F_1+F_2-F_4-3F_5=0$$

zum Vorschein kommen, sich aber auch einfacher durch

$$F_2=F_0-3F_1,\quad F_3=-F_0,\quad F_4=3F_1-2F_0,\quad F_5=F_0-F_1$$

ausdrücken lassen.

Beschränkt man sich auf Reihen, deren Anfangszahlen nicht grösser sind als die Differenz 6, so gehen letztere Gleichungen in

$$A_1=A_5-3A,\quad A_2=-A_5,\quad A_3=3A-2A_5,\quad A_4=A_5-A$$

über, aus welchen man, wenn A und A_1 willkürlich angenommen werden sollen, auch

$A_2 = -3A - A_1$, $A_3 = -3A - 2A_1$, $A_4 = 2A + A_1$, $A_5 = 3A + A_1$

erhält. Da hier zwei von den Faktoren willkürlich angenommen werden dürfen, folgt hieraus von selbst, dass es bei $d = 6$ auch unter der angenommenen Beschränkung eine weit grössere Mannigfaltigkeit von Reihen, die sich algebraisch summiren lassen, gebe, als diess bei den kleineren Differenzen der Fall war. Hauptsächlich um diesen Umstand sichtbar hervortreten zu lassen, wurde die Aufstellung der einzelnen Bedingungsgleichungen bis hieher fortgesetzt, ohne dass es nothwendig sein wird, es durch Ausrechnung von Beispielen näher zu zeigen.

§. 77.

Wie bei den zwei vorhergehenden gibt es auch bei der gegenwärtig in Verhandlung stehenden Aufgabe einen besonderen Fall, in welchem es nicht nöthig ist, zu den allgemeinen Regeln seine Zuflucht zu nehmen, weil dabei die algebraische Summirbarkeit der Reihe schon aus den besonderen aufgestellten Bedingungen unmittelbar nach §. 19. nachgewiesen werden kann, ohne dazu der im Vorhergehenden entwickelten Bedingsgleichungen zu bedürfen.

Werden in der Summenformel des §. 49. die Differenzen aller einzelnen Reihen als einander gleich angenommen, so verwandelt sich dieselbe in

$$x = A.\underset{a|d}{C} + A_1.\underset{a_1|d}{C} + A_2.\underset{a_2|d}{C} + A_3.\underset{a_3|d}{C} + \ldots .$$

Vermöge der Bedingungsgleichung II. des §. 48. ist aber, wenn sie durch $\underset{a|d}{C}$ multiplizirt wird,

$$A.\underset{a|d}{C} + A_1.\underset{a|d}{C} + A_2.\underset{a|d}{C} + A_3.\underset{a|d}{C} + \ldots = 0,$$

folglich auch, indem man diese Gleichung von der vorhergehenden abzieht,

$$x = A_1(\underset{a_1|d}{C} - \underset{a|d}{C}) + A_2(\underset{a_2|d}{C} - \underset{a|d}{C}) + A_3(\underset{a_3|d}{C} - \underset{a|d}{C}) + \ldots .$$

Setzt man nun ferner voraus, dass

$$a_1 = a + md, \quad a_2 = a + m_1 d, \quad a_3 = a + m_2 d, \ldots$$

sei, wo $m, m_1, m_2, \ldots$ beliebige ganze, additive oder subtraktive Zahlen bedeuten sollen, so ergibt sich aus §. 19.

$$\underset{a_1|d}{C} - \underset{a|d}{C} = \underset{a+md|d}{C} - \underset{a|d}{C} = -\overset{m}{\underset{a|d}{S}}$$

$$\underset{a_2|d}{C} - \underset{a|d}{C} = \underset{a+m_1d|d}{C} - \underset{a|d}{C} = -\overset{m_1}{\underset{a|d}{S}}$$

$$\underset{a_3|d}{C} - \underset{a|d}{C} = \underset{a+m_2d|d}{C} - \underset{a|d}{C} = -\overset{m_2}{\underset{a|d}{S}}$$

u. s. f.

und durch die Substitution dieser Werthe erhält man:

$$\text{I.} \qquad x = -A_1 . \overset{m}{\underset{a|d}{S}} - A_2 . \overset{m_1}{\underset{a|d}{S}} - A_3 . \overset{m_2}{\underset{a|d}{S}} - \ldots\ldots$$

Wie man sieht, wird mittest dieser Formel die Summe der Reihe durch die Faktoren A_1, A_2, A_3, ... in jedesmaliger Verbindung mit einer durch m, m_1, m_2, ... ausgedrückten bestimmten Anzahl von Gliedern der Reihe $\underset{a|d}{S}$ dargestellt und daher mit Berücksichtigung des in §. 70. Gesagten gewiss **algebraisch** sein.

Die vorhin angenommenen Werthe von a_1, a_2, a_3, ... zeigen, dass dieselben für den Modul d mit a und daher auch unter einander **kongruent** seien, was vermöge der von **Gauss** eingeführten Bezeichnungsweise durch

$$a \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv \ldots. \;(\text{mod}\, d)$$

ausgedrückt wird. Daher lassen sich die Voraussetzungen, aus welchen die algebraische Summirung der Reihe durch die Formel I. abgeleitet wurde, durch die beiden Gleichungen

$$A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots. = 0$$

und

$$a \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv \ldots. \;(\text{mod}\, d)$$

darstellen, was folgenden Satz gibt: **Jede aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit gleichen Differenzen d nach §. 47. entspringende unendliche Reihe ist durch die Formel I. algebraisch summirbar, sobald die Summe aller Faktoren der einzelnen Reihen gleich 0 ist und alle Anfangszahlen der letzteren in Bezug auf den Modul d einander kongruent sind.**

Nach §. 51. kann dieser Satz auch auf folgende Weise ausgesprochen werden: **Jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion von n ist, wird vermöge I. algebraisch summirbar gefunden,**

sobald der Zähler dieser Funktion wenigstens um 2 Grade niedriger ist als der Nenner und zugleich der letztere aus einfachen durchgängig von einander verschiedenen Faktoren besteht, welche auf die Form $n+a$ gebracht eine solche Beschaffenheit haben, dass ihre Unterschiede durchgängig ganze, additive oder subtraktive Zahlen sind.

Als Beispiel hiezu soll die unendliche Reihe gebraucht werden, deren allgemeines Glied

$$\frac{2n-1}{(3n-2)(3n+7)(3n+13)}$$

ist. Hier sieht man sogleich, dass der Zähler um 2 Grade niedriger ist als der Nenner, ferner besteht der letztere aus drei einfachen Faktoren, welche auf die ausgesprochene Form gebracht

$$n-\frac{2}{3}, \quad n+\frac{7}{3} \quad \text{und} \quad n+\frac{13}{3}$$

und daher nicht nur sämmtlich von einander verschieden, sondern auch so beschaffen sind, dass der Unterschied jeder zwei aus ihnen eine ganze Zahl ist. Durch die Zerlegung in Partialbrüche erhält man nun:

$$\frac{2n-1}{(3n-2)(3n+7)(3n+13)}=\frac{\frac{1}{405}}{3n-2}+\frac{\frac{17}{162}}{3n+7}-\frac{\frac{29}{270}}{3n+13},$$

folglich ist

$$A=\frac{1}{405}, \quad A_1=\frac{17}{162}, \quad A_2=-\frac{29}{270};$$

ferner:

$$a=1, \quad a_1=10, \quad a_2=16, \quad d=3;$$

dann:

$$m=\frac{10-1}{3}=3, \quad m_1=\frac{16-1}{3}=5;$$

mithin:

$$x=-\frac{17}{162}\cdot\underset{1|3}{\overset{3}{S}}+\frac{29}{270}\cdot\underset{1|3}{\overset{5}{S}},$$

oder:

$$x=-\frac{17}{162}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)+\frac{29}{270}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}\right)=\frac{919}{40950}.$$

Es versteht sich von selbst, dass ganz das gleiche Resultat

auch durch die allgemeine Summenformel des §. 49. erhalten werden könne.

Die obige Formel I. lässt noch eine andere in manchen Fällen bequeme Darstellung zu. Zu diesem Zwecke denke man sich alle gegebenen einzelnen Reihen, bei welchen die Gleichheit ihrer Differenzen bereits früher vorausgesetzt wurde, nun auch nach der Grösse ihrer Anfangszahlen aufsteigend geordnet vor. Ferner kann hier stets angenommen werden, dass $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ die in natürlicher Ordnung wachsenden ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4,.... seien, wenn man nur die Faktoren derjenigen Reihen, welche bei dieser Anordnung etwa fehlen sollten, als gleich 0 setzt. Auf diese Art bedeuten

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots.$$

nach der Ordnung die Zahlen

$$a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \ldots.$$

und

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots.$$

sind beziehungsweise die Faktoren der Reihen

$$\underset{a+d\,|\,d}{S}, \quad \underset{a+2d\,|\,d}{S}, \quad \underset{a+3d\,|\,d}{S}, \quad \underset{a+4d\,|\,d}{S}, \ldots.$$

und die Summenformel I. geht in

$$x = -A_1 . \overset{1}{\underset{a\,|\,d}{S}} - A_2 . \overset{2}{\underset{a\,|\,d}{S}} - A_3 . \overset{3}{\underset{a\,|\,d}{S}} - A_4 . \overset{4}{\underset{a\,|\,d}{S}} - \ldots,$$

oder, wenn man die hier nur angezeigten Summen in ihre einzelnen Glieder zerlegt, und dann die gleichartigen zusammenzieht, in

$$x = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots) . \frac{1}{a} - (A_2 + A_3 + A_4 + \ldots.) . \frac{1}{a+d}$$
$$-(A_3 + A_4 + \ldots) . \frac{1}{a+2d} - (A_4 + \ldots) . \frac{1}{a+3d} - \ldots$$

über. Nun ist aber vermöge II. in §. 48.:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots = -A,$$
$$A_2 + A_3 + A_4 + \ldots = -(A + A_1),$$
$$A_3 + A_4 + \ldots = -(A + A_1 + A_2),$$
$$A_4 + \ldots = -(A + A_1 + A_2 + A_3),$$

u. s. f.

Durch die Substitution dieser Werthe ergibt sich endlich:

$$\text{II.} \quad x = A.\frac{1}{a} + (A + A_1)\cdot\frac{1}{a+d} + (A + A_1 + A_2)\cdot\frac{1}{a+2d}$$
$$+ (A + A_1 + A_2 + A_3)\cdot\frac{1}{a+3d} + \ldots,$$

oder in kürzerer Form ausgedrückt:

$$\text{III.} \quad x = S\frac{A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}}{a + (n-1)d}.$$

Man wird hiebei wohl nicht übersehen, dass die Reihe II. und III. keineswegs eine unendliche sei, sondern nothwendig abbrechen müsse, sobald alle wirklich vorhandenen Faktoren der einzelnen Reihen in die Formel eintreten, weil von dort an wegen der Bedingungsgleichung II. des §. 48. alle ferneren Glieder in II. oder III. gleich 0 werden. Setzt man in den Formeln I., II., III. $a = 1$ und $d = 1$, so gehen dieselben in

$$\text{IV.} \quad x = -A_1.\overset{m}{\underset{1|1}{S}} - A_2.\overset{m_1}{\underset{1|1}{S}} - A_3.\overset{m_2}{\underset{1|1}{S}} - A_4.\overset{m_3}{\underset{1|1}{S}} - \ldots$$

$$\text{V.} \quad x = A.\tfrac{1}{1} + (A + A_1).\tfrac{1}{2} + (A + A_1 + A_2).\tfrac{1}{3} + (A + A_1 + A_2 + A_3).\tfrac{1}{4} + \ldots$$

oder

$$\text{VI.} \quad x = S\frac{A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}}{n}$$

über, und man sieht leicht, dass diese Ausdrücke zur Auffindung der Summe in dem Falle des §. 71. gebraucht werden können, und daher eben diejenigen sind, auf welche dort hingedeutet wurde.

Uebrigens darf man die besondere Bedeutung nicht ausser Acht lassen, welche im Vorhergehenden den Faktoren A_1, A_2, A_3, A_4, ... bei Ableitung der Formeln II. und III. beigelegt worden ist, welche daher auch in V. und VI. giltig bleibt, in I. und IV. hingegen keineswegs die nämliche ist.

§. 78.

Die Formeln des §. 77. gestatten eine Ausdehnung ihres Gebrauches, die nicht unerwähnt bleiben darf. Es ist nämlich möglich, dass durch dieselben zuweilen sogar Reihen algebraisch summirt werden können, bei welchen die dort aufgestellten Voraussetzungen eigentlich gar nicht eintreffen. Diess ist dann der Fall, sobald die einzelnen Reihen, aus welchen die zu summirende nach §. 47. hervorgehen soll, wenn sie alle zusammen betrachtet werden, zwar den in §. 77. vorausgesetzten Bedingungen

nicht entsprechen, hingegen sich in zwei oder mehrere Gruppen abtheilen lassen, bei deren jeder für sich allein genommen jene Bedingungen vorhanden sind, was sehr wohl geschehen kann. In einem solchen Falle lässt sich offenbar die Summe jeder einzelnen solchen Gruppe nach §. 77. algebraisch ausgedrückt bestimmen, und da die zu summirende Reihe aus der Vereinigung aller dieser Gruppen entsteht, wird durch die Addition aller Summen dieser Gruppen zugleich die gesuchte Summe algebraisch ausgedrückt gefunden. Ein sehr einfaches Beispiel dieser Art bietet die Reihe dar, deren allgemeines Glied

$$\frac{24n+7}{(3n-2)(3n+1)(4n+1)(4n+5)}$$

oder, in Partialbrüche zerlegt,

$$\frac{\frac{3}{11}}{3n-2}-\frac{\frac{3}{11}}{3n+1}-\frac{\frac{4}{11}}{4n+1}+\frac{\frac{4}{11}}{4n+5}$$

ist. Hier sieht man auf der Stelle, dass die Voraussetzungen des §. 77. nicht eintreffen, sobald alle 4 Reihen im Zusammenhange genommen werden, weil die vier Faktoren

$$n-\tfrac{2}{3},\quad n+\tfrac{1}{3},\quad n+\tfrac{1}{4},\quad n+\tfrac{5}{4}$$

keineswegs so beschaffen sind, dass ihre Unterschiede durchgängig ganze Zahlen sind. Betrachtet man hingegen die aus den beiden ersten, und auch die aus den beiden letzten Partialbrüchen hervorgehenden Reihen abgesondert von einander, so ist klar, dass sowohl bei der ersten, als auch bei der zweiten Gruppe die Bedingungen des §. 77. vorhanden sind. Wirklich findet man auch nach der Formel I. des §. 77. die Summe der ersten Gruppe

$$\frac{3}{11}\cdot\overset{1}{\underset{1|3}{S}}=\frac{3}{11},$$

die Summe der zweiten Gruppe

$$-\frac{4}{11}\cdot\overset{1}{\underset{5|4}{S}}=-\frac{4}{55},$$

folglich wird die Summe der vorgelegten unendlichen Reihe

$$\frac{3}{11}-\frac{4}{55}=\frac{1}{5}$$

sein. Dieses Beispiel zeigt zugleich, dass auf solche Art zuweilen auch Reihen algebraisch summirt werden können, deren einzelne Differenzen nicht durchgängig einander gleich sind.

§. 79.

Unter den Formeln des §. 77. ist als ein besonderer Fall ein bereits seit langer Zeit bekannter Ausdruck enthalten, der eben desshalb und auch seiner Zierlichkeit wegen angeführt zu werden verdient.

Nimmt man in §. 77. an, die Werthe der Faktoren A, A_1, A_2, A_3, ... seien nach der Ordnung die Glieder der vermöge der binomischen Reihe entwickelten Potenz $(1-1)^m$, wo m eine beliebige additive ganze Zahl bedeuten mag, nämlich:

$$A=1,\quad A_1=-\frac{m}{1},\quad A_2=\frac{m(m-1)}{1.2},\quad A_3=-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ldots$$

so folgt hieraus zuerst:

$$A+A_1+A_2+A_3+\ldots=(1-1)^m=0.$$

Ferner erhält man:

$$A+A_1=1-\frac{m}{1}=-\frac{(m-1)}{1},$$

$$A+A_1+A_2=-\frac{(m-1)}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}=\frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

$$A+A_1+A_2+A_3$$

$$=\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}=-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3},$$

u. s. f.

Betrachtet man nun die Reihe

$$\underset{a|d}{S}-\frac{m}{1}.\underset{a+d\,|\,d}{S}+\frac{m(m-1)}{1.2}.\underset{a+2d|d}{S}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.\underset{a+3d|d}{S}+\ldots,$$

so erkennt man leicht, dass bei ihr sowohl die Summe der Faktoren aller einzelnen Reihen gleich 0 ist, als auch alle Anfangszahlen der Reihen einander in Bezug auf den Modul d kongruent sind, und demnach die Voraussetzungen, aus welchen in §. 77. die algebraische Summirbarkeit abgeleitet wurde, wirklich eintreffen.

Das allgemeine Glied dieser Reihe ergibt sich

$$\frac{1}{a+(n-1)d}-\frac{m}{1}.\frac{1}{a+nd}+\frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{1}{a+(n+1)d}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.\frac{1}{a+(n+2)d}+\ldots$$

und diess ist, wie man aus der Differenzenrechnung weiss, wenn a als veränderlich und $\Delta a = d$ angenommen wird, nichts anderes, als

$$(-1)^m.\Delta^m\left(\frac{1}{a+(n-1)d}\right),$$

oder, wie ohnehin bekannt,

$$\frac{m!d^m}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)\ldots(a+(n+m-1)d)}.$$

Desshalb kann die Summe der obigen Reihe auch durch

$$S\frac{m!d^m}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)\ldots(a+(n+m-1)d)}$$

dargestellt werden.

Als Summe derselben Reihe erhält man durch die Formel II. des §. 77. den Ausdruck:

$$\frac{1}{a}-\frac{(m-1)}{1}.\frac{1}{a+d}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}.\frac{1}{a+2d}$$
$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}.\frac{1}{a+3d}+\ldots,$$

was ebenso viel ist als

$$(-1)^{m-1}.\Delta^{m-1}\left(\frac{1}{a}\right),$$

oder:

$$\frac{(m-1)!d^{m-1}}{a(a+d)(a+2d)\ldots.(a+(m-1)d)}.$$

Durch die Gleichsetzung dieses und des vorhergehenden Werthes der Summe, und indem man zugleich beiderseits durch $m!d^m$ dividirt, ergibt sich die bekannte merkwürdige Summirung

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)\ldots.(a+(n+m-1)d)}$$
$$=\frac{1}{md}.\frac{1}{a(a+d)(a+2d)\ldots.(a+(m-1)d)}.$$

Das nämliche Resultat hätte wohl auch auf kürzere Weise unmittelbar aus §. 19. abgeleitet werden können; hier wurde jedoch dem eingeschlagenen, obgleich etwas umständlicheren Wege der Vorzug gegeben, weil dabei zugleich nachgewiesen werden sollte, dass diese letzte Formel keineswegs eine selbständige, von der vorhergehenden verschiedene, algebraische Summirung

angebe, sondern wirklich nur ein besonderer Fall der umfassenderen Formeln des §. 77. sei.

§. 80.

Um zu verhüten, dass die Summirung des §. 77. und §. 78. in ihrer Anwendung keine grössere Beschränkung erleide, als unumgänglich nothwendig ist, wird die Bemerkung von einigem Nutzen sein, dass dort keineswegs vorausgesetzt wurde, die Anfangszahlen a, a_1, a_2, a_3, ... aller einzelnen Reihen seien durchgängig ganze oder auch etwa rationale Zahlen, sondern nur, dass alle diese Zahlen einander in Bezug auf den Modul d kongruent seien, d. h. dass die Unterschiede je zweier aus ihnen durch d getheilt ganze Quotienten geben, oder mit Rücksicht auf den zweiten in §. 77. enthaltenen Ausdruck des Gesetzes, dass die Unterschiede jeder zwei auf die Form $n+\alpha$ gebrachter Faktoren des Nenners ganze von 0 verschiedene Zahlen seien. Aus diesen Annahmen, in Verbindung mit der allgemeinen Bedingungsgleichung des §. 48., wurde dort die algebraische Summirbarkeit der Reihe als eine nothwendige Folge abgeleitet. Desshalb lassen sich die Formeln des §. 77. zuweilen auch auf Reihen anwenden, bei welchen die vorbenannten Zahlen keine ganzen oder rationalen, sondern irrationale oder mit Berücksichtigung dessen, was in §. 70. angeführt wurde, selbst transzendente Werthe besitzen, wenn sie nur den ausgesprochenen Bedingungen Genüge leisten.

Ein Paar leichter Beispiele wird das Gesagte ganz deutlich machen.

Bei der unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(2n+\sqrt{2}-1)(2n+\sqrt{n}+3)}=\frac{\frac{1}{4}}{2n+\sqrt{2}-1}-\frac{\frac{1}{4}}{2n+\sqrt{2}+3}$$

ist, ergibt sich

$$a=\sqrt{2}+1,\quad a_1=\sqrt{2}+5,\quad d=2.$$

Ungeachtet aber auf solche Art a und a_1 irrationale Zahlen sind, kann die Reihe dennoch nach §. 77. summirt werden, weil

$$\frac{a_1-a}{d}=\frac{\sqrt{2}+5-\sqrt{2}-1}{2}=2$$

eine ganze Zahl ist, und auch der Bedingungsgleichung des §. 48. entsprochen ist. Wirklich findet man die Summe dieser Reihe durch die Formel I. des §. 77.:

$$\tfrac{1}{4}\cdot\overset{2}{\underset{\sqrt{2}+1|2}{S}}=\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+3}\right)=\frac{3\sqrt{2}-2}{14}.$$

Ebenso erhält man für die Summe der unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(2n+\pi-1)(2n+\pi+3)(2n+\pi+5)}=\frac{\frac{1}{24}}{2n+\pi-1}-\frac{\frac{1}{8}}{2n+\pi+3}+\frac{\frac{1}{12}}{2n+\pi+5}$$

ist, durch die Formel I. des §. 77. den Ausdruck:

$$\frac{1}{8}\cdot\overset{2}{\underset{\pi+1|2}{S}}-\frac{1}{24}\cdot\overset{3}{\underset{\pi+1|2}{S}}=\frac{3\pi+7}{12(\pi+1)(\pi+3)(\pi+5)}.$$

Beide diese Summirungen können im Sinne des §. 70. als **algebraische** angesehen werden, obgleich die gefundenen Ausdrücke eigentlich **irrational** oder **transzendent** sind.

§. 81.

Wenn man die in §. 77. vorausgesetzten Bedingungen zur Herbeiführung der algebraischen Summirbarkeit einer Reihe mit den Bedingungsgleichungen, welche in den §§. 71—76. zu dem nämlichen Zwecke aufgefunden wurden, vergleichen will, darf der wesentliche Umstand nicht übersehen werden, dass die letzteren, wie man aus ihrer Herleitung entnimmt, **ausschliessende**, d. h. solche sind, deren **Erfüllung** nicht nur die algebraische Summirbarkeit der Reihe als **nothwendige** Folge nach sich zieht, sondern deren **Nichterfüllung** zugleich die gedachte Art der Summirung gänzlich **ausschliesst**. Die gleiche **ausschliessende** Eigenschaft kommt jedoch den Bedingungen des §. 77. nicht zu, indem dort nur erwiesen wurde, dass unter den angenommenen Voraussetzungen die algebraische Summirbarkeit der Reihe gewiss vorhanden sei, ohne aber durch das Nichteintreffen jener Voraussetzungen die bezeichnete Summirung in allen Fällen auszuschliessen. Hieraus ergibt sich, dass jederzeit, sobald die Summirung nach §. 77. oder auch §. 78. auf solche Reihen angewendet wird, deren Anfangszahlen und Differenzen **ganze** Werthe besitzen, nothwendig auch den entsprechenden Bedingungsgleichungen, wie sie in den §§. 71—76. für die kleineren Differenzen wirklich aufgestellt worden sind, aber auch für alle grösseren Differenzen auf gleiche Weise aufgestellt werden könnten, Genüge geleistet sein müsse, nicht aber auch umgekehrt, wenn den zuletzt bezeichneten Gleichungen Genüge geschieht, auch die Summirung nach §. 77. oder §. 78. vollzogen werden könne.

Von der Richtigkeit der ersten dieser beiden Behauptungen kann man sich durch die nähere Betrachtung der dem §. 77. zum Grunde liegenden Voraussetzungen leicht überzeugen. Denn die dort aufgestellte Annahme, dass alle Anfangszahlen der einzelnen Reihen einander in Bezug auf den Modul d kongruent seien, bedeutet nichts anderes, als dass alle jene Zahlen durch d getheilt einerlei Rest geben und daher, wenn dieser Rest mit r bezeichnet wird, sämmtliche Faktoren der gegebenen Reihen zu der in §. 58. durch F_r dargestellten Summe gehören, welche dann wegen der Konvergenz der Reihe nothwendig gleich 0 sein muss. Man hat demnach $F_r = 0$, und da ausser diesen keine anderen Faktoren vorhanden sind, werden auch alle anderen Faktorensummen einzeln genommen gleich 0 sein, d. h. es ist

$$F_0 = F_1 = F_2 = \ldots = F_r = \ldots = F_{d-1} = 0.$$

Der in §. 78. erklärte Fall einer erweiterten Anwendung der Formeln des §. 77. unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, dass dabei nicht nur eine einzige, sondern zwei oder mehrere Faktorensummen mit verschiedenen Resten vorkommen, die aber ebenfalls alle einzeln genommen gleich 0 sind. Demnach lassen sich die in den §§. 77. und 78. angenommenen Voraussetzungen in allen Fällen durch die eben aufgestellten Gleichungen ausdrücken.

Nun sind die in den §§. 71—76. gefundenen Bedingungsgleichungen ebenso wie diejenigen, welche für grössere Differenzen auf gleiche Art sich finden lassen, von solcher Beschaffenheit, dass darin kein Glied vorkommen kann, welches nicht eine der verschiedenen Faktorensummen zum Faktor hat, woraus folgt, dass diesen Gleichungen jederzeit gewiss Genüge geleistet wird, sobald alle Faktorensummen einzeln genommen gleich 0 sind, ohne jedoch den Fall auszuschliessen, ob ihnen nicht vielleicht noch durch andere Werthe der Faktorensummen ebenfalls entsprochen werden könne. Betrachtet man insbesondere die Bedingungsgleichungen, welche in den §§. 71., 72. und 73. für die Differenzen 1, 2, 3 aufgestellt worden sind, so sieht man, dass sie genau die nämlichen sind, wie sie so eben für die Anwendung der §§. 77. und 78. ausgedrückt wurden, und da die ersteren, wie schon früher bemerkt, ausschliessende sind, so folgt hieraus der Satz, dass es für die Differenzen 1, 2 und 3 keine anderen algebraisch summirbaren, nach §. 47. entspringenden, Reihen gebe, als nur diejenigen, deren Summen auch nach §. 77. und §. 78. sich finden lassen.

Die in §. 74. für $d=4$ gefundenen Bedingungsgleichungen für die algebraische Summirbarkeit der Reihen sind, wie schon der Anblick zeigt, nicht mehr identisch mit den hier für die Anwendung der §§. 77. und 78. aufgestellten; jenen wird zwar stets Genüge geleistet, sobald alle einzelnen Faktorensummen gleich 0 sind, hingegen kann ihnen auch noch durch andere Werthe der Faktorensummen entsprochen werden, wie eben das in §. 74. berechnete einfache Beispiel beweist. Für $d=4$ gibt es daher auch andere algebraisch summirbare Reihen, deren Summen aus §. 77. und §. 78. nicht abgeleitet werden können.

Zu dem gleichen Schlusse gelangt man offenbar auch durch die Vergleichung der in §. 75. und §. 76. angegebenen Bedingungsgleichungen für $d=5$ und $d=6$ mit den hier zur Anwendung der Summirungsmethode des §. 77. und §. 78. aufgestellten in erhöhtem Maasse, und es wird wohl keinem Zweifel unterliegen, dass bei allen grösseren Differenzen um so mehr der nämliche Fall eintreten werde.

§. 82.

Noch muss eine wichtige Eigenschaft nachgewiesen werden, welche allen jenen Reihen zukommt, deren Summen nach §. 77. oder §. 78. gefunden werden können, ohne dass sie jedoch auch auf andere algebraisch summirbare Reihen im Allgemeinen sich ausdehnen lässt. Wie bekannt ist man im Stande, aus der Summe einer unendlichen Reihe die Summe einer endlichen Anzahl n ihrer ersten Glieder dadurch herzuleiten, indem man von ihr die Summe derselben unendlichen Reihe, jedoch von ihrem $(n+1)$ten Gliede angefangen berechnet, abzieht. Dieses Verfahren lässt sich sehr leicht auf diejenigen unendlichen Reihen anwenden, welche nach §. 77. und §. 78. summirt werden können. Denn die beiden Summenformeln I. und II. des §. 77. sind so beschaffen, dass mittelst derselben die gesuchte Summe durch einige erste Glieder der harmonischen Reihe $\underset{a|d}{S}$ ausgedrückt gefunden wird. Bei einer jeden harmonischen Reihe aber wird aus dem ersten Gliede das $(n+1)$te und überhaupt aus jedem Gliede das $n$te darauf folgende erhalten, wenn man anstatt a durchgängig $a+nd$ und ebenso anstatt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ überall a_1+nd, a_2+nd, $a_3+nd, \ldots$ setzt. Bemerkt man hiezu noch, dass durch diese Substitutionen weder die Werthe der Faktoren $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$, noch auch jene der im §. 77. mit $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ bezeichneten Zahlen eine Veränderung erleiden, so ist sogleich klar, dass aus

jedem der zwei Ausdrücke I. und II. des §. 77. die Summe derselben unendlichen Reihe, jedoch von ihrem $(n+1)$ten Gliede angefangen berechnet, sowohl durch die Formel

$$-A_1 \cdot \overset{m}{\underset{a+nd\,|\,d}{S}} - A_2 \cdot \overset{m_1}{\underset{a+nd\,|\,d}{S}} - A_3 \cdot \overset{m_2}{\underset{a+nd\,|\,d}{S}} - \ldots,$$

als auch durch

$$A \cdot \frac{1}{a+nd} + (A+A_1)\frac{1}{a+(n+1)d} + (A+A_1+A_2)\frac{1}{a+(n+2)d} + \ldots$$

gefunden werde. Durch die beziehungsweise Subtraktion dieser beiden von den Formeln I. und II. des §. 77. ergeben sich demnach für die Summe der n ersten Glieder der Reihe die beiden Ausdrücke

I.

$$A_1\left(\overset{m}{\underset{a+nd\,|\,d}{S}} - \overset{m}{\underset{a\,|\,d}{S}}\right) + A_2\left(\overset{m_1}{\underset{a+nd\,|\,d}{S}} - \overset{m_1}{\underset{a\,|\,d}{S}}\right) + A_3\left(\overset{m_2}{\underset{a+nd\,|\,d}{S}} - \overset{m_2}{\underset{a\,|\,d}{S}}\right) + \ldots$$

und

II.

$$A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nd}\right) + (A+A_1)\left(\frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+(n+1)d}\right)$$
$$+ (A+A_1+A_2)\left(\frac{1}{a+2d} - \frac{1}{a+(n+2)d}\right) + \ldots,$$

welcher letzte sich auch auf die etwas kürzere Form

III.

$$A \cdot \frac{nd}{a(a+nd)} + (A+A_1)\frac{nd}{(a+d)(a+(n+1)d)}$$
$$+ (A+A_1+A_2)\frac{nd}{(a+2d)(a+(n+2)d)} + \ldots$$

bringen lässt.

Wie in §. 77. darf auch hier nicht übersehen werden, dass die Buchstaben A, A_1, A_2, A_3, ... in I. und in II. und III. nicht einerlei Bedeutung haben. Während sie nämlich in I. nach der Ordnung die Faktoren der gegebenen Reihen $\underset{a|d}{S}$, $\underset{a_1|d}{S}$, $\underset{a_2|d}{S}$, $\underset{a_3|d}{S}$, ... bezeichnen, drücken sie in II. und III. die Faktoren der Reihen $\underset{a|d}{S}$, $\underset{a+d|d}{S}$, $\underset{a+2d|d}{S}$, $\underset{a+3d|d}{S}$, ... aus, wesshalb in diesen letzten Formeln die Faktoren derjenigen Reihen gleich 0 angenommen werden müssen, welche etwa nicht vorkommen sollten.

Um z. B. die Summe der ersten n Glieder von der in §. 77. berechneten unendlichen Reihe zu finden, ergibt dieselbe sich aus I. sogleich

$$\frac{17}{162}\left(\overset{3}{\underset{1+3n|3}{S}}-\overset{3}{\underset{1|3}{S}}\right)-\frac{29}{270}\left(\overset{5}{\underset{1+3n|3}{S}}-\overset{5}{\underset{1|3}{S}}\right)$$

oder:

$$\frac{919}{40950}-\frac{9n^2+24n+13}{135(3n+1)(3n+4)(3n+7)}-\frac{29(6n+23)}{270(3n+10)(3n+13)}.$$

Bei jenen Reihen, welche nicht unmittelbar nach §. 77., sondern nur nach §. 78. summirt werden können, braucht man offenbar nur das eben gelehrte Verfahren auf jede einzelne nach der dortigen Vorschrift sich ergebende Gruppe von Reihen anzuwenden, um auch in einem solchen Falle die Summe der ersten n Glieder der gegebenen Reihe durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck dargestellt zu erhalten.

Die Summe der ersten n Glieder der in §. 78. beispielsweise vorgelegten Reihe findet man auf diese Weise durch wiederholte Anwendung der Formel I.

$$-\frac{3}{11}\left(\overset{1}{\underset{1+3n|3}{S}}-\overset{1}{\underset{1|3}{S}}\right)+\frac{4}{11}\left(\overset{1}{\underset{5+4n|4}{S}}-\overset{1}{\underset{5|4}{S}}\right)$$

oder:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{(3n+1)(4n+5)}.$$

Ferner wird es kaum der Erwähnung bedürfen, dass die in §. 80. gemachte Bemerkung über die Ausdehnung, welche den Formeln des §. 77. in der Anwendung auf irrationale und transzendente Werthe der Anfangszahlen zuweilen gegeben werden kann, nun auch bei der gezeigten Summirung einer endlichen Anzahl der ersten Glieder jener Reihen ohne Weiteres ihre Giltigkeit behalte. So findet man für die Summen der ersten n Glieder von den beiden in §. 80. als Beispiele angeführten Reihen die Ausdrücke

$$\frac{1}{4}\cdot\overset{2}{\underset{\sqrt{2}+1|2}{S}}-\frac{1}{4}\cdot\overset{2}{\underset{\sqrt{2}+1+2n|2}{S}}=\frac{3\sqrt{2}-2}{14}-\frac{2n+\sqrt{2}+2}{2(2n+\sqrt{2}+1)(2n+\sqrt{2}+3)}$$

und

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\overset{2}{\underset{\pi+1|2}{S}}-\overset{2}{\underset{\pi+1+2n|2}{S}}\right)-\frac{1}{12}\left(\overset{3}{\underset{\pi+1|2}{S}}-\overset{3}{\underset{\pi+1+2n|2}{S}}\right)$$
$$=\frac{3\pi+7}{12(\pi+1)(\pi+3)(\pi+5)}-\frac{6n+3\pi+7}{12(2n+\pi+1)(2n+\pi+3)(2n+\pi+5)}.$$

Da die in §. 79. entwickelte Summenformel nur einen besonderen Fall des §. 77. ausmacht, versteht es sich von selbst, dass auch aus der ersteren auf dem gleichen Wege die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der Reihe durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden könne, was aber, als ohnehin bekannt, hier keiner weiteren Ausführung bedarf, sondern nur der Vollständigkeit wegen in Erinnerung gebracht werden musste.

(Die zweite Abtheilung folgt baldigst im nächsten Bande.)

XXIX.

Note sur le changement des variables dans les intégrales multiples.

Par

Monsieur Dr. *G. F. W. Baehr*

à Groningue.

On sait que la substitution de nouvelles variables dans les intégrales multiples a été appliquée le premier par Euler aux intégrales doubles, et qu'après lui Lagrange l'a étendue aux intégrales triples. La symétrie de la formule pour ces deux cas laisse aisément prévoir ce que celle-ci devient pour un nombre quelconque de variables; mais il semble que les démonstrations pour ce cas général laissent encore à désirer quant à l'évidence et la clarté du raisonnement. On n'y voit pas comment les limites des nouvelles variables dépendent de celles des anciennes, tandis que le signe du produit des différentielles dans l'intégrale transformée reste indéterminé. Au contraire, en s'appuyant sur cette propriété, qu'en général on peut décomposer une intégrale multiple en un certain nombre d'intégrales semblables, où l'ordre des intégrations est changé arbitrairement, on est conduit à la formule générale de transformation d'une manière directe et naturelle, qui détermine en même temps ce signe et ces limites.

Avant de montrer cela, il ne sera peut-être pas sans intérêt de donner pour la transformation des intégrales simples une démonstration géométrique, qu'on ne trouve pas dans les traités sur le calcul intégral.

1.

Lemme. Soit décrit dans l'angle droit YOX (tab. IV. fig. 1.) un trapèze rectangle $ABCD$, et dans l'angle adjacent XOZ, sur la même base, le trapèze $ABEF$, dont les côtés AF et BE sont arbitraires. Si l'on construit un troisième trapèze, en menant

CH, DG, FP, EM parallèles à la base AB, puis HK et GJ parallèles à l'hypothénuse FE et faisant $PQ = OJ$, $MN = OK$: ce troisième trapèze $MPQN$ sera égal au premier $ABCD$.

En effet, les triangles semblables OGJ, OHK et ELF donnent

$$OG : OJ = OH : OK = EL : FL$$

c'est-à-dire

$$AD : PQ = BC : MN = MP : AB,$$

d'où

$$AD + BC : PQ + MN = MP : AB,$$

donc

$$(AD + BC) \times AB = (PQ + MN) \times MP,$$

ce qui prouve l'égalité des deux aires $ABCD$ et $MPNQ$.

Si l'on prend CD parallèle à AB, QN sera parallèle à PM, et alors on aura de même rectangle AC = rectangle PN.

Généralement on peut représenter l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x_n} F(x)\, dx$$

par une aire plane $ABQP$ (tab. IV. fig. 2.) comprise entre l'axe des abscisses, une courbe PQ ou $y = F(x)$, et les ordonnées extrêmes AP et BQ, correspondantes aux abscisses $OA = x_0$ et $OB = x_n$. Elle est alors la limite de la somme des rectangles inscrits tels que $abcd$, quand le nombre de ces rectangles augmente à l'infini. Si par les points e et f, où les ordonnées prolongées da et cb coupent une courbe quelconque $P'Q'$, tracée dans l'angle XOZ, on mène des parallèles à OX, et du point i, où le prolongement de cd coupe l'axe des y, une parallèle ik à la corde ef de $P'Q'$, puis km parallèle à OZ, on formera une suite de rectangles tels que $ghlm$, qui respectivement seront égaux aux rectangles $abcd$. La somme des rectangles $abcd$ étant égale à celle des rectangles $ghlm$, ces deux sommes convergeront vers la même limite, qui, pour la dernière somme, sera représentée par l'aire $A'B'Q''P''$ comprise entre certaine courbe $P''Q''$, formée par les points l, l'axe OZ et les ordonnées extrêmes $A'P''$ et $B'Q''$, correspondantes aux abscisses $OA_1 = z_0$ et $B_1 = Oz_n$.

Il est évident qu'à la limite, lorsque le rectangle $ghlm$ devient infiniment petit, ik sera parallèle à la tangente en e à la courbe $P'Q'$, et si l'équation de cette courbe, par rapport aux axes OZ et OX des x et des z, est $x = \varphi(z)$, on aura alors

$$\mathrm{Tang}\, kiO = \frac{d.\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z)$$

de sorte que l'équation de $P''Q''$ sera

$$gl = Ok = Oi.\mathrm{Tang}\, kiO = y\varphi'(z) = F(x)\varphi'(z) = F(\varphi z)\varphi'(z);$$

par conséquent, si aux aires on substitue les intégrales qu'elles représentent, et remarquant que pour avoir l'aire $A'B'Q''P''$ on peut considérer z comme variable indépendante, l'on obtient

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \int_{z_0}^{z_n} F(\varphi z)\,\varphi'(z)\,dz,$$

et l'on voit sur la figure que $z_0 = OA'$ et $z_n = OB'$ sont déterminés par les équations

$$x_0 = \varphi(z_0), \quad x_n = \varphi(z_n).$$

La figure donne encore la démonstration de la formule pour la différentation des fonctions de fonctions. Quand on considère z comme variable primitive, y sera une fonction de fonction de z, et cn sera l'accroissement de y qui correspond à l'accroissement arbitraire gh de z, tandis que l'on a

$$cn = cd.\mathrm{Tang}\, ndc = ep.\mathrm{Tang}\, pef.\mathrm{Tang}\, ndc,$$

ce qui à la limite, lorsque ep est infiniment petit, devient

$$dy = dz \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}.$$

On peut étendre cette démonstration géométrique à un nombre quelconque de variables, en prenant successivement (tab. IV. fig. 3.) OU, OV, OW, etc. pour axes des u, v, w, etc., et traçant dans les angles droits ZOU, UOV, VOW, etc. des courbes pour représenter les fonctions $z = \varphi_1(u)$, $u = \varphi_2(v)$, $v = \varphi_3(w)$, etc. Alors on verra sur la figure que l'on a

$$dy = dF = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{d\varphi_1}{du} \cdot \frac{d\varphi_2}{dv} \cdot \frac{d\varphi_3}{dw}\, dw,$$

ou

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw}.$$

2.

Considérons maintenant en premier lieu l'intégrale double

$$J=\int_{x_0}^{x_n}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} F(x.y)dxdy,$$

et supposons qu'on veuille substituer aux variables x et y deux nouvelles variables u et v, liées aux premières par les relations

$$x=f_1(u.v),\quad y=f_2(u.v);$$

il faudra commencer par introduire à la place de y une des nouvelles variables v, et à cet effet on déduit des deux relations données, par l'élimination de l'autre variable u,

$$y=f(x.v),\quad dy=\frac{df}{dv}dv,$$

de sorte qu'en posant, pour déterminer les limites de v,

$$\psi(x)=f(x.v),\quad \varphi(x)=f(x.v),$$

et supposant que ces équations donnent

$$v=\psi_{,}(x),\quad v=\varphi_{,}(x),$$

on aura d'abord

$$J=\int_{x_0}^{x_n}\int_{\psi_{,}(x)}^{\varphi_{,}(x)} F(x.f)\frac{df}{dv}dv;$$

car pour chaque valeur particulière de x l'intégration par rapport à v donnera la même valeur que l'intégration par rapport à y dans l'intégrale primitive, de sorte qu'en les deux cas on aurait à intégrer ensuite par rapport à x la même fonction de x entre les mêmes limites x_0 et x_n.

Après cela il reste encore à remplacer x par l'autre nouvelle variable u, au moyen de la première relation donnée $x=f_1(u.v)$; mais on ne voit pas d'abord comment cela se pourrait faire, parce que cette relation contient v, qui est la variable de la première intégration à faire, de sorte qu'ainsi l'on est conduit à changer auparavant l'ordre des intégrations dans la dernière forme de J.

Laissant de côté, ici de même que dans ce qui suit, les cas où la fonction à intégrer deviendrait infinie ou discontenue entre les limites de l'intégration, on peut supposer que chacune des fonctions $\psi_{,}(x)$ et $\varphi_{,}(x)$ croisse toujours dans le même sens entre les limites x_0 et x_n.

S'il en était autrement, on pourrait partager l'intervalle de x_0 à x_n en parties, pour chacune desquelles cela eût lieu, ran-

geant à cet effet entre x_0 et x_n par ordre de grandeur les racines des équations

$$\frac{d\psi_{,}}{dx}=0,\quad \frac{d\varphi_{,}}{dx}=0,$$

qui seraient comprises entre ces limites, et alors à la place de J on aurait à considérer une somme d'intégrales semblables, pour chacune desquelles les fonctions $\psi_{,}$ et $\varphi_{,}$ satisferaient à la supposition.

Soit donc $x_n > x_0$, et supposons, pour fixer les idées, que chacune des fonctions $\psi_{,}(x)$ et $\varphi_{,}(x)$ s'accroisse positivement de x_0 à x_n, qu'entre ces limites on ait toujours $\psi_{,}(x) < \varphi_{,}(x)$, et que de plus $\psi_{,}(x_n) < \varphi_{,}(x_0)$. Alors l'intégrale J devra être étendue à tous les points d'une aire $ABCD$ (tab. IV. fig. 4.), comprise entre deux courbes AB et CD, dont les équations sont

$$v=\psi_{,}(x),\quad v=\varphi_{,}(x),$$

et les ordonnées extrêmes x_0D et x_nC, correspondantes aux abscisses x_0 et x_n, et il faut remarquer que, d'après les suppositions faites par rapport aux limites, cette aire doit être parcourue dans le sens des v et des x positifs. Cette intégrale sera donc égale à la somme de trois intégrales semblables, étendues respectivement aux aires ABE, $EBFD$ et DFC, dans lesquelles se partage l'aire $ABCD$. L'intégrale relative à la partie ABE s'obtiendra aussi en intégrant d'abord par rapport à x, depuis $x=x_0$ jusqu'à la valeur de $x=ab$ en fonction de v, que donne l'équation $v=\psi_{,}(x)$, et ensuite par rapport à v, depuis $v=x_0A=\psi_{,}(x_0)$ jusqu'à $v=x_0E=x_nB=\psi_{,}(x_n)$; celle relative à $EBFD$, en intégrant d'abord par rapport à x, depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=x_n$, et ensuite par rapport à v, depuis $v=x_0E=\psi_{,}(x_n)$ jusqu'à $v=x_0D=x_nF=\varphi_{,}(x_0)$; celle relative à DFC, en intégrant d'abord par rapport à x, depuis la valeur de $x=cd$ en fonction de v, que donne l'équation $v=\varphi_{,}(x)$, jusqu'à $x=x_n$, et ensuite par rapport à v, depuis $v=\varphi_{,}(x_0)$ jusqu'à $v=x_nC=\varphi_{,}(x_n)$. Ainsi, si des équations

$$v=\psi_{,}(x),\quad v=\varphi_{,}(x),$$

ou, ce qui revient au même, des équations

$$\psi(x)=f(x.v),\quad \varphi(x)=f(x.v),$$

on tire

$$x=\psi_{,,}(v),\quad x=\varphi_{,,}(v),$$

et, si l'on pose

$$F(x.f).\frac{df}{dx}=V,$$

on aura:

$$J=\int_{\psi_{,}(x_0)}^{\psi_{,}(x_n)}dv.\int_{x_0}^{\psi_{,,}(v)}Vdx+\int_{\psi_{,}(x_n)}^{\varphi_{,}(x_0)}dv.\int_{x_0}^{x_n}Vdx$$

$$+\int_{\varphi_{,}(x_0)}^{\varphi_{,}(x_n)}dv.\int_{\varphi_{,,}(v)}^{x_n}Vdx,$$

où l'ordre des intégrations est interverti.

Il importe de remarquer que cette formule subsiste toujours, quelles que soient les fonctions $\psi_{,}(x)$ et $\varphi_{,}(x)$, pourvu que chacune d'elles croisse toujours dans le même sens entre les limites x_0 et x_n. Supposons, par exemple, que les courbes $\psi_{,}(x)$ et $\varphi_{,}(x)$ se coupent entre x_0' et x_n, que la première s'accroisse tandis que la seconde décroisse constamment entre ces limites, comme le représente la fig. 5. tab. IV. Alors, ayant égard à la signification des limites, on verra que la partie de J, depuis le point de rencontre G des courbes $\psi_{,}$ et $\varphi_{,}$ jusqu'à l'ordonnée extrême, correspondante à x_n, est négative, de sorte que l'on aura

$$J=\text{intégr.}(AGD)-\text{intégr.}(GBC),$$

où maintenant les deux aires AGD et GBC doivent être parcourues dans le sens des x et v positifs; mais, dans ce même cas, la formule représentera

$$\text{intégr.}(ABE)-\text{intégr.}(EBFD)-\text{intégr.}(FDC),$$

où les trois aires doivent être parcourues dans le sens positif; ajoutant les deux dernières, elles se réduisent à

$$\text{intégr.}(ABE)-\text{intégr.}(BEDC)$$

ou

$$\text{intégr.}(AGD+EDGB)-\text{intégr.}(EDGB+BGC),$$

ce qui se réduit à la valeur précédente, parce que les termes $+EDGB$ et $-EDGB$ se détruisent. De la même manière on se convaincra de l'identité des deux dernières formes de J dans d'autres cas possibles.

Maintenant il est clair que l'on peut introduire u à la place de x, au moyen de la relation $x=f_1(u.v)$; car, quoique cette relation introduisse en même temps v, le résultat de la première integration, qui doit avoir lieu par rapport à u, sera la même

fonction de v, que celle que l'on aurait obtenue en intégrant par rapport à x, pourvù que les limites de u soient convenablement déduites de celles de x.

Ainsi, si $x = f_1(u.v)$, donne $u = \psi_{,,,}(x.v)$, aux limites

$$x_0, \quad x_n, \quad \psi_{,,}(v), \quad \varphi_{,,}(v)$$

de x, corresponderont respectivement les limites

$$\psi_{,,,}(x_0.v), \quad \psi_{,,,}(x_n.v), \quad \psi_{,,,}(\psi_{,,}v.v), \quad \psi_{,,,}(\varphi_{,,}v.v)$$

de u, et l'on aura

$$J = \int_{\psi_{,}(x_0)}^{\psi_{,}(x_n)} dv. \int_{\psi_{,,,}(x_0.v)}^{\psi_{,,,}(\psi_{,,}v.v)} V'du + \int_{\psi_{,}(x_n)}^{\varphi_{,}(x_0)} dv. \int_{\psi_{,,,}(x_0.v)}^{\psi_{,,,}(x_n.v)} V'du$$
$$+ \int_{\varphi_{,}(x_0)}^{\varphi_{,}(x_n)} dv. \int_{\psi_{,,,}(\varphi_{,,}v.v)}^{\psi_{,,,}(x_n.v)} V'du$$

où V' est ce que devient

$$V\frac{df_1}{du} = F(x.f)\frac{df}{dv}.\frac{df_1}{du},$$

lorsqu'à x on y substitue $f_1(u.v)$. Il est évident que par cette substitution $f(x.v) = y$ et $F(x.f)$ deviennent respectivement $f_2(u.v)$ et $F(f_1.f_2)$, tandis que pour savoir ce que devient $\frac{df}{dv}$ on différentie l'identité $f_2 = f(f_1.v)$ successivement par rapport à u et v, ce qui donne les équations

$$\frac{df_2}{dv} = \frac{df}{df_1}.\frac{df_1}{dv} + \frac{df}{dv},$$
$$\frac{df_2}{du} = \frac{df}{df_1}.\frac{df_1}{du};$$

dont la seconde sert à éliminer $\frac{df}{df_1}$, de sorte que l'on obtient

$$\frac{df_1}{du}.\frac{df}{dv} = \frac{df_1}{du}.\frac{df_2}{dv} - \frac{df_1}{dv}.\frac{df_2}{du};$$

donc, désignant par x et y les fonctions f_1 et f_2, on aura

$$V' = F(x.y).\left(\frac{dx}{du}.\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}.\frac{dy}{du}\right).$$

On voit ici que dans le calcul du facteur, qui multiplie le produit $dudv$ des nouvelles variables dans l'intégrale transformée, il faut qu'on prenne en considération par rapport à la quelle de ces variables doive avoir lieu la première intégration; car, dans

V' ce facteur change de signe si l'on échange entre-elles les variables u et v.

Il suit de ce qui précède que l'on obtient les limites dans l'intégrale transformée, si u est la variable de la première intégration :

1°. en éliminant y et u entre les relations $x = f_1(u.v)$, $y = f_2(u.v)$ et l'équation $y = \psi(x)$ ou $y = \varphi(x)$, ce qui donnera $v = \psi_,(x)$ et $v = \varphi_,(x)$;

2°. en éliminant entre les mêmes équations les anciennes variables x et y, ce qui donnera $u = \psi_{,,,}(\psi_{,,}v.v)$ et $u = \psi_{,,,}(\varphi_{,,}v.v)$; et

3°. en tirant $u = \psi_{,,,}(v.x)$ de $x = f_1(u.v)$.

Soit, pour prendre un exemple où la théorie s'applique facilement, l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x_n} \int_{y_0}^{y_n} dy\, dx,$$

où l'on voudrait substituer à x et y les variables u et v, au moyen des relations

$$x = u \operatorname{Cos} v, \quad y = u \operatorname{Sin} v;$$

on aura $\psi(x) = y_0$ et $\varphi(x) = y_n$. L'élimination de y et u entre ces deux relations et l'équation $y = y_0$ ou $y = y_n$ donne

$$v = \psi_,(x) = \operatorname{Arc\,Tang} \frac{y_0}{x}, \quad v = \varphi_,(x) = \operatorname{Arc\,Tang} \frac{y_n}{x};$$

celle de x et y entre les mêmes équations, ce qui dans ce cas particulier revient à éliminer y dans $y = u \operatorname{Sin} v$,

$$u = \psi_{,,,}(\psi_{,,}v.v) = \frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}, \quad u = \psi_{,,,}(\varphi_{,,}v.v) = \frac{y_n}{\operatorname{Sin} v};$$

et, $x = u \operatorname{Cos} v$, donne $u = \psi_{,,,}(v.x) = \dfrac{x}{\operatorname{Cos} v}$, tandis que l'on trouve $V = +u$; on a donc

$$J = \int_{\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_0}}^{\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_n}} \int_{\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v}}^{\frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}} u\, dv\, du + \int_{\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_n}}^{\operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_0}} \int_{\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v}}^{\frac{x_n}{\operatorname{Cos} v}} u\, dv\, du$$

$$+ \int_{\operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_0}}^{\operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_n}} \int_{\frac{y_n}{\operatorname{Sin} v}}^{\frac{x_n}{\operatorname{Cos} v}} u\, dv\, du.$$

La somme de ces trois intégrales donne en effet

$$J = (x_n - x_0)(y_n - y_0),$$

comme l'intégrale primitive; mais dans ce cas on peut aussi vérifier la transformée par des considérations géométriques. Soit $x_n > x_0$ et $y_n > y_0$, alors l'intégrale primitive est égale à l'aire positive $ABCD$ (tab. IV. fig. 6.), et les nouvelles variables sont les coordonnées polaires des points dont les anciennes sont les coordonnées rectangulaires. Intégrer udu par rapport à u, depuis $u = \frac{x_0}{\operatorname{Cos} v}$ jusqu'à $u = \frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}$, c'est prendre les éléments du plan qui, compris dans l'angle BAx_0, sont situés sur un même rayon vecteur faisant un angle v avec Ox_0, et cette somme est positive, parce qu'elle est prise dans le sens où ce rayon augmente; intégrer ensuite le résultat par rapport à v, depuis $\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_0}$ jusqu'à $\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_n}$, c'est-à-dire, depuis $v = AOx$ jusqu'à $v = BOx$, c'est prendre la somme des éléments qui sont compris dans le triangle BAE, mais cette somme sera négative, puisqu'elle est prise dans le sens où v diminue; donc la première partie de l'intégrale transformée donne $-$Aire AEB. La seconde partie donnera premièrement la somme positive des éléments qui, sur un même rayon vecteur, sont compris entre les ordonnées correspondantes aux abscisses x_0 et x_n, et ensuite la somme positive de ces éléments qui sont compris entre les rayons vecteurs OB et OD, c'est-à-dire l'aire $+EBFD$. La troisième partie donnera premièrement la somme positive des éléments, qui, sur un même rayon vecteur, sont compris dans l'angle DCF, et ensuite la somme négative de ces éléments, qui sont compris entre les rayons vecteurs OF et OC, c'est-à-dire $-$Aire FDC. Ainsi la transformée donnera

$$-\text{aire } AEB + \text{aire } EBFD - \text{aire } FDC,$$

ce qui se réduit à l'aire du rectangle $ABCD$.

Si l'on échange entre elles les lettres u et v dans les relations qui lient les nouvelles variables aux anciennes, c'est-à-dire, si l'on pose

$$x = v \operatorname{Cos} u, \quad y = v \operatorname{Sin} u,$$

on aura:

$$\psi_{,}(x) = \sqrt{(x^2 + y_0^2)}, \quad \varphi_{,}(x) = \sqrt{(x^2 + y_n^2)},$$

$$\psi_{,,}(\psi_{,}v . v) = \operatorname{Arc Sin} = \frac{y_0}{v}, \quad \psi_{,,}(\varphi_{,}v . v) = \operatorname{Arc Sin} = \frac{y_n}{v},$$

$$\psi_m(x.v) = \text{Arc}\,\text{Cos} = \frac{x}{v}, \quad \text{et} \quad V_1 = -v,$$

et la transformée sera:

$$J = -\Big\{ \int_{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)}}^{\sqrt{(x_n^2+y_0^2)}} v\,dv . \int_{\text{Cos}\,u = \frac{x_0}{v}}^{\text{Sin}\,u = \frac{y_0}{v}} du$$

$$+ \int_{\sqrt{(x_n^2+y_0^2)}}^{\sqrt{(x_0^2+y_n^2)}} v\,dv . \int_{\text{Cos}\,u = \frac{x_0}{v}}^{\text{Cos}\,u = \frac{x_n}{v}} du + \int_{\sqrt{(x_0^2+y_n^2)}}^{\sqrt{(x_n^2+y_n^2)}} v\,dv . \int_{\text{Sin}\,u = \frac{y_n}{v}}^{\text{Cos}\,u = \frac{x_n}{v}} du \Big\},$$

ce qui se vérifie encore aisément par des considérations géométriques. En effet (tab. IV. fig. 7.), intégrer par rapport à u depuis $\text{Cos}\,u = \frac{x_0}{v}$ jusqu'à $\text{Sin}\,u = \frac{y_0}{v}$, c'est-à-dire, de $u = mOX$ jusqu'à $u = nOX$, c'est prendre la somme négative des éléments du plan, qui sont compris dans l'angle EAB et situés sur un même arc de cercle mn, dont le rayon est $Om = v$; intégrer ensuite ce résultat par rapport à v, depuis

$$v = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)} \quad \text{jusqu'à} \quad v = \sqrt{(x_n^2 + y_0^2)},$$

c'est étendre cette somme à l'aire ABE, où BE est un arc de cercle décrit du centre O; ainsi le premier terme entre les crochets donne $-$aire ABE. Le second terme donne premièrement la somme négative de tous les éléments, qui sur un même arc de cercle, sont compris entre les ordonnées extrêmes, correspondantes aux abscisses x_0 et x_n, et ensuite la somme négative de ces éléments négatifs, parce que cette somme doit être prise dans un sens où, sur la figure, le rayon v diminue, la limite inférieure $\sqrt{(x_n^2+y_0^2)}$ étant plus grande que la limite supérieure $\sqrt{(x_0^2+y_n^2)}$; ainsi le deuxième terme donne $+$aire $DFBE$, où DF est un arc de cercle décrit du centre O. Le troisième revient à $-$aire DFC, et ainsi la transformée est

$$J = -\{-ABE + DFBE - DFC\}$$

ou

$$J = -\{-(ADb + DbBE) + (DbBE + bFB) - (bFB + DbBC)\}$$

et, réduisant,

$$J = ADb + DbBC = ABCD.$$

Si, dans la même intégrale, les relations entre les nouvelles et les anciennes variables sont

$$x = \alpha u + \beta v, \quad y = \alpha' u + \beta' v,$$

la transformée sera:

$$J=(\alpha\beta)\left\{\int_{\frac{\alpha y_0-\alpha' x_0}{(\alpha\beta)}}^{\frac{\alpha y_0-\alpha' x_n}{(\alpha\beta)}} dv.\int_{\frac{x_0-\beta v}{\alpha}}^{\frac{y_0-\beta' v}{\alpha'}} du\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\alpha y_0-\alpha' x_n}{(\alpha\beta)}}^{\frac{\alpha y_n-\alpha' x_0}{(\alpha\beta)}} dv.\int_{\frac{x_0-\beta v}{\alpha}}^{\frac{x_n-\beta v}{\alpha}} du+\int_{\frac{\alpha y_n-\alpha' x_0}{(\alpha\beta)}}^{\frac{\alpha y_n-\alpha' x_n}{(\alpha\beta)}} dv.\int_{\frac{y_n-\beta' v}{\alpha'}}^{\frac{x_n-\beta v}{\alpha}} du\right\},$$

où $(\alpha\beta)$ désigne le déterminant $\alpha\beta'-\alpha'\beta$.

3.

Considérons maintenant l'intégrale triple

$$J=\int_{x_0}^{x_n}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\int_{\pi(x.y)}^{\varpi(x.y)} V dx dy dz,$$

qui doit être étendue à tous les points de l'espace compris entre les surfaces courbes *ABCD* et *EFGH* (tab. IV. fig. 8.) ou $z=\pi(x.y)$ et $z=\varpi(x.y)$, et terminée d'une part par deux portions de cilindres *HPQG* et *ERSF*, dont les équations, ainsi que celles de leurs intersections *PQ* et *RS* avec le plan des xy, soient $y=\psi(x)$ et $y=\varphi(x)$, et de l'autre par les plans $x=x_0=OJ$, $x=x_n=OK$. Les différentes manières dont on peut parcourir cet espace donneront lieu à autant de changements dans l'ordre des intégrations.

On peut admettre qu'entre les limites de l'intégrale les surfaces π et ϖ n'ont aucun point pour lequel le plan tangent est parallèle au plan des xy, car, analoguement à ce qui a été dit pour l'intégrale double, on peut toujours décomposer J en parties, qui satisfont à cette supposition. Supposons de plus qu'entre ces limites on ait toujours

$$\varphi(x)>\psi(x),\quad \varpi(x.y)>\pi(x.y),$$

que ces fonctions augmentent en même temps que x et y, et que de plus des valeurs particulières

$$KQ=\psi(x_n)\ \text{ et }\ JR=\varphi(x_0),$$

ainsi que de

$$CQ = \pi(x_n . \psi x_n) \text{ et } AR = \pi(x_0 . \varphi x_0),$$
$$SB = \pi(x_n . \varphi x_n) \text{ et } PH = \overline{\omega}(x_0 . \psi x_0),$$
$$GQ = \overline{\omega}(x_n . \psi x_n) \text{ et } RE = \overline{\omega}(x_0 . \varphi x_0),$$

la seconde soit plus grande que la première.

Après cela, si x doit rester la variable de la dernière intégration, on coupera l'espace AF par des plans parallèles au plan des yz, ce qui donnera des intersections comme la fig. 9. tab. IV., où

$$AB = \psi(x), \qquad AC = \varphi(x),$$
$$BD = \pi(x . \psi x), \qquad CE = \pi(x . \varphi x),$$
$$BF = \overline{\omega}(x . \psi x), \qquad CG = \overline{\omega}(x . \varphi x),$$

tandis que les équations des courbes DE et FG sont

$$z = \pi(x . y), \quad z = \overline{\omega}(x . y),$$

où x est considerée comme une constante; et après avoir étendu l'intégrale à l'aire $DEFG$, on intégrera le résultat par rapport à x, de x_0 à x_n. Ici on peut intervertir l'ordre des intégrations par rapport à y et z, et si des équations des courbes DE et FG on tire

$$y = \pi_{,}(x . z), \quad y = \overline{\omega}_{,}(x . z),$$

on aura, comme il a été montré pour les intégrales doubles,

$$J = \int_{x_0}^{x_n} dx \left\{ \Big|_{\pi(x . \psi x)}^{\pi(x . \varphi x)} dz \Big|_{\psi(x)}^{\pi_{,}(x . z)} V dy + \Big|_{\pi(x . \varphi x)}^{\overline{\omega}(x . \psi x)} dz \Big|_{\psi(x)}^{\varphi(x)} V dy \right.$$
$$\left. + \Big|_{\overline{\omega}(x . \psi x)}^{\overline{\omega}(x . \varphi x)} dz \Big|_{\overline{\omega}_{,}(x . z)}^{\varphi(x)} V dy \right\}.$$

Si y doit devenir la variable de la dernière intégration, on prendra les plans sécants parallèles au plan des xz, ce qui donnera encore des intersections comme la fig. 9. tab. IV., mais ici on aura à distinguer trois cas par rapport au plan sécant; c'est-à-dire, si les équations des courbes PQ et RS, ou $y = \psi(x)$, $y = \varphi(x)$ donnent $x = \psi_{,}(y)$, $x = \varphi_{,}(y)$, on aura

1°. de $y = JP = \psi(x_0)$ jusqu'à $y = KQ = \psi(x_n)$:

$$AB = x_0, \qquad AC = \psi_{,}(y),$$
$$BD = \pi(x_0 . y), \qquad CE = \pi(\psi_{,}y . y),$$
$$BF = \overline{\omega}(x_0 . y), \qquad CG = \overline{\omega}(\psi_{,}y . y);$$

2°. de $y = \psi(x_n)$ à $y = JR = \varphi(x_0)$:

$$\begin{aligned} AB &= x_0, & AC &= x_n, \\ BD &= \pi(x_0.y), & CE &= \pi(x_n.y), \\ BF &= \varpi_0(x_0.y), & CG &= \varpi(x_n.y); \end{aligned}$$

3⁰. de $y=\varphi(x_0)$ à $y=KS=\varphi(x_n)$:

$$\begin{aligned} AB &= \varphi_{,}(y), & AC &= x_n, \\ BD &= \pi(\varphi_{,}y.y), & CE &= \pi(x_n.y), \\ BF &= \varpi(\varphi_{,}y.y), & CG &= \varpi(x_n.y); \end{aligned}$$

tandis que les équations des courbes DE et FG sont

$$z=\pi(x.y),\quad z=\varpi(x.y),$$

AC étant l'axe des x, et y étant constant. Ainsi, quand z reste la variable de la première intégration J devient la somme de trois intégrales, savoir:

$$J=\Big|_{\psi(x_0)}^{\psi(x_n)}dy\Big|_{x_0}^{\psi_{,}(y)}dx\Big|_{\pi(x.y)}^{\varpi(x.y)}Vdz+\Big|_{\psi(x_n)}^{\varphi(x_0)}dy\Big|_{x_0}^{x_n}dx\Big|_{\pi(x.y)}^{\varpi(x.y)}Vdz$$
$$+\Big|_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x_n)}dy\Big|_{\varphi_{1}(y)}^{x_n}dx\Big|_{\pi(x.y)}^{\varpi(x.y)}Vdz;$$

mais, quand on prend x pour la variable de la première intégration, chacune de ces intégrales se partage de nouveau en trois autres, et, si des équations des courbes DE et FG on tire

$$x=\pi_{,,}(y.z),\quad y=\varpi_{,,}(y.z),$$

on aura, comme il a été montré pour les intégrales doubles,

$$\begin{aligned} J=&\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x_n)}dy\Big\{\Big|_{\pi(x_0.y)}^{\pi(\psi_{,}y.y)}dz\Big|_{x_0}^{\pi_{,}(y.z)}Vdx+\Big|_{\pi(\psi_{,}y.y)}^{\varpi(x_0.y)}dz\Big|_{x_0}^{\psi_{,}(y)}Vdx \\ &\qquad+\Big|_{\varpi(x_0.y)}^{\varpi(\psi_{,}y.y)}dz\Big|_{\varpi_{,}(y.z)}^{\psi_{,}(y)}Vdx\Big\} \\ &+\int_{\psi(x_n)}^{\varphi(x_0)}dy\Big\{\Big|_{\pi(x_0.y)}^{\pi(x_n.y)}dz\Big|_{x_0}^{\pi_{,}(y.z)}Vdx+\Big|_{\pi(x_n.y)}^{\varpi(x_0.y)}dz\Big|_{x_0}^{x_n}Vdx \\ &\qquad+\Big|_{\varpi(x_0.y)}^{\varpi(x_n.y)}dz\Big|_{\varpi_{,}(y.z)}^{x_n}Vdx\Big\} \\ &+\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x_n)}dy\Big\{\Big|_{\pi(\varphi_{,}y.y)}^{\pi(x_n.y)}dz\Big|_{\varphi_{,}(y)}^{\pi_{,}(y.z)}Vdx+\Big|_{\pi(x_n.y)}^{\varpi(\varphi_{,}y.y)}dz\Big|_{\varphi_{,}(y)}^{x_n}Vdx \\ &\qquad+\Big|_{\varpi(\varphi_{,}y.y)}^{\varpi(x_n.y)}dz\Big|_{\varpi_{,}(y.z)}^{x_n}Vdx\Big\}. \end{aligned}$$

Si z doit devenir la variable de la dernière intégration, on prendra les plans sécants (tab. IV. fig. 8.) parallèles au plan des xy, et leurs intersections avec l'espace limité DF seront:

1°. De $z = PD = \pi(x_0 . \psi x_0)$ jusqu'à $z = CQ = \pi(x_n . \psi x_n)$, des triangles mixtilignes APb, l'équation de la courbe ab étant $z = \pi(x.y)$ ou $y = \pi_{,}(x.z)$, où z est constant. Les coordonnées du point b sont déterminées par cette équation et l'équation de la courbe PQ, $y = \psi(x)$; supposons que l'on en tire $x = \psi_{,,}(z)$, alors on étendra l'intégrale à l'aire dont APb est la projection, en intégrant d'abord par rapport à y, de $y = mn = \psi(x)$ jusqu'à $y = mo = \pi_{,}(x.z)$, et ensuite par rapport à x, de $x = x_0$ jusqu'à $x = Ob' = \psi_{,,}(z)$.

2°. De $z = \pi(x_n . \psi x_n)$ jusqu'à $z = AR = \pi(x_0 . \varphi x_0)$, des quadrilatères mixtilignes $PcdQ$, l'équation de cd étant encore $z = \pi(x.y)$, ou $y = \pi_{,}(x.z)$, de sorte qu'entre ces limites de z, on intégrera premièrement par rapport à y, de $y = \psi(x)$ jusqu'à $y = \pi_{,}(x.z)$, puis par rapport à x, de $x = x_0$ jusqu'à $x = x_n$.

3°. De $z = \pi(x_0 . \varphi x_0)$ jusqu'à $z = BS = \pi(x_n . \varphi x_n)$, des pentagones mixtilignes $PRefQ$, les coordonnées du point e étant déterminées par l'équation de ef, $z = \pi(x.y)$ ou $y = \pi_{,}(x.z)$, et par celle de RS, $y = \varphi(x)$; si celles-ci donnent $x = \varphi_{,,,}(z)$, l'intégration pour ces aires se partagera en deux parties, de $x = x_0$ jusqu'à $x = \varphi_{,,,}(z)$, il faudra intégrer de $y = \psi(x)$ jusqu'à $y = \varphi(x)$, et de $x = \varphi_{,,,}(z)$ jusqu'à $x = x_n$, de $y = \psi(x)$ jusqu'à $y = \pi_{,}(x.z)$.

4°. De $z = \pi(x_n . \varphi x_n)$ jusqu'à $z = PH = \overline{\omega}(x_0 . \psi x_0)$, des quadrilatères mixtilignes $PQSR$, pour lesquels on intégrera de $y = \psi(x)$ jusqu'à $y = \varphi(x)$, puis de $x = x_0$ jusqu'à $x = x_n$.

A partir de $z = PH$, les différentes sortes d'aires reviendront en ordre inverse, de sorte que les intersections seront:

5°. de $z = \overline{\omega}(x_0 . \psi x_0)$ jusqu'à $z = GQ = \overline{\omega}(x_n . \psi x_n)$, des pentagones $abQSR$, les coordonnées de b étant déterminées par l'équation de ab, $z = \overline{\omega}(x.y)$ ou $y = \overline{\omega}_{,}(x.z)$ et par celle de PQ, $y = \psi(x)$; si celles-ci donnent $x = \psi_{,,,}(z)$, l'intégration pour ces aires se partagera en deux parties, de $x = x_0$ jusqu'à $x = \psi_{,,,}(z)$ il faudra intégrer de $y = \overline{\omega}_{,}(x.z)$ jusqu'à $y = \varphi(x)$, et de $x = \psi_{,,,}(z)$ jusqu'à $x = x_n$, de $y = \psi(x)$ à $y = \varphi(x)$.

6°. De $z = \overline{\omega}(x_n . \psi x_n)$ jusqu'à $z = ER = \overline{\omega}(x_0 . \varphi x_0)$, des quadrilatères $cdSR$, l'équation de cd étant $z = \overline{\omega}(x.y)$ ou $y = \overline{\omega}_{,}(x.z)$, de sorte qu'entre ces limites de z on intégrera premièrement par rapport à y, depuis $y = \overline{\omega}_{,}(x.z)$ jusqu'à $y = \varphi(x)$, puis par rapport à x, de $x = x_0$ jusqu'à $x = x_n$.

7°. De $z = \varpi(x_0 . \varphi x_0)$ jusqu'à $z = FS = \varpi(x_n . \varphi x_n)$, des triangles efS, les coordonnées de e étant déterminées par l'équation de ef, $y = \varpi_,(x.z)$, et par celle de RS, $y = \varphi(x)$, si celles-ci donnent $x = \varphi_{,,}(z)$, l'intégration aura lieu d'abord par rapport à y, de $y = \varpi_,(x.z)$ jusqu'à $y = \varphi(x)$, puis par rapport à x, de $x = \varphi_{,,}(z)$ jusqu'à $x = x_n$.

Ainsi on aura:

$$J = \Big|_{\pi(x_0.\psi x_0)}^{\pi(x_n.\psi x_n)} dz \Big|_{x_0}^{\psi_{,,}(z)} dx \Big|_{\psi(x)}^{\pi_,(x.z)} V dy + \Big|_{\pi(x_n.\psi x_n)}^{\pi(x_0.\varphi x_0)} dz \Big|_{x_0}^{x_n} dx \Big|_{\psi(x)}^{\pi_,(x.z)} V dy$$

$$+ \Big|_{\pi(x_0.\varphi x_0)}^{\pi(x_n.\varphi x_n)} dz \left\{ \Big|_{x_0}^{\varphi_{,,,}(z)} dx \Big|_{\psi(x)}^{\varphi(x)} V dy + \Big|_{\varphi_{,,,}(z)}^{x_n} dx \Big|_{\psi(x)}^{\pi_,(x.z)} V dy \right\}$$

$$+ \Big|_{\pi(x_n.\psi x_n)}^{\varpi(x_0.\varphi x_0)} dz \Big|_{x_0}^{x_n} dx \Big|_{\psi(x)}^{\varphi(x)} V dy$$

$$+ \Big|_{\varpi(x_0.\psi x_0)}^{\varpi(x_n.\psi x_n)} dz \left\{ \Big|_{x_0}^{\psi_{,,,}(z)} dx \Big|_{\varpi_,(x.z)}^{\varphi(x)} V dy + \Big|_{\psi_{,,,}(z)}^{x_n} dx \Big|_{\psi(x)}^{\varphi(x)} V dy \right\}$$

$$+ \Big|_{\varpi(x_n.\psi x_n)}^{\varpi(x_0.\varphi x_0)} dz \Big|_{x_0}^{x_n} dx \Big|_{\varpi_,(x.z)}^{\varphi(x)} V dy + \Big|_{\varpi(x_0.\varphi x_0)}^{\varpi(x_n.\varphi x_n)} dz \Big|_{\varphi_{,,}(z)}^{x_n} dx \Big|_{\varpi_,(x.z)}^{\varphi(x)} V dy.$$

Pour changer encore dans ce résultat l'ordre des intégrations par rapport à x et y, on remarquera dans les figures 8. et 10. tab. IV., que l'on a

$$Ja \text{ et } Jc = \pi_,(x_0 . z), \qquad b'b = \psi(\psi_{,,} z) = \pi_,(\psi_{,,} z . z),$$
$$b'e = \varphi(\psi_{,,,} z) = \pi_,(\psi_{,,,} z . z), \qquad Kd \text{ et } Kf = \pi_,(x_n . z),$$

tant que le plan sécant coupe la surface π; et,

$$Ja \text{ et } Jc = \varpi_,(x_0 . z), \qquad b'b = \psi(\varphi_{,,,} z) = \varpi_,(\varphi_{,,,} z . z),$$
$$b'e = \varphi(\varphi_{,,} z) = \varpi_,(\varphi_{,,} z . z), \qquad Kd \text{ et } Kf = \varpi_,(x_n . z),$$

quand le plan sécant coupe la surface ϖ. Alors, si l'on suppose que les différentes intersections sont semblables à celles qui sont représentées dans la fig. 10. tab. IV., ce qui, comme on l'a vu pour les intégrales doubles, donnera toujours la valeur des intégrales étendues à ces aires, pourvuque les ordonnées des courbes ab, cd, ef, comme celles de PQ et RS, augmentent toujours dans le même sens entre les limites de x, on aura:

$$J = \int_{\pi(z_0.\psi z_0)}^{\pi(z_n.\psi z_n)} dz \left\{ \int_{\psi(z_0)}^{\pi_{,}(z_0.z)} dy \int_{z_0}^{\psi_{,}(y)} V dx + \int_{\pi_{,}(z_0.z)}^{\psi(\psi_{,,}z)} dy \int_{\pi_{,,}(y.z)}^{\psi_{,}(y)} V dx \right\}$$

$$+ \int_{\pi(z_n.\psi z_n)}^{\pi(z_0.\varphi z_0)} dz \left\{ \int_{\psi(z_0)}^{\psi(z_n)} dy \int_{z_0}^{\psi_{,}(y)} V dx + \int_{\psi(z_n)}^{\pi_{,}(z_0.z)} dy \int_{z_0}^{z_n} V dx + \int_{\pi_{,}(z_0.z)}^{\pi_{,}(z_n.z)} dy \int_{\pi_{,,}(y.z)}^{z_n} V dx \right\}$$

$$+ \int_{\pi(z_0.\varphi z_0)}^{\pi(z_n.\varphi z_n)} dz \left\{ \int_{\psi(z_0)}^{\psi(z_n)} dy \int_{z_0}^{\psi_{,}(y)} V dx + \int_{\psi(z_n)}^{\varphi(z_0)} dy \int_{z_0}^{z_n} V dx + \int_{\varphi(z_0)}^{\varphi(\psi_{,,,}z)} dy \int_{\varphi_{,}(y)}^{z_n} V dx + \int_{\varphi(\psi_{,,,}z)}^{\pi_{,}(z_n.z)} dy \int_{\pi_{,,}(y.z)}^{z_n} V dx \right\}$$

$$+ \int_{\pi(z_n.\varphi z_n)}^{\varpi(z_0.\psi z_0)} dz \left\{ \int_{\psi(z_0)}^{\psi(z_n)} dy \int_{z_0}^{\psi_{,}(y)} V dx + \int_{\psi(z_n)}^{\varphi(z_0)} dy \int_{z_0}^{z_n} V dx + \int_{\varphi(z_0)}^{\varphi(z_n)} dy \int_{\varphi_{,}(y)}^{z_n} V dx \right\}$$

$$+ \int_{\varpi(z_0.\psi z_0)}^{\varpi(z_n.\psi z_n)} dz \left\{ \int_{\varpi_{,}(z_0.z)}^{\psi(\varphi_{,,,}z)} dy \int_{z_0}^{\varpi_{,,}(y.z)} V dx + \int_{\psi(\varphi_{,,,}z)}^{\psi(z_n)} dy \int_{z_0}^{\psi_{,}(y)} V dx + \int_{\psi(z_n)}^{\varphi(z_0)} dy \int_{z_0}^{z_n} V dx + \int_{\varphi(z_0)}^{\varphi(z_n)} dy \int_{\varphi_{,}(y)}^{z_n} V dx \right\}$$

$$+ \int_{\varpi(z_n.\psi z_n)}^{\varpi(z_0.\varphi z_0)} dz \left\{ \int_{\varpi_{,}(z_0.z)}^{\varpi_{,}(z_n.z)} dy \int_{z_0}^{\varpi_{,,}(y.z)} V dx + \int_{\varpi_{,}(z_n.z)}^{\varphi(z_0)} dy \int_{z_0}^{z_n} V dx + \int_{\varphi(z_0)}^{\varphi(z_n)} dy \int_{\varphi_{,}(y)}^{z_n} V dx \right\}$$

$$+ \int_{\varpi(z_0.\varphi z_0)}^{\varpi(z_n.\varphi z_n)} dz \left\{ \int_{\varphi(\varphi_{,,}z)}^{\varpi_{,}(z_n.z)} dy \int_{\varphi_{,}(y)}^{\varpi_{,,}(y.z)} V dx + \int_{\varpi_{,}(z_n.z)}^{\varphi(z_n)} dy \int_{\varphi_{,}(y)}^{z_n} V dx \right\}.$$

4.

Supposons ensuite que dans la même intégrale triple on veuille substituer de nouvelles variables $u.v.w$, liées aux anciennes par les relations

$$x = f_1(u.v.w), \quad y = f_2(u.v.w), \quad z = f_3(u.v.w);$$

on déduira de celles-ci, par l'élimination de u et v,

$$z = F_1(x.y.w), \quad dz = \frac{dF_1}{dw} dw,$$

de sorte qu'à la place de z on peut introduire w, ce qui donnera

$$J = \int dx \int dy \int V(x.y.F_1) \frac{dF_1}{dw} dw,$$

où l'on déduira les limites de w de celles données pour z, au moyen de l'équation $z = F_1(x.y.w)$. Dans cette intégrale on intervertira l'ordre des intégrations par rapport à y et w, et J deviendra alors la somme de trois intégrales semblables, savoir:

$$J = \Sigma \int dx \int dw \int V(x.y.F_1) \frac{dF_1}{dw} dy,$$

où à la place de y on pourra introduire une des nouvelles variables v, en déduisant des relations

$$x = f_1(u.v.w), \quad y = f_2(u.v.w),$$

par l'élimination de l'autre variable u,

$$y = F_2(x.v.w), \quad dy = \frac{dF_2}{dv} dv,$$

et J deviendra

$$J = \Sigma \int dx \int dw \int V(x.F_2.F_1) \frac{dF_1}{dw} \cdot \frac{dF_2}{dv} dv,$$

où l'on déterminera les limites de v, au moyen de celles trouvées pour y dans l'intégrale précédente, et de l'équation $y = F_2(x.v.w)$. Enfin on changera dans celle-ci l'ordre des intégrations tellement que x devienne la variable de la première intégration; alors à la place de x on peut introduire la dernière nouvelle variable u, au moyen des équations

$$x = f_1(u.v.w), \quad dx = \frac{df_1}{du} du,$$

dont la première servira aussi à déduire les limites de u de celles de x dans la dernière transformation de J. Finalement l'on obtient ainsi

$$J = \Sigma \int dw \int dv \int V(f_1 . F_2 . F_1) \frac{dF_1}{dw} . \frac{dF_2}{dv} . \frac{df_1}{du} du,$$

où dans F_2 et F_1, ainsi que dans leurs coefficients différentiels, il reste encore à substituer f_1 et f_2 à la place de x et y.

Remarquant que des relations

$$x = f_1(u.v.w), \quad y = f_2(u.v.w), \quad z = f_3(u.v.w),$$

on a tiré successivement

$$z = F_1(x.y.w), \quad y = F_2(x.v.w),$$

il est évident que la substitution des trois premières dans les deux dernières équations donnera des identités, savoir

$$f_3 = F_1(f_1 . f_2 . w), \quad f_2 = F_2(f_1 . f_2 . w),$$

donc $V(f_1 . F_2 . F_1)$ devient $V(f_1 . f_2 . f_3)$. De plus, on peut différentier ces identités par rapport à l'une quelconque des lettres u, v, w, et ainsi la première d'elles donne, écrivant x, y, z, pour désigner les fonctions $f_1 . f_2 . f_3$ de u, v et w,

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dF_1}{dx} . \frac{dx}{dw} + \frac{dF_1}{dy} . \frac{dy}{dw} + \frac{dF_1}{dw},$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dF_1}{dx} . \frac{dx}{dv} + \frac{dF_1}{dy} . \frac{dy}{dv},$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{dF_1}{dx} . \frac{dx}{du} + \frac{dF_1}{dy} . \frac{dy}{du},$$

dont les deux dernières serviront à éliminer $\frac{dF_1}{dx}$ et $\frac{dF_1}{dy}$ de la première, qui alors donnera $\frac{dF_1}{dw}$.

Désignons à cet effet par $D^{x.y.z}_{u.v.w}$ le déterminant

$$D^{x.y.z}_{u.v.w} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} . \frac{dx}{dv} . \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} . \frac{dy}{dv} . \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} . \frac{dz}{dv} . \frac{dz}{dw} \end{vmatrix},$$

et représentons de la même manière les déterminants d'ordre inférieur qui peuvent être formés des éléments du précédent, de sorte que

$$D^{x.y}_{u.v} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} \cdot \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}, \qquad D^{z.y}_{u.v} = \begin{vmatrix} \frac{dz}{du} \cdot \frac{dz}{dv} \\ \frac{dy}{du} \cdot \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}, \quad \text{etc.},$$

et que

$$D^{z.y}_{u.v} = -D^{y.z}_{u.v}, \quad \text{etc.},$$

alors les deux dernières des trois équations précédentes donnent

$$\frac{dF_1}{dx} = \frac{D^{z.y}_{u.v}}{D^{x.y}_{u.v}} = -\frac{D^{y.z}_{u.v}}{D^{x.y}_{u.v}}, \quad \frac{dF_1}{dy} = \frac{D^{x.z}_{u.v}}{D^{x.y}_{u.v}}.$$

Substituant ces valeurs dans la première, l'on trouve:

$$D^{x.y}_{u.v} \cdot \frac{dF_1}{dw} = \frac{dx}{dw} \cdot D^{y.z}_{u.v} - \frac{dy}{dw} \cdot D^{x.z}_{u.v} + \frac{dz}{dw} \cdot D^{x.y}_{u.v},$$

ce qui, d'après la règle pour la formation des déterminants, se réduit à

$$\frac{dF_1}{dw} = \frac{D^{x.y.z}_{u.v.w}}{D^{x.y}_{u.v}};$$

différentiant ensuite l'identité

$$f_2 = F_2(f_1 . v . w), \quad \text{ou} \quad y = F_2(x . v . w),$$

par rapport à v pour obtenir $\frac{dF_2}{dv}$, et par rapport à u pour éliminer $\frac{dF_2}{dx}$, on a

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dF_2}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{dF_2}{dv},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dF_2}{dx} \cdot \frac{dx}{du},$$

d'où

$$\frac{dF_2}{dv} = \frac{D^{x.y}_{u.v}}{\frac{dx}{du}}.$$

Donc on trouvera

$$J = \Sigma \int dw \int dv \int V(x.y.z).D_{u.v.w}^{x.y.z}.du,$$

où x, y, z, représentent les fonctions f_1, f_2, f_3. La forme de J, faisant abstraction des limites, ne change pas, si la première integration doit avoir lieu par rapport à v, mais le déterminant devient alors

$$D_{v.u.w}^{x.y.z} = -D_{u.v.w}^{x.y.z},$$

parce qu'on a échangé entre-elles deux colonnes, et il reprendrait le signe $+$ si $v.w.u$ serait l'ordre des intégrations.

5.

Pour le cas général nous démontrerons auparavant que dans une intégrale multiple quelconque on peut changer arbitrairement l'ordre des intégrations. A cet effet il suffira de montrer que l'on peut intervertir l'ordre de deux intégrations successives, car alors la répétition de ce procédé pour la même variable amènera celle-ci à un rang quelconque dans l'ordre des intégrations. Supposons que x_1, x_2, ... x_p, ... x_n soient les variables des intégrations successives, et que l'on veuille intervertir l'ordre des intégrations par rapport à x_p et x_{p+1}, tellement que celle par rapport à x_{p+1} doive avoir lieu avant celle par rapport à x_p. On peut admettre que les intégrations successives jusqu'à celle par rapport à x_p ont été effectuées, de sorte qu'en posant

$$\int dx_{p-1} \int dx_{p-2} \dots \int V dx_1 = V_1(x_n . x_{n-1} \dots x_{p+1} . x_p)$$

l'intégrale à pris la forme

$$J = \int_a^b dx_n \int_{\psi_{n-1}(x_n)}^{\varphi_{n-1}(x_n)} dx_{n-1} \int_{\psi_{n-2}(x_n . x_{n-1})}^{\varphi_{n-2}(x_n . x_{n-1})} dx_{n-2} \dots$$

$$\dots \int_{\psi_{p+1}(x_n . x_{n-1} \dots x_{p+2})}^{\varphi_{p+1}(x_n . x_{n-1} \dots x_{p+2})} dx_{p+1} \int_{\psi_p(x_n . x_{n-1} \dots x_{p+1})}^{\varphi_p(x_n . x_{n-1} \dots x_{p+1})} V_1 dx_p.$$

Soit ξ_n une valeur particulière de x_n entre les limites constantes de la dernière intégration; ξ_{n-1} une valeur particulière de x_{n-1} entre les limites $\psi_{n-1}(\xi_n)$ et $\varphi_{n-1}(\xi_n)$; ξ_{n-2} une valeur particulière de x_{n-2} entre les limites $\psi_{n-2}(\xi_n . \xi_{n-1})$ et $\varphi_{n-2}(\xi_n . \xi_{n-1})$; .... etc. ξ_{p+2} une valeur particulière de x_{p+2} entre les valeurs

particulières que prennent ces limites pour les valeurs particulières des variables qui précèdent; alors

$$J' = \int_{\psi_{p+1}(\xi_n.\xi_{n-1}\ldots\xi_{p+2})}^{\varphi_{p+1}(\xi_n.\xi_{n-1}\ldots\xi_{p+2})} dx_{p+1}$$

$$\int_{\psi_p(\xi_n.\xi_{n-1}\ldots\xi_{p+2}.x_{p+1})}^{\varphi_p(\xi_n.\xi_{n-1}\ldots\xi_{p+2}.x_{p+1})} V_1(\xi_n.\xi_{n-1}\ldots\xi_{p+2}.x_{p+1}.x_p)\,dx_p$$

sera une intégrale double de la même forme que celle considérée ci-dessus, savoir:

$$\int_{x_0}^{x_n} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} V(x.y)\,dy,$$

et qui comme celle-ci peut être transformée en

$$J'' = \int_{\psi_p(\xi_n\ldots\xi_{p+2}\psi_{p+1})}^{\psi_p(\xi_n\ldots\xi_{p+2}.\varphi_{p+1})} dx_p \int_{\psi_{p+1}}^{\psi_p'(\xi_n\ldots\xi_{p+2}.x_p)} V_1\,dx_{p+1}$$

$$+\int_{\psi_p(\xi_n\ldots\xi_{p+2}.\varphi_{p+1})}^{\varphi_p(\xi_n\ldots\xi_{p+2}.\psi_{p+1})} dx_p \int_{\psi_{p+1}}^{\varphi_{p+1}} V_1\,dx_{p+1}$$

$$+\int_{\varphi_p(\xi_n\ldots\xi_{p+2}.\psi_{p+1})}^{\varphi_p(\xi_n\ldots\xi_{p+2}.\varphi_{p+1})} dx_p \int_{\varphi_p'(\xi_n.\xi_{n-1}\ldots\xi_{p+2}.x_p)}^{\varphi_{p+1}} V_1\,dx_{p+1},$$

où l'on suppose que les équations $x_p = \psi_p$ et $x_p = \varphi_p$ ont donné $x_{p+1} = \psi_p'$ et $x_{p+1} = \varphi_p'$. Pour un système quelconque de valeurs particulières $\xi_n.\xi_{n-1}\ldots.\xi_{p+2}$ la valeur que donne J'' sera égale à celle que donne J'; si donc on déterminait J' et J'' en fonctions de $\xi_n.\xi_{n-1}\ldots.\xi_{p+2}$, on obtiendrait deux fonctions, qui pour un nombre infini de valeurs de leurs variables auraient des valeurs égales, donc il faut que ces fonctions soient identiquement égales, c'est-à-dire l'expression analytique de J'' sera après réduction la même que celle de J'. Il est donc permis d'intervertir dans J l'ordre des intégrations par rapport à x_p et x_{p+1} comme si x_1, x_2, ... x_{p-1} fussent des constantes données, parce qu'en intégrant dans la transformée d'abord par rapport à x_{p+1} et ensuite par rapport à x_p on obtiendra la même fonction de $x_n.x_{n-1}\ldots.x_{p+2}$ que si l'on eût intégré dans l'intégrale primitive d'abord par rapport à x_p et ensuite par rapport à x_{p+1}.

Ecrivant dans J' et J'' $x_n.x_{n-1}\ldots.x_{p+2}$ à la place de

$\xi_n . \xi_{n-1}, \ldots . \xi_{p+2}$, il résultera de l'identité $J' = J''$, en l'intégrant successivement par rapport à ces variables entre les mêmes limites que celles dans J,

$$J = \Sigma \int dx_n \int dx_{n-1} \ldots . \int dx_p \int V_1 dx_{p+1},$$

où Σ désigne la somme de trois intégrales semblables, entre les limites déterminées par ce qui précède, et où l'on remettra pour V_1 l'intégrale qu'elle représente.

Si ensuite x_p doit encore monter d'un rang vers la gauche, on supposera effectuée l'intégration par rapport à x_{p+1}, et l'on écrira chacune des parties de J sous la forme

$$\int dx_n \ldots . \int dx_{p+2} \int V_2 dx_p \quad \text{où} \quad V_2 \text{ représente } \int V_1 dx_{p+1},$$

et l'on appliquera ce qui précède à x_{p+2} et x_p. Si au contraire x_{p+1} devrait descendre encore d'un rang vers la droite on mettra en évidence dans J la dernière intégration, celle par rapport à x_{p-1}, en écrivant chaque partie de J sous la forme

$$\int dx_n \ldots . \int dx_p \int dx_{p+1} \int V_3 dx_{p-1} \text{ ou } V_3 \text{ désigne } \int dx_{p-2} \ldots . \int V dx_1,$$

et l'on intervertirait l'ordre entre x_{p+1} et x_{p-1}.

6.

Soient maintenant $u_1, u_2, \ldots . u_n$ les nouvelles variables que l'on veuille substituer dans l'intégrale d'ordre n,

$$J = \int^n V(x_1, x_2 \ldots . x_n) dx_1 . dx_2 \ldots . dx_n$$

et

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n), \\
x_2 &= f_2(u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n), \\
x_3 &= f_3(u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_p &= f_p(u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= f_n(u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n),
\end{aligned}$$

les relations qui les lient aux anciennes variables $x_1, x_2 \ldots . x_n$.

Si l'on veut commencer par introduire u_1 à la place de x_1, on devra déduire de ces n relations, par l'élimination des $n-1$ nouvelles variables $u_2, u_3 \ldots . u_n$,

$$x_1 = F_1(u_1 . x_2 . x_3 \dots . x_n)$$

et après avoir déterminé les limites de u_1 on changera l'ordre des intégrations par rapport à x_2 et u_1 tellement que x_2 devienne la variable de la première intégration, ce qui permettra d'introduire u_2 à la place de x_2, en déduisant des $n-1$ dernières relations, par l'élimination des $n-2$ nouvelles variables $u_3 . u_4 \dots . u_n$, l'équation

$$x_2 = F_2(u_1 . u_2 . x_3 \dots . x_n);$$

ensuite on transformera de nouveau les intégrales, dont se compose la somme d'intégrales obtenue, tellement que x_3 devienne la variable de la première intégration, pour la remplacer par u_3, au moyen de l'équation

$$x_3 = F_3(u_1 . u_2 . u_3 . x_4 \dots . x_n),$$

déduite des $n-2$ dernières relations par l'élimination des $n-3$ nouvelles variables $u_4 . u_5 \dots . u_n$. Continuant ainsi, après avoir remplacé, au moyen de l'équation

$$x_p = F_p(u_1 . u_2 \dots . u_p . x_{p+1} \dots . x_n)$$

déduite des $n-p+1$ dernières relations par l'élimination des $n-p$ nouvelles variables $u_{p+1} . u_{p+2} \dots . u_n$, une variable x_p par u_p, à changer l'ordre des intégrations tellement que la première intégration doive avoir lieu par rapport à x_{p+1}, et remplaçant alors x_{p+1} par u_{p+1}, on obtiendra enfin, comme on l'a vu pour l'intégrale triple, pour J une somme d'intégrales semblables, savoir:

$$J = \Sigma \int du_1 \int du_2 \dots \int V(F_1 . F_2 . F_3 \dots . F_p \dots . F_{n-1} . f_n)$$
$$\times \frac{dF_1}{du_1} . \frac{dF_2}{du_2} \dots \frac{dF_p}{du_p} \dots \frac{dF_{n-1}}{du_{n-1}} . \frac{df_n}{du_n} . du_n,$$

où les limites des nouvelles variables ont été déduites successivement de celles des anciennes au moyen des équations $x_p = F_p$.

Il est évident que F_p deviendra f_p si à $x_{p+1} . x_{p+2} \dots . x_n$ on y substitue les relations $f_{p+1} \dots f_n$, et par conséquent $V(F_1 . F_2 \dots F_p \dots f_n)$ devient $V(f_1 . f_2 \dots . f_n)$ si l'on y remplace les anciennes variables, qui y sont encore restées, par leurs valeurs en fonctions des nouvelles. Pour savoir ce que devient par cette substitution le produit des coëfficients différentiels des fonctions F_p, on différentie l'identité

$$x_p = F_p(u_1 . u_2 . u_3 \dots . u_p . x_{p+1} . x_{p+2} \dots . x_n),$$

où x_p, x_{p+1} etc. représentent f_p, f_{p+1} etc., successivement par rapport aux variables indépendantes $u_p . u_{p+1} \dots u_n$, dont $x_{p+1} . x_{p+2} \dots x_n$ sont des fonctions, et l'on obtient les $n-p+1$ équations:

$$\frac{dx_p}{du_p} = \frac{dF_p}{du_p} + \frac{dF_p}{dx_{p+1}} \cdot \frac{dx_{p+1}}{du_p} + \frac{dF_p}{dx_{p+2}} \cdot \frac{dx_{p+2}}{du_p} + \dots + \frac{dF_p}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{du_p},$$

$$\frac{dx_p}{du_{p+1}} = \frac{dF_p}{dx_{p+1}} \cdot \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} + \frac{dF_p}{dx_{p+2}} \cdot \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} + \dots + \frac{dF_p}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{du_{p+1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dx_p}{du_n} = \frac{dF_p}{dx_{p+1}} \cdot \frac{dx_{p+1}}{du_n} + \frac{dF_p}{dx_{p+2}} \cdot \frac{dx_{p+2}}{du_n} + \dots + \frac{dF_p}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{du_n},$$

de sorte qu'après l'élimination des $n-p$ coëfficients différentiels de F_p par rapport aux variables $x_{p+1} \dots x_n$, on aura une équation qui donnera ce coëfficient différentiel par rapport à u_p. Le résultat de cette élimination est le déterminant des coëfficients des inconnues à éliminer égalisé à zéro, savoir

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_p}{du_p} - \frac{dF_p}{du_p} \cdot & \frac{dx_p}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_p}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_p}{du_n} \\ \frac{dx_{p+1}}{du_p} \cdot & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_{p+1}}{du_n} \\ \frac{dx_{p+2}}{du_p} \cdot & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_{p+2}}{du_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_n}{du_p} \cdot & \frac{dx_n}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_n}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, d'après une propriété des déterminants se réduit à

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_p}{du_p} \cdot & \frac{dx_p}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_p}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_p}{du_n} \\ \frac{dx_{p+1}}{du_p} \cdot & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_{p+1}}{du_n} \\ \frac{dx_{p+2}}{du_p} \cdot & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_{p+2}}{du_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_n}{du_p} \cdot & \frac{dx_n}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_n}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} - \frac{dF_p}{du_p} \begin{vmatrix} \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_{p+1}}{du_n} \\ \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_{p+2}}{du_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_n}{du_{p+1}} \cdot & \frac{dx_n}{du_{p+2}} \dots & \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} = 0,$$

ce que l'on peut écrire, désignant un déterminant par D,

$$D(x_p \cdot x_{p+1} \dots x_n) - \frac{dF_p}{du_p} \cdot D(x_{p+1} \cdot x_{p+2} \dots x_n) = 0,$$

d'où

$$\frac{dF_p}{du_p} = \frac{D(x_p . x_{p+1} \ldots . x_n)}{D(x_{p+1} . x_{p+2} \ldots . x_n)}.$$

Faisant dans cette formule successivement $p = 1, 2, \ldots . n-1$, on obtient

$$\frac{dF_1}{du_1} = \frac{D(x_1 . x_2 \ldots . x_n)}{D(x_2 . x_3 \ldots . x_n)},$$

$$\frac{dF_2}{du_2} = \frac{D(x_2 . x_3 \ldots . x_n)}{D(x_3 . x_4 \ldots . x_n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dF_{n-1}}{du_{n-1}} = \frac{D(x_{n-1} . x_n)}{D(x_n)};$$

et, comme le déterminant $D(x_n)$ est simplement $\frac{dx_n}{du_n}$, le produit de ces équations et de

$$\frac{df_n}{du_n} = \frac{dx_n}{du_n} = D(x_n),$$

donne

$$\frac{dF_1}{du_1} . \frac{dF_2}{du_2} \ldots . \frac{dF_{n-1}}{du_{n-1}} . \frac{df_n}{du_n} = D(x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_n),$$

donc on aura

$$J = \Sigma \int du_1 \int du_2 \ldots . \int V(x_1 . x_2 \ldots . x_n) . D(x_1 . x_2 \ldots . x_n) . du_n,$$

où $x_1 . x_2$ etc. représentent les fonctions $f_1 . f_2$ etc., et $D(x_1 . x_2 \ldots . x_n)$ est le déterminant

$$D = \left| \begin{array}{l} \frac{dx_1}{du_1} . \frac{dx_1}{du_2} \ldots . \frac{dx_1}{du_n}, \\ \frac{dx_2}{du_1} . \frac{dx_2}{du_2} \ldots . \frac{dx_2}{du_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{du_1} . \frac{dx_n}{du_2} \ldots . \frac{dx_n}{du_n}. \end{array} \right.$$

On voit que la fonction sous le dernier signe d'intégration ne change pas si l'on change l'ordre des intégrations, seulement elle prendra le signe — si cet ordre devient tel, que l'on doit échanger un nombre impair de fois entre-elles deux colonnes du déterminant D.

7.

Le cas où les nouvelles variables sont liées aux anciennes par des fonctions implicites se déduit aisément du précédent.

formule générale serait de peu d'utilité, pourrait faire éviter ces substitutions successives, nous considérons encore une fois l'intégrale double

$$J=\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_n} dx.dy,$$

dans laquelle on a substitué à x et y les variables u et v liées aux premières par les relations

$$x = u\,\mathrm{Cos}\,v,\quad y = u\,\mathrm{Sin}\,v;$$

soit $x_n > x_0$ et $y_n > y_0$, alors l'intégrale doit être étendue à toutes les valeurs de x et de y pour lesquelles on a

$$x \begin{smallmatrix} > x_0 \\ < x_n \end{smallmatrix},\quad y \begin{smallmatrix} > y_0 \\ < y_n \end{smallmatrix},$$

ou

$$u\,\mathrm{Cos}\,v \begin{smallmatrix} > x_0 \\ < x_n \end{smallmatrix},\quad u\,\mathrm{Sin}\,v \begin{smallmatrix} > y_0 \\ < y_n \end{smallmatrix};$$

si, pour simplifier le raisonnement, on suppose que les limites de x et de y soient des quantités positives, et que l'on prend pour $u=\sqrt{(x^2+y^2)}$ aussi sa valeur positive, $\mathrm{Cos}\,v$ et $\mathrm{Sin}\,v$ seront de même toujours positifs, de sorte que des dernières inégalités il suit

$$u \begin{cases} > \dfrac{x_0}{\mathrm{Cos}\,v},\ \dfrac{y_0}{\mathrm{Sin}\,v}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha \\ < \dfrac{x_n}{\mathrm{Cos}\,v},\ \dfrac{y_n}{\mathrm{Sin}\,v}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \beta \end{cases}$$

lesquelles exigent que v satisfasse aux deux conditions

$$\frac{x_0}{\mathrm{Cos}\,v} < \frac{y_n}{\mathrm{Sin}\,v},\quad \frac{y_0}{\mathrm{Sin}\,v} < \frac{x_n}{\mathrm{Cos}\,v},$$

la première des valeurs α étant toujours plus petite que la première des valeurs β, de même que la deuxième α sera toujours plus petite que la deuxième β, en vertu des suppositions faites par rapport aux limites de x et y.

Ces conditions donnent

$$\mathrm{Tang}\,v < \frac{y_n}{x_0} \text{ et } \mathrm{Tang}\,v > \frac{y_0}{x_n};$$

ainsi pour une valeur quelconque de v, entre ces limites, il faudra faire varier u de la plus grande des valeurs α jusqu'à la plus petite des valeurs β. Mais on a

$$\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v} \gtrless \frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}, \quad \frac{x_n}{\operatorname{Cos} v} \gtrless \frac{y_n}{\operatorname{Sin} v},$$

suivant que

$$\operatorname{Tang} v \gtrless \frac{y_0}{x_0}, \quad \operatorname{Tang} v \gtrless \frac{y_n}{x_n},$$

donc, si $\frac{y_0}{x_0} < \frac{y_n}{x_n}$, les valeurs de $\operatorname{Tang} v$, depuis sa plus petite jusqu'à sa plus grande limite, se suivront

$$\frac{y_0}{x_n}, \quad \frac{y_0}{x_0}, \quad \frac{y_n}{x_n}, \quad \frac{y_n}{x_0},$$

et, depuis la première jusqu'à la deuxième on aura

$$\frac{y_0}{\operatorname{Sin} v} > \frac{x_0}{\operatorname{Cos} v} \quad \text{et} \quad \frac{x_n}{\operatorname{Cos} v} < \frac{y_n}{\operatorname{Sin} v};$$

depuis la deuxième jusqu'à la troisième

$$\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v} > \frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}, \quad \frac{x_n}{\operatorname{Cos} v} < \frac{y_n}{\operatorname{Sin} v},$$

et depuis la troisième jusqu'à la dernière

$$\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v} > \frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}, \quad \frac{y_n}{\operatorname{Sin} v} < \frac{x_n}{\operatorname{Cos} v};$$

de sorte que l'on obtient, parce qu'on sait par la formule générale que $dx\,dy$ doit être remplacé par $u\,du\,dv$, pour l'intégrale transformée:

$$J = \int_{\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_n}}^{\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_0}} dv \int_{\frac{y_0}{\operatorname{Sin} v}}^{\frac{x_n}{\operatorname{Cos} v}} u\,du + \int_{\operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_0}}^{\operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_n}} dv \int_{\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v}}^{\frac{x_n}{\operatorname{Cos} v}} u\,du$$

$$+ \int_{\operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_n}}^{\operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_0}} dv \int_{\frac{x_0}{\operatorname{Cos} v}}^{\frac{y_n}{\operatorname{Sin} v}} u\,du,$$

qui n'est pas la même que celle trouvée précédemment, quoiqu'elle donne un même résultat, car dans la figure on voit que les trois intégrales partielles donnent respectivement les aires *ABG*, *AGCH*, *CDH* (tab. IV. fig. 6.).

Il est encore à remarquer que ces deux transformations conviennent à tous les cas, quelles que soient les valeurs des limites de x et de y, parce qu'elles donnent algébriquement

$$J=(x_n-x_0)(y_n-y_0).$$

9.

Soit encore l'intégrale triple

$$J=\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{z_0}^{z_n} dx\,dy\,dz,$$

les limites étant des constantes positives, dont les supérieures soient les plus grandes, et les anciennes variables liées aux nouvelles par les relations

$$x=u\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,v,\quad y=u\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Sin}\,v,\quad z=u\,\mathrm{Cos}\,w.$$

L'intégrale devant être étendue à toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont à

$$x\begin{matrix}>x_0\\<x_n\end{matrix},\quad y\begin{matrix}>y_0\\<y_n\end{matrix},\quad z\begin{matrix}>z_0\\<z_n\end{matrix},$$

ou

$$u\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,v\begin{matrix}>x_0\\<x_n\end{matrix},\quad u\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Sin}\,v\begin{matrix}>y_0\\<y_n\end{matrix},\quad u\,\mathrm{Cos}\,w\begin{matrix}>z_0\\<z_n\end{matrix},$$

ces conditions, jointes aux suppositions faites par rapport aux limites, font voir que si l'on prend $u=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ toujours positivement, $\mathrm{Cos}\,w$, $\mathrm{Sin}\,w$, $\mathrm{Cos}\,v$ et $\mathrm{Sin}\,v$, seront dans toute l'étendue de l'intégrale des quantités positives, de sorte qu'il en suit que les valeurs de u doivent toujours satisfaire aux six conditions à la fois

$$u\begin{matrix}>\dfrac{x_0}{\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,v}\,(1),\quad \dfrac{y_0}{\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Sin}\,v}\,(2),\quad \dfrac{z_0}{\mathrm{Cos}\,w}\,(3)\quad\ldots\alpha\\[2ex] <\dfrac{x_n}{\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,v}\,(1),\quad \dfrac{y_n}{\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Sin}\,v}\,(2),\quad \dfrac{z_n}{\mathrm{Cos}\,w}\,(3)\quad\ldots\beta\end{matrix}$$

et par conséquent l'intégration par rapport à u, pour chaque système de valeurs de v et de w, devra s'étendre de la plus grande des trois quantités 1α, 2α, 3α jusqu'à la plus petite des trois quantités 1β, 2β, 3β. Donc

1°. u s'étendra de 1α à 1β, pour toutes les valeurs de v et de w qui satisfont à $1\alpha<1\beta$, et

$$1\alpha>2\alpha,\quad 1\alpha>3\alpha,$$
$$1\beta<2\beta,\quad 1\beta<3\beta,$$

d'où il suit, par la division qu'on doit alors avoir

$$\frac{x_0}{x_n} > \frac{y_0}{y_n}, \quad \frac{x_0}{x_n} > \frac{z_0}{z_n}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots C$$

Si ce cas a lieu, alors les quatre inégalités précédentes donnent respectivement

$$\text{Tang}\, v > \frac{y_0}{x_0}, \quad \text{Cos}\, v < \frac{x_0}{z_0 \,\text{Tang}\, w},$$

$$\text{Tang}\, v < \frac{y_n}{x_n}, \quad \text{Cos}\, v > \frac{x_n}{z_n \,\text{Tang}\, w},$$

ou élévant au carré, ce qui est permis parce que toutes ces quantités sont positives, et réduisant à $\text{Tang}^2 v$,

$$\text{Tang}^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_0^2}{x_0^2}\ (1), \quad \dfrac{z_0^2 \,\text{Tang}^2 w - x_0^2}{x_0^2}\ (2), \ldots \quad \alpha_1 \\[2ex] < \dfrac{y_n^2}{x_n^2}\ (1), \quad \dfrac{z_n^2 \,\text{Tang}^2 w - x_n^2}{x_n^2}\ (2); \ldots \quad \beta_1 \end{cases}$$

des conditions C il suit qu'on a déjà toujours $1\alpha_1 < 1\beta_1$, $2\alpha_1 < 2\beta_1$, donc les seules conditions qui découlent de α_1 et β_1 sont

$$1\alpha_1 < 2\beta_1, \quad 2\alpha_1 < 1\beta_1,$$

d'où l'on tire

$$\text{Tang}^2 w > \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2} \cdot \frac{x_n^2}{x_0^2}\ (1), \quad \text{Tang}^2 w < \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \cdot \frac{x_0^2}{x_n^2}\ (2); \quad A$$

ainsi de la plus petite de ces limites de $\text{Tang}^2 w$ jusqu'à la plus grande il faudra faire varier $\text{Tang}^2 v$ de la plus grande des valeurs α_1 jusqu'à la plus petite des valeurs β_1; mais on aura

$$1\alpha_1 \gtrless 2\alpha_1, \quad 1\beta_1 \gtrless 2\beta_1$$

suivant que

$$\text{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2}\ (1), \quad \text{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_n^2}\ (2), \qquad B$$

et si l'on suppose que les données soient tellement que $2B > 1B$, il est facile de voir, ayant égard à C, que les valeurs $1A$, $1B$, $2B$, $2A$ de $\text{Tang}^2 w$ se suivent par ordre ascendant de grandeur, et que l'on aura dans les intervalles successifs

de $1A$ à $1B$, $1\alpha_1 > 2\alpha_1$ et $2\beta_1 < 1\beta_1$,
„ $1B$ à $2B$, $2\alpha_1 > 1\alpha_1$ „ $2\beta_1 < 1\beta_1$,
„ $2B$ à $2A$, $2\alpha_1 > 1\alpha_1$ „ $1\beta_1 < 2\beta_1$;

donc de

$Tg^2 w = 1A$ à $Tang^2 w = 1B$, il faudra faire varier $Tg^2 v$ de $1\alpha_1$ à $2\beta_1$,
„ $= 1B$ „ „ $= 2B$, „ „ „ „ „ „ $2\alpha_1$ „ $2\beta_1$.
„ $= 2B$ „ „ $= 2A$, „ „ „ „ „ „ $2\alpha_1$ „ $1\beta_1$.

tandis que u varie de 1α à 1β; nous indiquerons ces intégrales de la manière suivante, dans le tableau ci-dessous,

1°. Limites de $Tang^2 w$	$1A \dots 1B$	$1B \dots 2B$	$2B \dots 2A$
„ „ $Tang^2 v$	$1\alpha_1 \dots 2\beta_1$	$2\alpha_1 \dots 2\beta_1$	$2\alpha_1 \dots 1\beta_1$
„ „ u		$1\alpha \dots 1\beta$	

2°. Il n'y aura point de valeurs de v et w, pour lesquelles u s'étendra de 2α à 2β, parce que cela exigerait

$$2\alpha > 1\alpha, \quad 2\alpha > 3\alpha,$$
$$2\beta < 1\beta, \quad 2\beta < 3\beta,$$

d'où par la division

$$\frac{y_0}{y_n} > \frac{x_0}{x_n}, \quad \frac{y_0}{y_n} > \frac{z_0}{z_n}$$

dont l'une est en contradiction avec C; pour la même raison il n'y aura point d'intégrations de $u = 3\alpha$ à $u = 3\beta$.

3°. u s'étendra de 1α à 2β, pour celles des valeurs de v et w qui satisfont à

$$1\alpha < 2\beta$$

et

$$1\alpha > 2\alpha, \quad 1\alpha > 3\alpha,$$
$$2\beta < 1\beta, \quad 2\beta < 3\beta,$$

qui donnent respectivement

$$Tang\, v < \frac{y_n}{x_0}$$

et

$$Tang\, v > \frac{y_0}{x_0}, \quad Cos\, v < \frac{x_0}{z_0\, Tang\, w},$$
$$Tang\, v > \frac{y_n}{x_n}, \quad Sin\, v > \frac{y_n}{z_n\, Tang\, w},$$

ou

$$Tg^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_0^2}{x_0^2}\ (1), \quad \dfrac{z_0^2 Tg^2 w - x_0^2}{x_0^2}\ (2), \quad \dfrac{y_n^2}{x_n^2}\ (3), \quad \dfrac{y_n^2}{z_n^2 Tg^2 w - y_n^2}\ (4), & \alpha_3 \\ < \dfrac{y_n^2}{x_0^2}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \beta_3 \end{cases}$$

dont on peut effacer $1\alpha_2$ parce qu'en vertu de C on a $1\alpha_2 < 3\alpha_2$, de sorte que la valeur de v qui satisfait à la condition $3\alpha_2$ satisfait à plus forte raison a $1\alpha_2$, et comme on a aussi $3\alpha_2 < \beta_2$, il ne reste qu'à satisfaire aux deux conditions,

$$2\alpha_2 < \beta_2, \quad 4\alpha_2 < \beta_2$$

ou

$$\text{Tang}^2 w < \frac{x_0^2 + y_n^2}{z_0^2} \; (1), \quad \text{Tang}^2 w > \frac{x_0^2 + y_n^2}{z_n^2} \; (2); \qquad A_1$$

entre ces limites de w il faudra faire varier $\text{Tang}^2 v$ de la plus grande des valeurs α_2 jusqu'à la plus petite des valeurs β_2; mais on aura

$$2\alpha_2 \gtrless 3\alpha_2 \quad \text{et} \quad 3\alpha_2 \gtrless 4\alpha_2,$$

suivant que

$$\text{Tang}^2 w \gtrless \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \cdot \frac{x_0^2}{x_n^2} \; (1), \quad \text{Tang}^2 w \gtrless \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_n^2} \; (2); \qquad B_1$$

parce que $\frac{x_0}{x_n} > \frac{z_0}{z_n}$, les valeurs $2A_1, 2B_1, 1B_1, 1A_1$ de $\text{Tang}^2 w$ se suivront en ordre ascendant de grandeur, et l'on aura

dans le 1° intervalle: $4\alpha_2 > 3\alpha_2$, $3\alpha_2 > 2\alpha_2$, donc $4\alpha_2 > 3\alpha_2$, $2\alpha_2$,
„ „ 2° „ $3\alpha_2 > 4\alpha_2$, $3\alpha_2 > 2\alpha_2$, „ $3\alpha_2 > 4\alpha_2$, $2\alpha_2$,
„ „ 3° „ $2\alpha_2 > 3\alpha_2$, $3\alpha_2 > 4\alpha_2$, „ $2\alpha_2 > 3\alpha_2$, $4\alpha_2$,

ce qui donne les trois intégrales

2°. Limites de $\text{Tang}^2 w$	$2A_1 \ldots 2B_1$	$2B_1 \ldots 1B_1$	$1B_1 \ldots 1A_1$
„ „ $\text{Tang}^2 v$	$4\alpha_2 \ldots \beta_2$	$3\alpha_2 \ldots \beta_2$	$2\alpha_2 \ldots \beta_2$
„ „ u		1α à 2β.	

4°. u s'étendra de 1α à 3β, si

$$1\alpha < 3\beta$$

et

$$1\alpha > 2\alpha, \quad 1\alpha > 3\alpha,$$

$$3\beta < 1\beta, \quad 3\beta < 2\beta,$$

ou

$$\text{Cos}\, v > \frac{x_0}{z_n \text{Tang}\, w}$$

et

$$\operatorname{Tang} v > \frac{y_0}{x_0}, \qquad \operatorname{Cos} v < \frac{x_0}{z_0 \operatorname{Tang} w},$$

$$\operatorname{Cos} v < \frac{x_n}{z_n \operatorname{Tang} w}, \quad \operatorname{Sin} v < \frac{y_n}{z_n \operatorname{Tang} w},$$

d'où

$$\operatorname{Tang}^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_0^2}{x_0^2}\ (1), \quad \dfrac{z_0^2 \operatorname{Tang}^2 w - x_0^2}{x_0^2}\ (2), \quad \dfrac{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - x_n^2}{x_n^2}\ (3), & \alpha_3 \\[2ex] < \dfrac{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - x_0^2}{x_0^2}\ (1), \quad \dfrac{y_n^2}{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - y_n^2}\ (2); \ \ldots\ldots & \beta_3 \end{cases}$$

en vertu de C on aura $2\alpha_3 < 3\alpha_3$, donc $2\alpha_3$ peut être effacée, et comme il est aussi $3\alpha_3 < 1\beta_3$, il ne restera que les conditions

$$1\alpha_3 < 1\beta_3, \quad 1\alpha_3 < 2\beta_3, \quad 3\alpha_3 < 2\beta_3$$

ou

$$\operatorname{Tang}^2 w > \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2}\ (1), \quad \operatorname{Tang}^2 w < \frac{y_n^2}{y_0^2} \cdot \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2}\ (2),$$

$$\operatorname{Tang}^2 w < \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_n^2}\ (3), \ \ldots\ldots\ldots \ A_2$$

dont $2A_2$ peut être effacée, parce qu'elle est comprise dans $3A_2$, car, en vertu de C on a

$$\frac{y_n^2}{y_0^2}(x_0^2 + y_0^2) = \frac{y_n^2}{y_0^2} x_0^2 + y_n^2 > \frac{x_n^2}{x_0^2} x_0^2 + y_n^2 = x_n^2 + y_n^2;$$

ainsi de $1A_2$ jusqu'à $3A_2$ il faudra faire varier $\operatorname{Tang}^2 v$ de la plus grande valeur α_3 jusqu'à la plus petite β_3. Mais on a

$$1\alpha_3 \gtrless 3\alpha_3, \quad 1\beta_3 \lessgtr 2\beta_3,$$

suivant que

$$\operatorname{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2} \cdot \frac{x_n^2}{x_0^2}\ (1), \quad \operatorname{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_0^2 + y_n^2}{z_n^2}\ (2); \quad B_2$$

les valeurs $1A_2$, $1B_2$, $2B_2$, $3A_2$ de $\operatorname{Tang}^2 w$ se suivent par ordre ascendant; dans le premier intervalle on a $1\alpha_3 > 3\alpha_3$ et $1\beta_3 < 2\beta_3$; dans le second $3\alpha_3 > 1\alpha_3$ et $1\beta_3 < 2\beta_3$; et dans le troisième $3\alpha_3 > 1\alpha_3$, $2\beta_3 < 1\beta_3$, ce qui donne les intégrales

3°. Limites de $\operatorname{Tang}^2 w$	$1A_2 \ldots. 1B_2$	$1B_2 \ldots. 2B_2$	$2B_2 \ldots. 3A_2$
„ „ $\operatorname{Tang}^2 v$	$1\alpha_3 \ldots. 1\beta_3$	$3\alpha_3 \ldots. 1\beta_3$	$3\alpha_3 \ldots. 2\beta_3$
„ „ u		$u = 1\alpha$ à $u = 3\beta$.	

5°. u s'étendra de 2α à 1β, si $2\alpha < 1\beta$, et

$$2\alpha > 1\alpha, \quad 2\alpha > 3\alpha,$$
$$1\beta < 2\beta, \quad 1\beta < 3\beta,$$

ce qui donnera

$$\operatorname{Tang}^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_0^2}{x_n^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \alpha_4 \\ < \dfrac{y_0^2}{x_0^2}\,(1),\quad \dfrac{y_0^2}{z_0^2 \operatorname{Tang}^2 w - y_0^2}\,(2),\quad \dfrac{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - x_n^2}{x_n^2}\,(3),\quad \beta_4 \end{cases}$$

et par suite

$$\alpha_4 < 2\beta_4, \quad \alpha_4 < 3\beta_4$$

d'où

$$\operatorname{Tang}^2 w < \frac{x_n^2 + y_0^2}{z_0^2}\,(1), \quad \operatorname{Tang}^2 w > \frac{x_n^2 + y_0^2}{z_n^2}\,(2); \qquad A_3$$

entre ces limites il faudra faire varier $\operatorname{Tang}^2 v$ de la valeur α_4 à la plus petite β_4, mais

$$1\beta_4 \lessgtr 2\beta_4, \quad 1\beta_4 \lessgtr 3\beta_4,$$

suivant que

$$\operatorname{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2}\,(1), \quad \operatorname{Tang}^2 w \gtrless \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2} \cdot \frac{x_n^2}{x_0^2}\,(2); \qquad B_3$$

les valeurs $2A_3$, $2B_3$, $1B_3$, $1A_3$ de $\operatorname{Tang}^2 w$ se suivent en ordre ascendant; successivement on aura dans les intervalles:

$$1\beta_4 < 2\beta_4 \quad \text{et} \quad 3\beta_4 < 1\beta_4,$$
$$1\beta_4 < 2\beta_4 \quad ,, \quad 1\beta_4 < 3\beta_4,$$
$$2\beta_4 < 1\beta_4 \quad ,, \quad 1\beta_4 < 3\beta_4;$$

donc successivement $3\beta_4$, $1\beta_4$ et $2\beta_4$ seront les plus petites des quantités β_4, ce qui donnera les intégrales,

Lim. de $\operatorname{Tang}^2 w$	$2A_3 \dots 2B_3$	$2B_3 \dots 1B_3$	$1B_3 \dots 1A_3$
,, ,, $\operatorname{Tang}^2 v$	$\alpha_4 \dots 3\beta_4$	$\alpha_4 \dots 1\beta_4$	$\alpha_4 \dots 2\beta_4$
,, ,, u	de $u = 2\alpha$ à $u = 1\beta$.		

6°. u s'étendra de 2α à 3β, si $2\alpha < 3\beta$, et

$$2\alpha > 1\alpha, \quad 2\alpha > 3\alpha,$$
$$3\beta < 1\beta, \quad 3\beta < 2\beta,$$

ce qui donnera

$$\operatorname{Tang}^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_0^2}{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - y_0^2}\,(1),\quad \dfrac{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - x_n^2}{x_n^2}\,(2), \dots\dots \alpha_5 \\ < \dfrac{y_0^2}{x_0^2}\,(1),\quad \dfrac{y_n^2}{z_n^2 \operatorname{Tang}^2 w - y_n^2}\,(2),\quad \dfrac{y_0^2}{z_0^2 \operatorname{Tang}^2 w - y_0^2}\,(3),\quad \beta_5 \end{cases}$$

dont on peut effacer $3\beta_5$ qui est toujours plus grande que $2\beta_5$; on a aussi $1\alpha_5 < 2\beta_5$, et il ne reste que les conditions

$$1\alpha_5 < 1\beta_5,\quad 2\alpha_5 < 1\beta_5,\quad 2\alpha_5 < 2\beta_5$$

d'où

$$\text{Tang}^2 w > \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2}\ (1),\quad \text{Tang}^2 w < \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2}\cdot\frac{x_n^2}{x_0^2}\ (2),$$

$$\text{Tang}^2 w < \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_n^2}\ (3);\ \ldots\ldots\ldots\ A_4$$

mais

$$(x_0^2 + y_0^2)\frac{x_n^2}{x_0^2} = x_n^2 + y_0^2\frac{x_n^2}{x_0^2} < x_n^2 + y_0^2\frac{y_n^2}{y_0^2} = x_n^2 + y_n^2,$$

donc on peut effacer la condition $3A_4$; ensuite on a

$$1\alpha_5 \gtrless 2\alpha_5,\quad 1\beta_5 \gtrless 2\beta_5,$$

suivant que

$$\text{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_n^2 + y_0^2}{z_n^2}\ (1),\quad \text{Tang}^2 w \gtrless \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_n^2}\cdot\frac{y_n^2}{y_0^2}\ (2);\quad B_4$$

ici les valeurs $1A_4$, $1B_4$, $2A_4$, $2B_4$ se suivent par ordre ascendant, mais $\text{Tang}^2 w$ devant être plus petite que $2A_4$, il n'y aura que deux intervalles, de $1A_4$ à $1B_4$, et de $1B_4$ à $2A_4$; et l'on aura toujours $1\beta_5 < 2\beta_5$, tandis que successivement $1\alpha_5 > 2\alpha_5$ et $2\alpha_5 > 1\alpha_5$, ce qui donnera seulement les deux intégrales

Lim. de $\text{Tang}^2 w$	$1A_4 \ldots\ldots 1B_4$	$1B_4 \ldots\ldots 2A_4$
„ „ $\text{Tang}^2 v$	$1\alpha_5 \ldots\ldots 1\beta_5$	$2\alpha_5 \ldots\ldots 1\beta_5$
„ „ u	de $u = 2\alpha$ à $u = 3\beta$.	

7°. u s'étendra de 3α à 1β si $3\alpha < 1\beta$, et

$$3\alpha > 1\alpha,\quad 3\alpha > 2\alpha,$$
$$1\beta < 2\beta,\quad 1\beta < 3\beta,$$

d'où

$$\text{Tang}^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_0^2}{z_0^2\,\text{Tang}^2 w - y_0^2}\ (1),\quad \dfrac{z_0^2\,\text{Tang}^2 w - x_n^2}{x_n^2}\ (2),\ \ldots\ldots\ \alpha_6 \\[2ex] < \dfrac{y_n^2}{x_n^2}\ (1),\quad \dfrac{z_n^2\,\text{Tang}^2 w - x_n^2}{x_n^2}\ (2),\quad \dfrac{z_0^2\,\text{Tang}^2 w - x_0^2}{x_0^2}\ (3),\quad \beta_6 \end{cases}$$

dont on peut effacer $2\beta_6$ qui est $> 3\beta_6$, tandis que déjà $2\alpha_6 < 3\beta_6$, donc il reste

$$1\alpha_6 < 1\beta_6,\quad 1\alpha_6 < 3\beta_6,\quad 2\alpha_6 < 1\beta_6$$

d'où

$$\text{Tang}^2 w > \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \cdot \frac{y_0^2}{y_n^2} \ (1), \quad \text{Tang}^2 w > \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} \ (2),$$

$$\text{Tang}^2 w < \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \ (3), \quad \ldots\ldots\ldots \ A_5$$

dont on peut effacer $1A_5$ qui est $< 2A_5$; ensuite on a

$$1\alpha_6 \gtrless 2\alpha_6, \quad 1\beta_6 \gtrless 3\beta_6$$

suivant que

$$\text{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_n^2 + y_0^2}{z_0^2} \ (1), \quad \text{Tang}^2 w \lessgtr \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \cdot \frac{x_0^2}{x_n^2} \ (2); \quad B_5$$

si l'on suppose $2B_5 < 1B_5$, les valeurs $2A_5 . 2B_5 . 1B_5 . 3A_5$ se suivent par ordre ascendant, et l'on a successivement: $1\alpha_6 > 2\alpha_6$ et $3\beta_6 < 1\beta_6 : 1\alpha_6 > 2\alpha_6$ et $1\beta_6 < 3\beta_6 : 2\alpha_6 > 1\alpha_6$ et $1\beta_6 < 3\beta_6$, ce qui donnera les intégrales

Lim. de $\text{Tang}^2 w$	$2A_5 \ldots. 2B_5$	$2B_5 \ldots. 1B_5$	$1B_5 \ldots. 3A_5$
„ „ $\text{Tang}^2 v$	$1\alpha_6 \ldots. 3\beta_6$	$1\alpha_6 \ldots. 1\beta_6$	$2\alpha_6 \ldots. 1\beta_6$
„ „ u	de $u = 3\alpha$ à $u = 1\beta$.		

8°. u s'étendra de 3α à 2β, si $3\alpha < 2\beta$ et

$$3\alpha > 1\alpha, \quad 3\alpha > 2\alpha,$$
$$2\beta < 1\beta, \quad 2\beta < 3\beta,$$

d'où

$$\text{Tang}^2 v \begin{cases} > \dfrac{y_n^2}{x_n^2} \ (1), \quad \dfrac{y_0^2}{z_0^2 \text{Tang}^2 w - y_0^2} \ (2), \quad \dfrac{y_n^2}{z_n^2 \text{Tang}^2 w - y_n^2} \ (3), & \alpha_7 \\ < \dfrac{z_0^2 \text{Tang}^2 w - x_0^2}{x_0^2} \ (1), \quad \dfrac{y_n^2}{z_0^2 \text{Tang}^2 w - y_n^2} \ (2), \ldots\ldots & \beta_7 \end{cases}$$

dont, supposant $\frac{y_0}{y_n} > \frac{z_0}{z_n}$, on peut effacer $3\alpha_7$ qui alors est $< 2\alpha_7$, tandis qu'aussi $2\alpha_7 < 2\beta_7$, de sorte qu'il reste

$$1\alpha_7 < 1\beta_7, \quad 1\alpha_7 < 2\beta_7, \quad 2\alpha_7 < 1\beta_7,$$

d'où

$$\text{Tang}^2 w > \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \cdot \frac{x_0^2}{x_n^2} \ (1), \quad \text{Tang}^2 w < \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \ (2),$$

$$\text{Tang}^2 w > \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} \ (3), \quad \ldots\ldots\ldots \ A_6$$

dont on peut effacer $3A_6$, qui est plus petite que $1A_6$; ensuite on a

$$1\alpha_7 \gtrless 2\alpha_7, \quad 1\beta_7 \gtrless 2\beta_7,$$

suivant que

$$\text{Tang}^2 w \gtrless \frac{x_n^2 + y_n^2}{z_0^2} \cdot \frac{y_0^2}{y_n^2} \ (1), \quad \text{Tang}^2 w \gtrless \frac{x_0^2 + y_n^2}{z_0^2} \ (2), \quad B_6$$

ici les valeurs $1B_6 . 1A_6 . 2B_6 . 2A_6$ sont en ordre ascendant, mais comme on doit avoir $\text{Tg}^2 w > 1A_6$, il n'y aura que deux intervalles de $1A_6$ à $2A_6$; de sorte que l'on aura toujours $1\alpha_7 > 2\alpha_7$, tandis que successivement $1\beta_7 < 2\beta_7$ et $2\beta_7 < 1\beta_7$, ce qui donne seulement les deux intégrales

Lim. de $\text{Tang}^2 w$	$1A_6 \dots 2B_6$	$2B_6 \dots 2A_6$
„ „ $\text{Tang}^2 v$	$1\alpha_7 \dots 1\beta_7$	$1\alpha_7 \dots 2\beta_7$
„ „ u	de $u = 3\alpha$ à $u = 2\beta$.	

Ensuite l'on trouve

$$D^{x.y.z}_{u.v.w} = -u^2 \text{Sin}^2 w,$$

de sorte que l'intégrale transformée est

$$J = \Sigma \iiint -u^2 \text{Sin}^2 w . dw . dv . du,$$

où la première intégration doit avoir lieu par rapport à u, et la dernière par rapport à w, tandis que les limites des intégrations successives sont indiquées dans les tableaux précédents, par lesquels on voit qu'avec les données de la question l'intégrale primitive se transforme en 19 intégrales partielles, où la fonction à intégrer est la même.

On peut vérifier ces résultats par des considérations géométriques. Les nouvelles variables sont les coordonnées polaires des points, dont les anciennes sont les coordonnées orthogonales: u est le rayon vecteur mené de l'origine au point x, y, z; w l'angle entre ce rayon et l'axe des z, et v l'angle entre l'axe des x et la projection du rayon sur le plan xy. Il est évident que l'on obtiendra le volume du parallélopipède, que représente l'intégrale proposée, en menant tous les rayons possibles qui puissent rencontrer le corps, et prenant ensuite pour chaque rayon la somme de tous les éléments situés sur la partie de ce rayon comprise dans le corps, du point d'entrée jusqu'au point de sortie.

Soient tab. IV. fig. 11.:

$$Op = x_0, \quad pa = y_0, \quad pa'' = z_0,$$
$$Oq = x_n, \quad pb = y_n, \quad pb'' = z_n,$$

pris tellement qu'ils satisfassent aux conditions C précédentes, de sorte que les rectangles $abcd$ et $a''b''c''d''$ soient les projections du parallélopipède sur le plan des xy et des xz. Les rayons, menés de O, entreront par l'une des trois faces dont les projections sont $(ab,\ a''b'')$, $(ac,\ a''b''c''d'')$, $(abcd,\ a''c'')$ et leurs valeurs, du point O jusqu'à leur point d'entrée seront respectivement 1α, 2α, 3α; de même les rayons sortiront par l'une des trois faces $(cd,\ c''d'')$, $(bd,\ a''b''c''d'')$, $(abcd,\ b''d'')$, et leurs valeurs, du point O jusqu'au point dé sortie, seront alors 1β, 2β, 3β; car, pour un rayon quelconque, qui, par exemple, sort par la face $(cd,\ c''d'')$, et dont Oe est la projection sur xy, on aura

$$Oe = \frac{Oq}{\mathrm{Cos}\, qOe} = \frac{x_n}{\mathrm{Cos}\, v} \quad \text{et} \quad u = \frac{Oe}{\mathrm{Sin}\, w} = \frac{x_n}{\mathrm{Sin}\, w \,\mathrm{Cos}\, v} = 1\beta \ \text{etc.}$$

On voit, par la construction indiquée dans la figure, que les différents rayons rencontreront le plan de la base supérieure du parallélopipède, dans l'intérieur des quadrilatères écrits à côté de leurs valeurs ci-dessous,

$1\alpha \ldots.\ aba'b'$, $\quad 1\beta \ldots.\ cdc'd'$,
$2\alpha \ldots.\ aca'c'$, $\quad 2\beta \ldots.\ bdb'd'$,
$3\alpha \ldots.\ a'b'c'd'$, $\quad 3\beta \ldots.\ abcd$,

de sorte que tous les rayons qui traversent le parallélopipède rencontreront le plan de sa base supérieure dans l'intérieur de l'hexagone $abb'd'c'ca$, les projections sur xz de ces points de rencontre étant situées dans $b''d''$ et son prolongement. Les portions communes à deux des six quadrilatères déterminent les limites des intégrations par rapport à u; ainsi, pour tous les rayons qui rencontrent le plan de la base supérieure dans l'intérieur de l'une des aires ci-dessous, il faudra intégrer d'une valeur α jusqu'à une valeur β de u, savoir:

pour l'aire $edfa'$ de $u = 1\alpha$ à $u = 1\beta$,
„ „ $bdfb'$ „ $u = 1\alpha$ „ $u = 2\beta$,
„ „ $abdc$ „ $u = 1\alpha$ „ $u = 3\beta$,
„ „ $cea'c'$ „ $u = 2\alpha$ „ $u = 1\beta$,
„ „ ace „ $u = 2\alpha$ „ $u = 3\beta$,
„ „ $a'fd'b'$ „ $u = 3\alpha$ „ $u = 1\beta$,
„ „ $fb'd'$ „ $u = 3\alpha$ „ $u = 2\beta$,

et il n'y aura point d'intégrations de $u = 2\alpha$ à $u = 2\beta$, ni de $u = 3\alpha$ à $u = 3\beta$, parce que les quadrilatères $aca'c'$ et $bdb'd'$, ni $a'b'c'd'$ et $abcd$, n'ont pas des portions communes.

Il est facile de voir que l'on a dans la figure

$$Oa^2 = x_0^2 + y_0^2, \qquad Od^2 = x_n^2 + y_n^2,$$

$$Oc^2 = x_n^2 + y_0^2, \qquad Of^2 = (x_n^2 + y_n^2)\frac{z_n^2}{z_0^2}\cdot\frac{x_0^2}{x_n^2},$$

$$Oe^2 = (x_0^2 + y_0^2)\frac{x_n^2}{x_0^2}, \qquad Oc'^2 = (x_n^2 + y_0^2)\frac{z_n^2}{z_0^2},$$

$$Ob^2 = x_0^2 + y_n^2, \qquad Ob'^2 = (x_0^2 + y_n^2)\frac{z_n^2}{z_0^2},$$

$$Oa'^2 = (x_0^2 + y_0^2)\frac{z_n^2}{z_0^2}, \qquad Od'^2 = (x_n^2 + y_n^2)\frac{z_n^2}{z_0^2},$$

ces quantités Oa^2, Oc^2, ... Od'^2, Of^2 se succédant par ordre de grandeur, conforme aux suppositions faites précédemment, et

$$Ok = \frac{z_n}{z_0}x_0, \quad Ol = \frac{z_n}{z_0}x_n, \quad a'k = \frac{z_n}{z_0}y_0, \quad b'k = \frac{z_n}{z_0}y_n.$$

Après cela, si l'on remarque que la valeur de w est la même pour tous les rayons dont les points de rencontre avec la base supérieure sont sur une même circonférence, décrite du centre O avec un rayon ϱ, de sorte que pour ces rayons $\varrho = z_n \operatorname{Tang} w$, l'on voit, dans le quadrilatère $edfa'$, c'est-à-dire pour les intégrations de $u = 1\alpha$ à $u = 1\beta$, que la limite inférieure de v sera déterminée par le point où un tel cercle coupe l'un des côtés ea' ou $a'f$, et la limite supérieure par le point où ce même cercle coupe un des deux autres côtés. Donc, de

$$\operatorname{Tang}^2 w = \frac{Oe^2}{z_n^2} = 1A \text{ jusqu'à } \operatorname{Tang}^2 w = \frac{Oa'^2}{z_n^2} = 1B$$

on aura

$$\operatorname{Tang} v > \frac{qe}{Oq} = \frac{y_0}{x_0} \text{ et } \operatorname{Cos} v > \frac{Oq}{\varrho} = \frac{x_n}{z_n \operatorname{Tang} w};$$

de

$$\operatorname{Tang}^2 w = 1B \text{ jusqu'à } \operatorname{Tang}^2 w = \frac{Od^2}{z_n^2} = 2B,$$

on aura

$$\operatorname{Cos} v < \frac{Ok}{\varrho} = \frac{x_0}{z_0 \operatorname{Tang} w} \text{ et } \operatorname{Cos} v > \frac{x_n}{z_n \operatorname{Tang} w},$$

et, de

$$\operatorname{Tang}^2 w = 2B \text{ jusqu'à } \operatorname{Tang}^2 w = \frac{Of^2}{z_n^2} = 2A$$

l'on aura

$$\mathrm{Cos}\,v < \frac{x_0}{z_0 \,\mathrm{Tang}\,w} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tang}\,v < \frac{kf}{Ok} = \frac{y_n}{x_n},$$

ce qui si l'on exprime les limites en $\mathrm{Tang}^2 v$, donnera les trois intégrales du 1°. tableau.

Par la considération de l'aire $bdfb'$ l'on voit, que, pour les intégrations de $u = 1\alpha$ à $u = 2\beta$, les valeurs successives de $\mathrm{Tang}^2 w$ seront

$$\frac{Ob^2}{z_n^2} = 2A_1, \quad \frac{Od^2}{z_n^2} = 2B_1, \quad \frac{Of_2}{z_n^2} = 1B_1, \quad \frac{Ob'^2}{z_n^2} = 1A_1$$

et que les limites de v, dont les inférieures sont déterminées par les points où les cercles décrits de O coupent l'un des côtés bd, df ou fb, et les supérieures où ces mêmes cercles coupent bb', seront respectivement

Limites infér.: $\mathrm{Sin}\,v = \frac{y_n}{\varrho} = \frac{y_n}{z_n \,\mathrm{Tang}\,w}$, $\mathrm{Tang}\,v = \frac{qd}{Oq} = \frac{y_n}{x_n}$,

$\mathrm{Cos}\,v = \frac{Ok}{\varrho} = \frac{x_0}{z_0 \,\mathrm{Tang}\,w}$.

„ supér.: $\mathrm{Tang}\,v = \frac{pb}{Op} = \frac{y_n}{x_0}$, $\mathrm{Tang}\,v = \frac{y_n}{x_0}$, $\mathrm{Tang}\,v = \frac{y_n}{x_0}$,

ce qui s'accorde avec le 2° tableau.

L'aire $abde$ montre que, de $u = 1\alpha$ à $u = 3\beta$, les limites successives de $\mathrm{Tang}^2 w$ seront

$$\frac{Oa^2}{z_n^2} = 1A_2, \quad \frac{Oe^2}{z_n^2} = 1B_2, \quad \frac{Ob^2}{z_n^2} = 2B_2, \quad \frac{Od^2}{z_n^2} = 3A_2,$$

tandis que les limites de v, dont les valeurs commencent successivement à l'un des côtés ae ou ed, et finissent à ab ou bd, sont respectivement

Lim. inf.: $\mathrm{Tg}\,v = \frac{pa}{Op} = \frac{y_0}{x_0}$, $\mathrm{Cos}\,v = \frac{Oq}{\varrho} = \frac{x_n}{z_n \mathrm{Tg}\,w}$, $\mathrm{Cos}\,v = \frac{x_n}{z_n \mathrm{Tg}\,w}$,

„ sup.: $\mathrm{Cos}\,v = \frac{Op}{\varrho} = \frac{x_0}{z_n \mathrm{Tg}\,w}$, $\mathrm{Cos}\,v = \frac{Op}{\varrho} = \frac{x_0}{z_n \mathrm{Tg}\,w}$, $\mathrm{Sin}\,v = \frac{y_n}{z_n \mathrm{Tg}\,w}$,

ce qui s'accorde avec le 3° tableau.

L'aire $cea'c'$ montre que, de $u = 2\alpha$ à $u = 1\beta$, les limites successives de $\mathrm{Tang}^2 w$ seront

$$\frac{Oc^2}{z_n^2} = 2A_3, \quad \frac{Oe^2}{z_n^2} = 2B_3, \quad \frac{Oa'^2}{z_n^2} = 1B_3, \quad \frac{Oc'^2}{z_n^2} = 1A_3$$

tandis que les limites de v, dont les valeurs commencent à cc' et finissent successivement à ce, ea' et $a'c'$, sont respectivement

$$\text{Lim. infér.: } \operatorname{Tg} v = \frac{y_0}{x_n}, \qquad \operatorname{Tg} v = \frac{y_0}{x_n}, \quad \operatorname{Tg} v = \frac{y_0}{x_n},$$

$$\text{„ supér.: } \operatorname{Cos} v = \frac{x_n}{\varrho} = \frac{x_n}{z_n \operatorname{Tg} w}, \quad \operatorname{Tg} v = \frac{y_0}{x_0}, \quad \operatorname{Sin} v = \frac{a'k}{z_n} = \frac{y_0}{z_0 \operatorname{Tg} w},$$

ce qui s'accorde avec le 4° tableau.

L'aire ace montre que, de $u = 2\alpha$ à $u = 3\beta$, les limites successives de $\operatorname{Tang}^2 w$ seront

$$\frac{Oa^2}{z_n^2} = 1A_4, \quad \frac{Oc^2}{z_n^2} = 1B_4, \quad \frac{Oe^2}{z_n^2} = 2A_4,$$

tandis que les limites de v, dont les valeurs commencent successivement à ac et ce, et finissent à ae, sont respectivement

$$\text{Lim. infér.: } \quad \operatorname{Sin} v = \frac{y_0}{\varrho} = \frac{y_0}{z_n \operatorname{Tang} w}, \quad \operatorname{Cos} v = \frac{Oq}{\varrho} = \frac{x_n}{z_n \operatorname{Tang} v},$$

$$\text{„ supér.: } \operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_0}, \qquad \operatorname{Tang} v = \frac{y_0}{x_0},$$

ce qui s'accorde avec le 5° tableau.

L'aire $a'fd'b'$ montre que, de $u = 3\alpha$ à $u = 1\beta$, les limites successives de $\operatorname{Tang}^2 w$ seront

$$\frac{Oa'^2}{z_n^2} = 2A_5, \quad \frac{Of^2}{z_n^2} = 2B_5, \quad \frac{Oc'^2}{z_n^2} = 1B_5, \quad \frac{Od'^2}{z_n^2} = 3A_5,$$

tandis que les limites de v, dont les valeurs commencent successivement à $a'c'$ et $c'd'$, et finissent à $a'f$ et fd', seront respectivement

$$\text{Lim. inf.: } \operatorname{Sin} v = \frac{a'k}{z_n} = \frac{y_0}{z_0 \operatorname{Tg} w}, \quad \operatorname{Sin} v = \frac{y_0}{z_0 \operatorname{Tg} w}, \quad \operatorname{Cos} v = \frac{Ol}{\varrho} = \frac{x_n}{z_0 \operatorname{Tg} w},$$

$$\text{„ sup.: } \operatorname{Cos} v = \frac{Ok}{z_n} = \frac{x_0}{z_0 \operatorname{Tg} w}, \quad \operatorname{Tg} v = \frac{y_n}{x_n}, \qquad \operatorname{Tg} v = \frac{y_n}{x_n},$$

ce qui s'accorde avec le 6° tableau.

Enfin l'aire $fb'd'$ montre que, de $u = 3\alpha$ à $u = 2\beta$, les limites successives de $\operatorname{Tang}^2 w$ seront

$$\frac{Of^2}{z_n^2} = 1A_6, \quad \frac{Ob'^2}{z_n^2} = 2B_6, \quad \frac{Od'^2}{z_n^2} = 2A_6,$$

tandis que les limites de v, dont les valeurs commencent à fd' et finissent successivement à fb' et $b'd'$, sont respectivement

$$\text{Lim. infér.: } \operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_n}, \qquad \operatorname{Tang} v = \frac{y_n}{x_n};$$

$$\text{„ supér.: } \operatorname{Cos} v = \frac{x_0}{z_0 \operatorname{Tang} w}, \quad \operatorname{Sin} v = \frac{kb'}{\varrho} = \frac{y_n}{z_0 \operatorname{Tang} w};$$

ce qui s'accorde avec le dernier tableau 7.

Il est évident que l'on n'a pris les intégrales précédentes que pour avoir des exemples où les calculs puissent s'achever. On y voit que la détermination des limites, dans le cas le plus général, et lorsque les inégalités à resoudre ne sont pas linéaires, restera sujette à de grandes difficultés, surtout quand les anciennes variables n'ont pas de relation géométrique avec les nouvelles.

Faute à corriger.

Tab. IV. Fig. 7. manque au point d'intersection des lignes AB et DF la lettre b.

Berichtigungen.

Einige Berichtigungen zu der Abhandlung des Herrn Grafen v. Pfeil in Thl. XLI. Nr. XV.

S. 155. Z. 10. v. u. statt „C'“ s. m. „C''.“
„ 159. „ 15. statt „g ewinnt“ s. m. „gewinnt.“
„ 160. „ 11. statt „Fig. IV.“ s. m. „Fig. VI.“
„ 163. „ 6. v. u. In einigen Exemplaren scheint statt „BB'“ unrichtig „BB“ zu stehen.
„ 168. „ 7. statt „C'“ s. m. „C''.“
„ 174. „ 1. statt „Taf. II.“ s. m. „Taf. I.“

Ueber die beiden Figurentafeln schreibt mir Herr Graf v. Pfeil:

„Auf Taf. I. Fig. XIII. muss es statt C' heissen C. In Fig. XV., unten bei den Zahlen, folgt auf 16 die Ziffer 27. Es muss heissen 24. In Fig. VIII. muss statt C'' stehen C und statt C' muss stehen C''. Dieser Fehler ist besonders wichtig, weil er die Ent-

wickelung auf S. 10., zweiter Fall, Z. 10 p. p. fast unverständlich macht. Minder wichtig ist, dass Fig. XVI. der bezügliche Bogen gar nicht in 3 Theile getheilt ist. Fig. V. ist durch blosses Probiren getheilt, was man erkennt, wenn man mehrere Theile zugleich in den Zirkel nimmt. Bei den grösseren Theilungen ging das nicht an, und diese sind gut. Bei Fig. X. fehlen die Ziffern. Sie sind jedoch nicht wichtig."

Berichtigungen zu Thl. XLI.

S. 72. [8. 3)] anstatt $a \overset{=}{<} \frac{1}{3}c \pm \frac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}$ setze:

$$a \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{3}c \pm \frac{1}{3}\sqrt{c^2-3b} \\ \lessgtr \frac{1}{3}c \pm \frac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}. \end{array} \right.$$

„ 75. Z. 4 v. o. anstatt „den grösseren" setze: „den grösseren oder kleineren."

„ 75. Z. 7 „ „ „ $>$ setze: $\gtrless$.

„ 75. Z. 10 „ „ „ $<$ „ $\lessgtr$.

„ 76. [14. 2)] „ $3b$ „ b.

„ 77. [15. 2)] „ $3b$ „ b.

„ 96. 14) „ $<+16$ „ $>+16$.

Literar. Ber. Nr. CLXII. S. 8. Vom Anfange des Briefes des Herrn Prouhet an:

Zeile 5 für „objèt" s. m. „objet."
„ 9 „ „m'en a fait" s. m. „m'a fait."
„ 22 „ „m'ètre" s. m. „m'être."
„ 4 v. u. für „sujèt" s. m. „sujet."

Verzeichniss der in Schrön's siebenstelligen Logarithmen neuerdings aufgefundenen Fehler.

N°. 9. Tafel I. S. 182. log 98175 statt 0009 lies *009.
„ 10. „ II. „ 359. Diff. zwischen log tang 25° 55′ 30″ und 40″ statt 636 lies 536.
„ 11. „ II. „ 359. Diff. zwischen log tang 25° 55′ 40″ und 50″ statt 635 lies 535.
„ 12. „ II. „ 359. Diff. zwischen log tang 25° 55′ 50″ und 56″ statt 636 lies 536.

Literarischer Bericht
CLXI.

Am 17ten Juli 1863 starb in Potsdam der Prediger

Dr. Wilhelm Lehmann

im 63sten Lebensjahre, dem das Archiv einige werthvolle Aufsätze verdankt. Sein reger unausgesetzter Fleiss war vorzüglich astronomischen Studien gewidmet, wie namentlich aus den Astronomischen Nachrichten, die viele werthvolle Arbeiten von ihm enthalten, bekannt ist.

Geschichte der Mathematik.

Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker von Dr. Moritz Cantor. Mit vier Tafeln. Halle. H. W. Schmidt. 1863. 8°.

In der Vorrede sagt der Herr Verfasser: „Man ist zu der Ueberzeugung gelangt, dass die Menschheit einem Organismus gleicht, dessen einzelne Glieder in immerwährender, wenn auch nicht stets auf den ersten Blick ersichtlichen Verbindung stehen. Man hat sich der Gewissheit nicht verschliessen können, dass jede Bewegung des einzelnen Gliedes früher oder später, mehr oder weniger, auch den übrigen sich mittheile, und daher auch nur im Zusammenhange betrachtet und beurtheilt werden könne. Auch die Geschichte der einzelnen Kulturen mussten einer Kulturgeschichte weichen. Man suchte nachzuweisen und die Schule, die den Versuch wagte, wächst täglich, dass das Kulturleben der Völker ebensowenig abgeschlossen ist, wie ihr

politisches Leben. Das ist eigentlich selbstverständlich, und dennoch gilt es hier, noch manche Vorurtheile zu vernichten. Es gilt noch immer den Beweis zu führen, dass, wo Völker friedlich oder feindlich zusammentrafen und längere Zeit mit einander verkehrten, nothwendiger Weise die Bildung derselben sich vermischen musste, dass aber auch rückwärts der Schluss gezogen werden könne: Wenn bei Völkerschaften eine Aehnlichkeit auf diesem oder jenem Gebiete der Geistesentwickelung stattfindet, so ist das meistens kein blosser Zufall, sondern die Folge von gegenseitiger Einwirkung oder gemeinsamem Ursprunge."

Zur Beweisführung hiefür hat man die Götterfiguren der einzelnen Religionen, die Wortformen der einzelnen Sprachen, die Kunststyle der Bauwerke und Skulpturen, die Literaturen mit einander verglichen. Da nun nichts natürlicher ist, als dass bei dem Verkehre der Völker, wie bei dem der Einzelnen solche Verhältnisse sich ergeben mussten, welche eine mathematische Bildung, einfachster Art wenigstens, theils nöthig machten, theils voraussetzten; so lag für den als Mathematiker mehrfach bewährten Herrn Verfasser ein Feld historisch-mathematischer Forschung **im obigen Sinne** vor, welches zu betreten sich wohl der Mühe verlohnte. Und wir glauben in der That, dass kein Leser das vorliegende Buch, in welchem der Herr Verfasser eine grosse historische Gelehrsamkeit und Belesenheit entwickelt, ohne vielfache Belehrung und ohne den Gewinn mancher neuen Aufschlüsse, aus der Hand legen wird, weshalb wir also recht sehr auf dasselbe aufmerksam machen, ohne nach der Natur unserer literarischen Berichte näher auf seinen Inhalt, noch viel weniger auf eine Kritik mancher Ansichten des Herrn Verfassers, die wir auch anderen (allgemein) historisch und sprachlich mehr gebildeten Männern, als wir selbst zu sein uns rühmen dürfen, in diesem Falle wenigstens theilweise überlassen müssten, eingehen zu können. Alle literarischen Nachweisungen und Beweisstellen sind sehr zweckmässig an das Ende verwiesen, wodurch die Lecture jedenfalls leichter und angenehmer gemacht wird.

Nachdem wir im Vorhergehenden die Haupttendenz des Buches deutlich genug bezeichnet haben, müssen wir uns ausserdem mit der folgenden Angabe der Ueberschriften der Hauptabschnitte begnügen, woraus man zugleich sehen wird, dass die Geschichte der Zahlzeichen sich wie ein rother Faden durch das ganze Werk hindurch zieht, wie dies auch gar nicht anders sein konnte.

Einleitung. — I. Die Egypter. — II. Die Babylonier. — III.

Arithmetik.

Bemerkungen über ältere und neuere mathematische Tafeln. Von A. Gernerth. (Besonders abgedruckt aus der Zeitschrift f. d. österr. Gymn. VI. Heft. S. 407 ff.). Wien. C. Gerold's Sohn. 1863. 8⁰.

In dieser Schrift hat der Herr Verfasser die Resultate einer sehr mühevollen, höchst verdienstlichen Arbeit veröffentlicht, die ihn, wie wir ihm gern glauben, eine längere Reihe von Jahren beschäftigt hat. Nachdem Gauss in seiner bekannten Abhandlung (Astronomische Nachrichten. Bd. 32. S. 181—187.) nachgewiesen hatte, dass in Vega's „Thesaurus logarithmorum" unter 68038 Logarithmen im trigonometrischen Theile nach einer auf Wahrscheinlichkeit beruhenden Schätzung zwischen 31983 und 47746 fehlerhafte zu erwarten seien: war eine Arbeit, wie sie jetzt von Herrn Gernerth vorliegt, in der That ganz an der Zeit, und leider hat die von demselben vorgenommene sehr sorgfältige und umfassende Revision einer grösseren Anzahl älterer und neuerer mathematischer Tafeln die Richtigkeit des von Gauss aus Wahrscheinlichkeitsgründen abgeleiteten Resultats im Allgemeinen leider nur zu sehr bestätigt. Herr G. theilt die revidirten Tafeln in drei Klassen: A. Aeltere Werke. B. Neuere Werke mit wenigen Fehlern. C. Neuere Werke mit vielen Fehlern. Nach der angestellten Revision befinden sich unter 100 Tabulargrössen:

0,001 Fehler in Schrön, Braunschweig, 1860;
0,01 „ „ Winkler, Wien, 1839;

0,02	Fehler in	Salomon, Wien, 1827;
0,02	„ „	Hantschl, Wien, 1833;
0,02	„ „	August, Berlin, 1848;
0,10	„ „	Hutton, London 1822;
0,23	„ „	Shortrede, Edinburgh, 1849;
0,27	„ „	Pitiscus, Francofurti, 1613;
0,48	„ „	Rheticus, Neostadii, 1596;
1,02	„ „	Böhm, Innsbruck, 1852;
1,29	„ „	Baudisson, Paris, 1861;
2,58	„ „	Domke, Berlin, 1855;
4,71	„ „	Rühlmann, Leipzig, 1859;
4,98	„ „	Stampfer, Wien, 1852;
5,56	„ „	Hülsse, Leipzig, 1849;
10,93	„ „	Kolbe, Halberstadt, 1844;
33,75	„ „	Gronwaldt, Quedlinburg, 1850;
70,28	„ „	Beskiba, Wien, 1842.

Die genauesten unter allen revidirten Tafeln sind also

die Tafeln von Schrön,

welche, wie der Herr Verfasser auf S. 26. mit Recht sagt, „wohl das ausgezeichnetste und correcteste logarithmische Werk sind, welches je erschienen ist.“ Ausser den von Herrn Schrön selbst aufgefundenen und im Archiv Thl. XXXVI. S. 384 mitgetheilten Fehlern hat Herr G. bei seiner sehr sorgfältigen und umfassenden Revision nur noch einen Fehler aufgefunden, nämlich den folgenden:

Seite 76 der Interpolationstafel lognat. 1,0009

statt: 0,00089 95952 42836 0

müss stehen: 0,00089 95952 42836 1

In den Tafeln von Hantschl*), Salomon, Winkler sind beziehungsweise nur 2, 2, 3 Fehler aufgefunden worden. Die beiden Fehler bei Hantschl sind die folgenden:

log 3271 statt 514680 muss stehen: 514681,

---

*) Ich kann diese sechsstelligen, auch die natürlichen Linien enthaltenden Tafeln von Hantschl, deren ich mich selbst gern bediene, recht sehr empfehlen, und thue dies hier um so lieber, weil dieselben gar nicht nach Verdienst bekannt zu sein scheinen.

log 3304 statt 519565 muss stehen: 519566.

Auch die freilich (im Allgemeinen) nur fünfstelligen, wo natürlich weniger Gelegenheit zu Fehlern geboten wird als in mehrstelligen Tafeln, Tafeln von August haben sich recht genau erwiesen. Weil dieselben namentlich auf preussischen Schulen häufig gebraucht werden, so theile ich vollständig mit, was der Herr Verfasser über dieselben sagt:

„In diesen“ — (revidirten) — „20980 Tabulargrössen habe ich 10 Fehler gefunden. Von diesen 10 Fehlern wurden aber 5 bereits im Jahre 1856 von Dr. W. Lehmann in den astronomischen Nachrichten 43. Band, S. 225—228 bekannt gemacht, und 4 davon sind in August's Tafeln (4te Auflage 1856) nicht mehr vorhanden. Es verbleiben demnach für meine Revision unter 20980 Tabulargrössen 5 Fehler; mithin kommen durchschnittlich auf 100 Tabulargrössen 0,02 Fehler.

Das Fehlerverzeichniss ist folgendes:

Seite	66	tang	12°	statt	0,2125565	muss stehen:	0,2125566,
„	„	„	23°	„	0,4244749	„ „	0,4244748,
„	„	„	29°	„	0,5543090	„ „	0,5543091,
„	67	„	37°	„	0,7535540	„ „	0,7535541,
„	„	„	42°	„	0,9004041	„ „	0,9004040.

Lehmann sagt in dem oben angegebenen Aufsatze, S. 228, dass in August's Tafeln

statt $\cot g\, 1^\circ = 57{,}2899617$ zu setzen sei $\cot g\, 1^\circ = 57{,}2899616$.

August hat diese Aenderung in seinen Tafeln nicht vorgenommen, offenbar in der Ueberzeugung, dass der von ihm angegebene Werth richtig sei, was aber nicht der Fall ist. Nach Rheticus ist:

$$\cot g\, 1^\circ = 57{,}2899617'499,$$

was, auf 7 Decimalstellen gekürzt, den von August aufgestellten Werth geben würde. Der Werth des Rheticus für $\cot g\, 1^\circ$ ist aber falsch. Ich finde nach meiner Rechnung

$$\cot g\, 1^\circ = 57{,}2899616\,308,$$

wobei der Fehler negativ und kleiner als eine halbe Einheit der zehnten Decimalstelle. Auf 7 Decimalstellen gekürzt ist also zu setzen:

$$\cot g\, 1^\circ = 57{,}2899616.$$

Sehr ungenau sind:

Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln u. s. w. von F. Domke, zweite Auflage, Stereotypausgabe, Berlin, 1855. 8.

in denen Herr G. nicht weniger als **838** Fehler unter 32500 Tabulargrössen entdeckt hat, von denen auf S. 32 fünf Procent angegeben worden sind, und in den bekannten Tafeln von Hülsse sind **600** Fehler unter 10800 Tabulargrössen aufgefunden worden, von denen gleichfalls 5 Procent auf S. 38 mitgetheilt worden sind.

Ich hätte gewünscht, dass Herr G. statt der Ausgabe von 1705 von Sherwin's: Mathematical tables die Ausgabe von 1742 revidirt hätte, weil diese letztere für die genaueste gehalten wird, auch genauer als die von Clark besorgte neuere Ausgabe von 1770 (M. s. Klügel im mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 695 und Karstens Lehrbegriff der Mathematik Thl. II. §. 151.). Da von den als in der Ausgabe von 1705 vorkommend bemerkten 589 Fehler keine wirklich angegeben sind, so kann ich nicht beurtheilen, ob dieselben in der Ausgabe von 1742 vorkommen.

Wir glauben, dass Herr Gernerth durch seine eben so zeitraubende als mühevolle Arbeit sich ein sehr grosses Verdienst erworben hat, und sind der Meinung, dass von jetzt an viele künftige Herausgeber mathematischer Tafeln grössere Vorsicht als bisher anzuwenden sich veranlasst finden werden. Schliesslich möchten wir den Herrn Verfasser noch bitten, auch die Tafeln von Hoüel (m. s. Literar. Ber. Nr. CL. S. 1.), welche nach unserer Meinung verschiedene treffliche, die Sicherheit, Leichtigkeit und Genauigkeit sehr fördernde besondere Einrichtungen besitzen, wie wir dies a. a. O. ausführlicher auseinandergesetzt haben, eben so wie die Tafeln von Bremiker, einer recht genauen Revision rücksichtlich der darin vielleicht enthaltenen fehlerhaften Logarithmen zu unterziehen und das Resultat recht bald mitzutheilen. G.

Geometrie.

Betreffend die bei dem Verleger des Archivs erscheinende Uebersetzung der **Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane** von Herrn Professor **Cremona in Bologna.**

Die Leser des Archivs wissen aus den auf den Umschlägen dieses Journals befindlichen Anzeigen, dass bei dem Verleger des Archivs eine Uebersetzung der trefflichen Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane von Herrn Professor L. Cremona in Bologna erscheint. Wenn auch an dieser Uebersetzung schon gedruckt wird, so hat die Arbeit doch augenblicklich einige Unterbrechung erleiden müssen, weil mir Herr Cremona unter dem 30. April 1863 aus Neapel*) schrieb, dass nach Herrn Chasles Meinung einige in der „Introduzione" mitgetheilte Sätze von Herrn Jonquières (Liouville's Journal. Avril 1861) einer Rectification bedürften, die er aber nur erst nach der Rückkehr von seiner Reise nach Sicilien, auf der er sich eben mit einer gouvernementalen scholastischen Mission befand, unternehmen könne, mir aber dann sogleich für die Uebersetzung schicken würde, wobei er hinzufügte: „Ainsi l'édition allemande aura un grand avantage sur l'original italien", wofür ich natürlich Herrn Cremona sehr dankbar bin, und dies hier zur Anzeige bringe. Zugleich sprach derselbe gegen mich den Wunsch aus, den von Herrn Jonquières in der fraglichen Angelegenheit an ihn geschriebenen, in dem Giornale di Matematiche. Aprile 1863 abgedruckten Brief auch in das Archiv aufzunehmen, welches ich natürlich sehr gern thue, indem ich diesen Brief nachstehend abdrucken lasse, dazu aber leider nur erst heute im Stande bin, weil die vier ersten Hefte des vorher genannten trefflichen neuen Journals, welches vom Anfange dieses Jahres an in Neapel erscheint (m. s. ausführlich nachher unter Vermischte Schriften), nur erst heute in meine Hände gelangt sind, was mich bei Herrn Cremona entschuldigen wird, dass der von ihm gewünschte Abdruck des Briefes des Herrn Jonquières nicht schon früher erfolgt ist.

Am 23. Juli 1863. Grunert.

„Vera-Cruz, le 6 Fevrier 1863.

Vous avez eu la bonté, dans votre Introduction à la théorie des courbes planes, de citer quelques théorèmes, que j'ai donnés dans un article inseré au tome VI (2e série) du Journal de Mr. Liouville, pour 1861. J'ai l'honneur de vous faire

---

*) Er befand sich damals auf einer Reise nach Sicilien „avec une mission scolastique du gouvernement", und hatte zu Genua, wo er sich eingeschifft hatte, bei Herrn Professor Tardy zufällig das die Anzeige von dem Erscheinen einer Uebersetzung seiner „Introduzione" enthaltende Heft des Archivs gesehen.

remarquer que plusieurs de ces théorèmes sont énoncés par moi en termes **trop absolus**, quand il s'agit des séries de courbes d'ordre n et d'indice N. Les nombres, qui figurent dans ces énoncés, sont absolument exacts si, les courbes étant d'un degré quelconque, l'indice $N=1$, c'est à-dire si la série est un faisceau; ou encore si, l'indice N étant quelconque, les courbes se réduisent à des droites, Mais pour n et N à la fois quelconques, les nombres dont il s'agit (sauf celui du théorème I) sont des **limites supérieures** et non des nombres absolus; ce que j'ai eu tort de ne pas dire. Il faut donc ajouter à la plupart de ces théorèmes ces mots: **en général et au plus**. Par exemple, l'énoncé du théorème V doit se terminer ainsi: .... **le lieu des points d'intersection de deux courbes C_m, C_n correspondantes est, en général et au plus, $N(m+n)$**.

Il en est ainsi, en particulier, du théorème IX, que Mr. **Bischoff** à énoncé le premier, sans restriction; du moins il a été ainsi dans les **Nouvelles Annales de Mathématiques**. Quand je le lus, dans le manuscrit de ce journal, j'écrivis à l'excellent et regrettable Mr. **Terquem** pour le prevenir que le théorème me semblait trop général; car il ne s'appliquait pas aux coniques; aussi Mr. **Terquem** ajouta-t-il une note, très discrète. Plus tard, il me vint des scrupules d'avoir osé suspecter l'analyse de Mr. **Bischoff**, qui est très honorablement connu dans la science, et je préferai me suspecter moi-même. De là les efforts que je fis, dans l'article précité du Journal de Mr. **Liouville**, pour mettre d'accord avec Mr. **Bischoff**, et notamment dans le §. XI., où je me livre, à l'égard des coniques, à des insinuations qu'elles ne méritent sans doute pas.

J'ai reconnu, depuis lors, qu'il eût été plus sage de m'en tenir à ma première opinion; et, comme je ne voudrais pas que l'insuffisance de ma redaction pût induire en erreur de jeunes géomètres, je m'empresse de vous la signaler, en vous autorisant Monsieur, à faire, dans ce but, l'usage que vous voudrez de la presente lettre.

Je saisis, Monsieur, cette nouvelle occasion etc.

E. **de Jonquières**,
Commandant la corvette Le Berthollet."

Non potendo ora occuparmi dell' argomento, colla pubblicazione di questa lettera dell' esimio geometra francese, intendo anche di mettere in guardia i giovani lettori della mia **Intro-**

duzione contro le magagne dei teoremi che concernono le serie di curve d'indice qualsivoglia.

Bologna, 16 Aprile 1863. L. Cremona.

Mechanik.

Theorie der Elasticität fester Körper von Doctor A. Clebsch, Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe *). Leipzig. Teubner. 1862.

Der Herr Verfasser hat in dem vorliegenden Buche ein der Beachtung sehr zu empfehlendes Lehrbuch der Elasticitätstheorie geliefert, mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten von Saint-Venant über Stäbe von endlichem Querschnitt, so wie von Kirchhoff über sehr dünne Stäbe, und mit einer nicht geringen Anzahl neuer Untersuchungen, wobei er auch bei der Untersuchung von Scheiben zu Resultaten gelangt ist, die Kirchhoff's Theorie der Klangfiguren einschliessen. Wegen der analytischen Transformationen Lamé's wird dagegen auf dessen bekanntes Werk selbst verwiesen, und auch alle die Theorie des Lichts betreffende Untersuchungen wurden ausgeschlossen. Die Anwendung der durch die Integralrechnung dargebotenen Hülfsmittel ist überall so viel als möglich beschränkt worden, was wir in einem Buche, das z. B. auch dem Techniker dienen soll, nur billigen können. Das ganze weite Gebiet ist in zwei Haupttheile: Theorie elastischer Körper von überall endlichen Dimensionen und Theorie elastischer Körper, deren Dimensionen zum Theil sehr klein (unendlich klein) sind, getheilt worden, woran sich dann eine längere Reihe von Anwendungen schliesst, nämlich: Ausdehnung von Stäben mit überall gleichem Querschnitt; Ausdehnung von Stäben bei veränderlichem Querschnitt und überall gleicher Spannung; Biegung im Allgemeinen; Biegung unter dem Einfluss stetig vertheilter Kräfte ohne Zug oder Druck in Richtung der Axe; Spannungen und Tragvermögen, Berechnung der Trägheitsradien; Biegung unter dem Einfluss stetig vertheilter Kräfte, verbunden mit Einzelkräften; veränderliche Querschnitte; Biegung bei sehr grossem Zug oder Druck in der Richtung der Längenaxe, Säulenfestigkeit; Stabsysteme ohne Biegung; Stabsysteme mit Biegung; Torsion.

---

*) Jetzt an der Universität in Giessen.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori

G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi

collaboratori

Avena Carlo	Fergola Emmanuele
Beltrami Eugenio (Bologna)	Gasparis (de) Annibale
Betti Enrico (Pisa)	Grosso (del) Remigio
Brioschi Francesco (Milano)	Padula Fortunato
Casorati Felice (Pavia)	Rubini Raffaele
Cremona Luigi (Bologna)	Sabato Andrea
Dorna Alessandro (Torino)	Sannia Achille.

Napoli Benedetto Pellerano Editore, Libreria scientifica industriale, Strada di Chiaia, 60.

(Ogni mese si darà un fasciculo di pag. 32 in 8° grande. — Prezzo per Napoli un anno L. 12. Prezzo pel resto d'Italia (franco) L. 14.)

Je grösser das Interesse ist, welches wir an dem so kräftigen Fortschreiten der mathematischen und physikalischen Wissenschaften — so wie der Wissenschaften überhaupt — in dem neuen Königreiche Italien, wie es uns täglich in immer schönerem Lichte entgegentritt, nehmen; je grösser unsere Freude ist über die kräftige Förderung, welche die Regierung König Victor Emanuels vorzugsweise auch dem mathematischen und physikalischen Unterrichte zu Theil werden lässt, und über die grosse und allseitige Aufmerksamkeit, welche dieselbe diesem Unterrichte widmet: desto lebhafter begrüssen wir das obige neue mathematische Journal, welches mit dem Anfange dieses Jahres in Neapel unter der Redaction dreier ausgezeichneter neapolitanischer Mathematiker, mit einer grossen Anzahl der trefflichsten Mitarbeiter, die alle dem eigentlichen Königreiche Italien angehören, in's Leben getreten ist. Die Worte auf dem Titel:

„ad uso degli studenti delle università italiane"

bezeichnen deutlich genug, dass dieses neue Journal hauptsächlich und ganz besonders der Förderung des mathematischen Unterrichts gewidmet ist, ohne natürlich die Förderung der Wissenschaft auszuschliessen, wobei es sich vorzugsweise die Einrichtung der „Nouvelles Annales de Mathématiques" zum Muster genommen zu haben scheint. Der Inhalt der uns

jetzt vorliegenden vier ersten Hefte berechtigt uns vollständig, unsere Leser, ganz besonders aber auch alle Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, dringend auf dieses neue mathematische Journal aufmerksam zu machen, da sie namentlich in demselben Vieles finden werden, was ihrem eigenen Unterrichte förderlich sein kann; es ist keineswegs immer die Neuheit der Resultate, welche in diesem ad uso degli studenti delle università italiane bestimmten Journale erstrebt wird, sondern noch öfter die Verbesserung und Vereinfachung der Darstellungsmethoden im Interesse des Unterrichts, und zwar nach meiner Meinung mit vollem Rechte, denn:

„Al punto in che siamo arrivati oggi, noi abbiamo assai meno bisogno di crear nuove teoriche, che di ridurre ai loro minimi termini, se è lecito di così parlare, le teoriche di già conosciute; principalmente ove riflettasi che, in ogni cosa, ciò che avvi di più semplice e di più generale è d'ordinario quello che riluce per ultimo, e svelasi al pensiero ricercante la verità in amichevole accordo col bello e col buono" *).

Der Inhalt der mir bis jetzt vorliegenden vier Hefte ist der folgende:

Anno I. — Gennaio 1863. Teoria elementare delle forme geometriche; per G. Battaglini p. 1. — Teoria geometrica delle curve del secondo ordine; per V. Janni. p. 7. — Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogonee; per N. Trudi. p. 11. — Intorno ad una trasformazione delle forme quadratiche; per F. Brioschi. p. 25. — Dimostrazione di un teorema proposto dal Capitano Faure; per Enrico d'Ovidio. p. 28. — Nota intorno ad una proprietà del cerchio de' nove punti; per N. Trudi. p. 29.

Anno I. — Febbraio 1863. Teoria delle funzioni ellittiche; per R. Rubini. p. 33. — Teoria elementare delle forme geometriche; per G. Battaglini. (Continuazione.) p. 41. — Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogonee; per N. Trudi. (Continuazione.) p. 47. — Una dimostrazione del teorema di Sturm; per N. Trudi. p. 59. — Quistioni. p. 63.

Anno I. — Marzo 1863. Sopra una proprietà delle forme ternarie. Nota del prof. F. Brioschi. p. 65. — Soluzione d'un problema relativo alle superficie di second' ordine; per Eugenio Beltrami. p. 68. — Nota sulla catenaria di eguale resistenza, del

*) Chelini: Della legge onde un Ellipsoide etc. etc. Bologna. 1862. p. 3.

libero insegnante nell' università di Torino, ingegnere professore Alessandro Dorna. p. 73. — Teoria geometrica delle curve del 2° ordine; per V. Janni. (Cont. v. pag. 7.) p. 77. — Su' teoremi del Poncelet relativi a' poligoni iscritti e circoscritti alle coniche; per N. Trudi. p. 81. — Quistioni. p. 91. — Necrologia: Ottaviano Fabrizio Mossotti. p. 91. — Bibliografia: Sulla introduzione ad una teoria Geometrica delle curve piane; per Luigi Cremona, professore dell' università di Bologna. p. 93.

Anno I. — Aprile 1863. Teoria elementare delle forme geometriche; per G. Battaglini. (Cont. v. pag. 41.) p. 97. — Sulle coniche di nove punti; nota di Eugenio Beltrami. p. 109. — Teoria delle funzioni ellittiche; per R. Rubini. (Continuaz. v. pag. 33.) p. 118. — Sulle equazioni algebriche; nota di E. Beltrami. p. 123. — Su' teoremi del Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche; per N. Trudi. (Continuaz. v. p. 90.) p. 125. — Soluzione di alcune questioni proposte nel fascicolo di Febbraio 1863 del Giornale di Terquem inviateci da alcuni giovani studenti. p. 126. — Corrispondenza. p. 128.

Wir wünschen diesem, von so kundigen Händen geleiteten Unternehmen den besten und ungestörtesten Fortgang, und sind überzeugt, dass dasselbe dem gesammten mathematischen Unterrichte die reichsten Früchte tragen wird. Grunert.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia*), A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CLX. S. 10.)

Tom. V. Nr. 1. Proprietà di una maniera di poligoni derivati. Nota di R. Rubini. p. 3. — Sopra un teorema di geometria descrittiva e sua applicazione al tracciamento dell' ombra di alcuni corpi. Nota del Prof. Giuseppe Bruno. p. 18. — Etudes sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'un ordre quelconque. Par E. de Jonquières. p. 24. — Sur un triple système particulier de surfaces orthogonales. Par M. Edouard Combescure. p. 39. — Lettre de M. W. Roberts au redacteur. p. 52. — **Rivista bibliografica.** Intorno al Liber Karastonis. Lettera di Maurizio Steinschneider a D. Baldassarre Boncompagni. p. 54. — Cenno necrologico di Ottaviano Fabrizio Mossotti. p. 60.

*) Jetzt in Mailand.

Nova Acta Regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. IV. Fasciculus prior. Upsaliae. C. A. Leffler. 1862. 4°. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. CLIV. S. 9.)

Dieser neue Band der wichtigen Schriften der Königl. Schwedischen Societät der Wissenschaften in Upsala enthält die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen, welche alle auch in besonderen Abdrücken zu beziehen sind.

Déterminer la relation qui doit exister entre les coefficients d'un polynôme, dont la lettre principale est x, pour que le polynome contienne un facteur de la forme $(x^n - a^n)$. Par **V. v. Zeipel.**

Der Herr Verfasser hat seine interessante Untersuchung, auf die wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen, in zwei Abtheilungen getheilt, von denen die erste sich mit der Bestimmung der Form der Function

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m$$

beschäftigt, welche dieselbe haben muss, wenn sie den Factor $x^2 - a^2$ enthalten soll; wogegen in der zweiten der allgemeinere Fall, wenn die Function $F(x)$ den Factor $x^n - a^n$ enthalten soll, erledigt worden ist. Die Entwickelungen des Herrn Verfassers, in denen von der Theorie der Determinanten mehrfach Gebrauch gemacht wird, und die gewonnenen Resultate müssen natürlich in der Abhandlung selbst nachgesehen werden.

Recherches sur les propriétés magnétiques du fer. Par **T. R. Thalén.**

Ueber diese Abhandlung ist schon im Liter. Ber. Nr. CLIII. S. 6. besonders berichtet worden, worauf wir also verweisen.

Sur deux inégalités d'une grandeur rémarquable dans les apparitions de la comète de Halley. Par **A. J. Ångström.**

Wir glauben unsern für diesen jedenfalls sehr wichtigen Gegenstand sich interessirenden Lesern am Besten zu dienen, wenn wir den Zweck dieser Abhandlung mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers im Folgenden angeben, so weit es der durch

diese Literarischen Berichte dargebotene beschränkte Raum verstattet:

„Parmi toutes les perturbations dans les mouvements des planètes que les observations nous ont fait connaître, soit qu'on regarde leurs grandeurs numériques, soit la difficulté de les expliquer, il n'y a probablement aucune qui se soit attiré une plus grande attention que celle qui ce produit dans les mouvements de Jupiter et de Saturne autour du soleil.

Les géomètres les plus celèbres essayaient en vain d'expliquer ce phénomène, quoiqu'il fût connu depuis les plus anciens temps. Ce fut, en effet, en cherchant l'explication mentionnée qu'on a été conduit à la découverte de la loi générale, qui est très remarquable par elle même et possède d'ailleurs par rapport à la conservation de notre système solaire une importance très essentielle, savoir la loi: que les distances moyennes des planètes ne sont assujetties qu'à des variations *périodiques*.

Néanmoins, grace au génie de Laplace, on connaît maintenant que la perturbation susdite dans les mouvements des deux planètes dépend, en réalité, du fait particulier, relativement à la vitesse moyenne de Jupiter et à celle de Saturne, que

$$5♄-2♃$$

est une quantité très petite et que, par conséquent, certains termes, qui ordinairement dans la théorie planétaire sont tout-à-fait négligeables, deviennent ici par la double intégration d'une grandeur assez notable.

Ce fait remarquable, que les temps de révolution des deux planètes les plus grandes sont à peu près commensurables entre eux, jouant continuellement un rôle très important à l'égard de leurs mouvements relatives, doit naturellement se faire sentir aussi dans les perturbations, causées par ces deux planètes sur les mouvements des autres corps célestes; et cela doit se faire avant tout dans les mouvements des comètes, à cause de leurs orbites fort alongées.

Cependant, on peut dire que les observations sont encore trop incomplètes et, outre cela, que les ressources de l'analyse sont, dans la plupart des cas, trop insuffisantes, pour qu'on puisse déterminer ainsi, pour un espace indéfini de temps, la place véritable d'une comète dans son orbite. On est ainsi obligé de recourir à la quadrature mécanique et de déterminer de cette manière pour chaque révolution les coordonnées de la comète. Voilà

pourquoi on ne possède pas encore des ephémerides pour une seule des comètes, dont on connaît le temps de révolution.

La même chose pourra se dire aussi relativement à la comète de Halley, dont on ne possède encore que trois apparitions déterminées avec une exactitude suffisante. Cependant, il a réussi à M. Hind, l'illustre astronome anglais, de tirer d'anciennes annotations les apparitions de cette comète jusqu'à dix ans avant Jésus-Christ avec une très grande probabilité. C'est, en m'appuyant sur ces dates, que je me propose de rendre compte ici de deux variations périodiques, existant actuellement dans le temps de révolution de la comète de Halley, lesquelles surpassent beaucoup, aussi bien par leur grandeur que par la longueur de la période, toutes les variations connues jusqu'ici dans la théorie des planètes et des lunes.

Celle-là de ces deux inégalités, par rapport au temps de révolution de la comète de Halley, qui est plus grande, mérite un intérêt particulier en ce qu'elle dépend de la propriété mentionnée déjà des temps de révolution de Jupiter et de Saturne. En effet, ces temps de révolution des deux planètes sont commensurables non seulement entre eux, mais aussi par rapport à celui de la comète de Halley; — chose fort remarquable, dont on ne connaît d'analogie que dans la théorie des lunes, où on la rencontre à l'égard des trois lunes de Jupiter, les plus rapprochées de la planète."

Den Schluss dieses Bandes bilden die sehr vollständigen, offenbar sehr sorgfältig angestellten und reducirten meteorologischen Beobachtungen für das Jahr 1859 von den Herren Nordlund und Wackerbarth.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin. (Vergl. Literarisch. Bericht Nr. CLVII. S. 16.)

November 1862. Seidel: Die Brennfläche eines Strahlenbündels, welches durch ein System von centrirten sphärischen Gläsern hindurch gegangen ist, mitgetheilt von Hrn. Kummer. S. 696—705. — Quincke: Ueber die Lage der Schwingungen der Aethertheilchen in einem geradlinig polarisirten Lichtstrahle, mitgetheilt von Hrn. Magnus. S. 714—721.

December 1862. Kirchhoff: Ueber das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente, mitgetheilt von Herrn

Magnus. S. 628. (Blosse Nachricht von einem gehaltenen Vortrage ohne jedwede weitere Mittheilung.) — Dove: Ueber die Sturmfluthen an den Küsten der Nordsee und über die Witterung des Novembers 1862. S. 639—644.

Januar 1863. Kummer: Ueber die Klassenzahl der aus zusammengesetzten Einheitswurzeln gebildeten idealen complexen Zahlen. S. 21—28. — Kronecker: Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen. S. 44—50. — Dove: Ueber die Witterungs-Erscheinungen des Winters 1862/63. S. 50—69.

Februar 1863. Weierstrass: 1) Ueber eine neue Form der Differential-Gleichungen, durch welche die Bewegung eines der Schwerkraft unterworfenen festen Körpers um einen unbeweglichen Punkt bestimmt wird. 2) Zur Integration der linearen partiellen Differential-Gleichungen mit constanten Coefficienten, vorgelegt durch Herrn Kummer. S. 86. (Ohne jedwede weitere Mittheilung.)

März 1863. Dove: Ueber den Einfluss der Alpen auf das Klima ihrer Umgebung. S. 96—114. — Quincke: Ueber die optischen Eigenschaften der Metalle, mitgetheilt von Herrn Magnus. S. 115—134. — Magnus: Ueber die Diathermasie trockener und feuchter Luft. S. 149—159.

April, Mai 1863. Dove: Ueber den Einfluss der Richtung der Gebirge auf die Regenmenge. S. 183—187. — Weierstrass: Ueber ein von Herrn E. Bauer angefertigtes Basrelief. (Ohne weitere Mittheilung der gelesenen Abhandlung.) S. 228. — Dove: Ueber die Stürme des Winters 1862/63, am 20. December, am 6. Januar und 20. Januar. (Ohne weitere Mittheilung der gelesenen Abhandlung.) S. 239. 241.

An den Herausgeber.

In Bezug auf die im Literarischen Bericht CLVIII. pag. 10. Ihrer geschätzten Zeitschrift enthaltene Notiz beehre ich mich Ihnen anzuzeigen, dass die Unrichtigkeiten in „Köhler's logarithmischem Handbuch", welche Herr Professor Hoüel in Bordeaux die Güte gehabt hat „en vue de la prochaine édition de ces excellentes tables" mir mitzutheilen, sowol in den Stereotypplatten des Werkes als in den vorräthigen Exemplaren der gegenwärtig im Verkauf befindlichen achten Auflage berichtigt worden sind.

Herr Professor Dr. Bruhns, Director der Sternwarte hier, ist so gefällig gewesen die Aenderungen zu überwachen.

Leipzig, 7. Aug. 1863.

Bernhard Tauchnitz.

Literarischer Bericht
CLXII.

Am 26sten Februar 1863 starb in Prag der verdiente Professor

Jacob Philipp Kulik,

eines der ältesten ordentlichen Mitglieder der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Am 9ten October 1863 starb in Wysoczan bei Prag

Rudolf Skuhersky,

Professor der beschreibenden Geometrie am polytechnischen Institute zu Prag und Landtags-Abgeordneter für Chrudim-Nassaberg, geboren zu Opočno in Böhmen, Verfasser mehrerer werthvoller Schriften über beschreibende Geometrie, orthographische Parallelperspective u. s. w.

Am 12ten October 1863 starb in Wels in Oberösterreich

Maximilian Ritter von Weisse,

Professor der Astronomie und Director der Sternwarte in Krakau, durch vielfache Arbeiten im Gebiete der beobachtenden und rechnenden Astronomie, der Meteorologie, des Magnetismus u. s. w. hoch und vielfach verdient. Sein neuestes wichtiges Werk ist:

Positiones mediae stellarum fixarum in zonis Regiomontanis a Besselio inter $+15^{\circ}$ et $+45^{\circ}$ declinationis observatarum, ad annum 1825 reductae et in catalogum ordinatae auctore Maximiliano Weisse, Directore quondam speculae Cracoviensis. Jussu Academiae Imperialis Petropolitanae edi curavit et praefatus est Otto Struve, speculae Pulcovensis Director. Petropoli, 1863. 4°.

Unterrichtswesen.

Der höhere polytechnische Unterricht in Deutschland, in der Schweiz, in Frankreich, Belgien und England. Ein Bericht an den hohen Landesausschuss des Königreichs Böhmen, und mit dessen Genehmigung veröffentlicht von Karl Kořistka, Professor am polytechnischen Landesinstitut in Prag, und mehrer gel. Gesellschaften Mitglied. Mit zwei Plänen. Gotha. R. Besser. 1863.

Der hohe Landesausschuss des Königreichs Böhmen beehrte im Sommer des verflossenen Jahres den Herrn Verfasser mit dem Auftrage, die bedeutenderen polytechnischen Schulen in Deutschland, namentlich jene von Hannover, Carlsruhe und Zürich zu besuchen, ihre Einrichtung zu studiren und über die gemachten Wahrnehmungen einen Bericht zu erstatten, in wiefern die dortigen Einrichtungen bei der bevorstehenden Reorganisirung des Prager Polytechnikums zu benutzen und einzuführen wären. Dieses Auftrags, welcher zugleich von dem lebhaften Interesse des genannten hohen Landesausschusses für die immer grössere Förderung des polytechnischen Studiums an dem schon lange berühmten Prager Polytechnikum in der erfreulichsten und nachahmungswürdigsten Weise zeugt, entledigte sich der Herr Verfasser nicht bloss in der ihm angedeuteten engeren Ausdehnung mit dem grössten Eifer, sondern erweiterte den Kreis seiner Untersuchungen in so bedeutender Weise, dass er in denselben die polytechnischen Schulen in München, Augsburg, Stuttgart, Carlsruhe, Zürich, Hannover, Berlin und Dresden, ferner die technischen Lehranstalten in Paris, Lyon, Lüttich und Gent, endlich das Wenige, was England in London auf diesem Gebiete besitzt, aufnahm. Auf diese Weise ist aus dem ursprünglich beabsichtigten kürzeren amtlichen Berichte ein Werk entstanden, welches wir für sehr wichtig halten, und einem Jeden, welcher an der Förderung des polytechnischen Unterrichts eben so lebhaftes Interesse nimmt wie wir, namentlich aber auch allen den Behörden in den verschiedenen Ländern, welche die Hand an die Errichtung neuer polytechnischer Lehranstalten legen wollen, dringend und angelegentlichst empfehlen, und nicht bloss dem Herrn Verfasser, sondern auch namentlich dem hohen Landesausschuss des Königreichs Böhmen im Interesse der Sache unseren lebhaftesten Dank aussprechen, dass durch seine Munificenz die Entstehung dieses Werkes, was gewiss in vielen Beziehungen sehr grossen Nutzen stiften wird, möglich gemacht wurde. Alle oben genannten poly-

technischen Lehranstalten sind in der genauesten und eingehendsten Weise charakterisirt in Bezug auf Lehrwesen und Umfang des Unterrichts, mit besonderer Rücksicht auf die an mehreren Orten bestehenden besonderen Vorbereitungsschulen und mit ausführlicher Angabe der Lehrpläne und der Stundenzahl; ferner in Bezug auf die, nicht selten namentlich aufgeführten Lehrer; auf die Schüler und deren Zahl mit Rücksicht auf Konfession, Vaterland und Berufsarten; auf die zur Aufrechthaltung der Disciplin getroffenen Einrichtungen, Preisaufgaben, Beneficien u. s. w. Ganz besondere Aufmerksamkeit hat mit Recht der Herr Verfasser dem Etats- und Budgetwesen gewidmet, worüber er die dankenswerthesten Notizen mittheilt, die bei Einrichtung neuer polytechnischer Schulen von dem grössten Nutzen sein werden; als Beispiele mögen die folgenden Zahlen dienen:

Zürich: { Einnahme 210000 Francs.
Ausgabe 200200 „

Carlsruhe: Einnahme 86000 Gulden rhein.

Stuttgart: { Einnahme 48620 Gulden rhein.
Ausgabe 46260 „ „

Baiern: (München, Nürnberg und Augsburg zusammen) nur nach ungefährer Schätzung 53000 Gulden.

Dresden: 26000 Thlr.
Berlin: 50000 „
Hannover: 32440 „

Dass die mit den verschiedenen polytechnischen Schulen verbundenen Institute, wissenschaftlichen Sammlungen und Werkstätten ganz besondere Berücksichtigung gefunden haben, versteht sich von selbst, und nicht geringere Aufmerksamkeit hat der Herr Verfasser den Gebäuden und Localitäten überhaupt gewidmet; von den Prachtbauten der längst hoch- und weitberühmten polytechnischen Schulen in Carlsruhe und Zürich sind vollständige und sehr genaue Aufrisse und Grundrisse mitgetheilt; und welche Anstrengungen die Königl. Würtembergische Hohe Staatsregierung zur Hebung ihrer polytechnischen Schule gegenwärtig macht, erhellet daraus, dass die Kosten des neuen Prachtbaues einer polytechnischen Schule, welcher jetzt nach Egle's Entwürfen in Stuttgart, in dem oberen Theile der Stadt, in schönster und würdigster Ausstattung aufgeführt wird, zu 365000 Gulden, die der inneren Einrichtung zu 40000 Gulden rhein. veranschlagt sind.

Indem wir schliesslich nur noch im Allgemeinen bemerken, dass der Herr Verfasser sein Werk in sehr zweckmässiger und besonders lehrreicher Weise in zwei grössere Abtheilungen: **Erster**

Theil. Beschreibung der bedeutenderen polytechnischen Schulen. **Zweiter Theil.** Allgemeine Resultate und Vergleichungen getheilt hat, geben wir nur unserem eigenen grossen Interesse an dem polytechnischen Unterrichte erneueten Ausdruck, wenn wir dieses höchst verdienstliche Werk Allen, die ein gleich lebhaftes Interesse dafür beseelt, nochmals dringend zur Beachtung empfehlen. G.

Adressbuch der Grossherzoglich Badischen polytechnischen Schule in Carlsruhe. Studienjahr 1862—63. Carlsruhe.

Wir haben von diesem Adressbuche der hochberühmten polytechnischen Schule in Carlsruhe alljährlich eine kurze Notiz gegeben (Literar. Ber. Nr. CXLVIII. S. 1.*)) und thun dies auch diesmal sehr gern, weil wir aus demselben entnehmen, wie sehr die genannte herrliche Lehranstalt ihren alten wohlerworbenen Ruhm fortwährend behauptet, da die Anzahl der Schüler, ungeachtet in neuerer Zeit die Concurrenz solcher Lehranstalten grösser geworden ist, immer noch die hohe Ziffer von 710 aus 34 verschiedenen Ländern erreicht; und das vollständige Lehrerverzeichniss weist deutlich die unveränderte kräftige Fürsorge der hohen Badischen Staatsregierung für die Blüthe dieser wichtigen Lehranstalt nach.

Arithmetik.

Complemento agli Elementi d'Algebra per R. Rubini. Napoli. Tipografia di A. Morelli. Strada S. Sebastiano N. 51. 1863. 8°.

Man weiss, dass schon Lacroix seinen „Éléments d'Algèbre" ein „Complément des Éléments d'Algèbre**)" hinzufügte, und kennt den schönen „Cours d'Algèbre supérieure", Paris, 1854, von J. A. Serret. Ein so eben erschienenes Werk von ähnlicher Tendenz, welches wiederum den erfreulichsten und schönsten Beweis liefert, welcher Eifer und welches grosse Interesse gegenwärtig in dem neuen Italien dem Betriebe und der Förderung der mathematischen Wissenschaften und dem

---

*) Im Literar. Ber. Nr. CLIV. S. 2. Z. 18. steht durch einen Druckfehler irrthümlich CXVIII. S. 1. statt CXLVIII. S. 1.

**) Auch in's Deutsche übersetzt.

Unterrichte in denselben gewidmet wird, verfasst von dem längst durch viele schöne Arbeiten bekannten Herrn Professor Raffaele Rubini in Neapel, liegt uns jetzt vor, und wir beeilen uns, unsere Leser etwas näher mit demselben bekannt au machen.

Das Werk dient den früher von Herrn R. Rubini verfassten „Elementi d'Algebra. V. edizione", von denen wir später eine Anzeige liefern zu können hoffen, zur Erweiterung und Ergänzung, und enthält also alle diejenigen Lehren der Algebra, welche nicht zu den sogenannten „Elementen" gerechnet zu werden pflegen. Dasselbe besteht aus 16 Capiteln, die in 48 Vorlesungen vertheilt sind, und sein Gesammt-Inhalt kann füglich in drei Hauptabschnitte zerlegt werden: Die XII ersten Kapitel sind der Theorie der Gleichungen gewidmet, nachdem im ersten Kapitel einige allgemeine Sätze von den Functionen mit besonderer Rücksicht darauf, dass eine Gleichheit (eguaglianza) öfters in mehrere Gleichungen (equazioni) zerfällt, so wie z. B. aus $a+bi=a'+b'i$ (wobei bekanntlich $i=\sqrt{-1}$) sich die Gleichungen $a=a'$, $b=b'$ ergeben; oder die für jedes x geltende Gleichheit

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots.+A_{m-1}x+A_m=0$$

zu den Gleichungen

$$A_0=0,\quad A_1=0,\quad A_2=0,\ldots.\ A_{m-1}=0,\quad A_m=0$$

führt u. s. w., bewiesen worden sind, und eine genauere Theorie der imaginären Grössen mit besonderer Berücksichtigung der Form

$$r(\cos t+i\sin t)$$

und der die Moduli betreffenden Sätze, entwickelt worden ist. Die binomischen oder reinen Gleichungen und die Wurzeln aus der Einheit; die allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen, natürlich das allgemeine Fundamental-Theorem der Theorie der Gleichungen, dass nämlich jede Gleichung mindestens eine Wurzel von der Form $p+qi$ hat; die Elimination in grosser Ausdehnung; die Transformation der Gleichungen; die Auflösung der numerischen Gleichungen u. s. w. haben die sorgfältigste Berücksichtigung gefunden, und die Darstellung entspricht den neueren Forderungen wahrer mathematischer Strenge und Evidenz sehr wohl. — Kap. XIII. und Kap. XIV. betreffen die Formen und die Functionen im Allgemeinen und den Algorithmus mit denselben, also Vieles von dem, was jetzt in der neueren Mathematik eine besondere Rolle spielt und eine besondere Bedeutung gewonnen hat. — Kap. XV. und Kap. XVI. sind vorzugsweise der Theorie der Reihen und ihrer Convergenz,

der **Entwickelung der Functionen in Reihen** (natürlich ohne Hülfe der Differentialrechnung), **den Producten mit unendlich vielen Factoren und der Darstellung gewisser Functionen** (wie $\sin x$, $\cos x$, u. s. w.) **durch solche Producte, den conturirlichen Brüchen und vielen anderen verwandten Untersuchungen** gewidmet. — Wenn auch von dem Herrn Verfasser selbst die Eintheilung seines Werkes in diese drei Hauptabtheilungen nicht streng festgehalten worden ist, so haben wir hier doch dieselbe hervorheben müssen, um bei der uns gebotenen Kürze mit möglichster Deutlichkeit den Hauptinhalt und die Tendenz des Werkes unseren Lesern zur Anschauung zu bringen. Noch näher auf den Inhalt einzugehen, verstattet uns der beschränkte Raum nicht; wir können aber versichern, dass dieses Werk einen reichen Schatz höherer algebraischer Lehren in einer, rücksichtlich der Strenge und Eleganz, den neueren Anforderungen entsprechenden Darstellung enthält, so dass dasselbe als die neuere höhere Algebra, so weit dieselbe namentlich in den Kreis des höheren mathematischen Unterrichts gehört, repräsentirend betrachtet werden kann. Da die deutsche mathematische Literatur ein ähnliches Werk unsers Wissens noch nicht besitzt, so müssen wir dasselbe wiederholt zur Beachtung dringend empfehlen, und würden selbst seine Verpflanzung auf deutschen Boden durch eine Uebersetzung nicht unzweckmässig finden, vielmehr für eine Ergänzung unserer Literatur halten.

Ueber **Gronau's** verdienstliche Arbeiten über hyperbolische Functionen und dessen in den **Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Sechsten Bandes viertes Heft. Danzig.** 1862. 4⁰. erschienene Tafeln ist schon im **Archiv. Thl.** XXXVIII. S. 48. ausführlich berichtet worden. Wir freuen uns aber, unseren Lesern anzeigen zu können, dass diese Tafeln so eben sehr erweitert und vervollkommnet, zugleich in sehr bequemem Format, auf schönem Papier schön gedruckt, erschienen sind, unter folgendem Titel:

Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyclischen und hyperbolischen Sektoren. Von J. F. W. **Gronau, Professor und Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig. Danzig. Druck** von A. W. **Kafemann.** 1863. **gross** 8⁰.

Dieselben bilden auch das **Erste Heft des ersten Bandes der Neuen Folge der Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig,** welche sich durch Publication

dieser neuen Tafeln wieder ein nicht genug anzuerkennendes Verdienst erworben hat, da ohne solche Beihülfe Arbeiten dieser Art oft ungedruckt bleiben müssen. Indem wir die Leser auf diese neuen, sehr zweckmässig eingerichteten Gronau'schen Tafeln aufmerksam machen, müssen wir uns für jetzt mit der Verweisung auf unsere frühere, vorher erwähnte ausführliche Abhandlung begnügen, hoffen aber später auf diese verdienstlichen Gronau-schen Tafeln zurückzukommen, wenn wir durch eigenen Gebrauch uns genau mit denselben werden bekannt gemacht haben. G.

Die nachfolgende, zum Abdruck uns gütigst zugesandte Anzeige in Italien erschienener Tafeln der cyclischen und hyperbolischen Functionen theilen wir, der Wichtigkeit solcher Tafeln wegen, und weil dieselben auch einen Beweis für die grosse literarische Regsamkeit in Italien liefern, gern unseren Lesern mit, auf dieselben besonders hinweisend, und hoffen, wenn die Tafeln selbst zu unserer Kenntniss gelangen werden, auf sie zurückzukommen:

Trigonometrie.

Schreiben des Herrn Prouhet in Paris an den Herausgeber.

Monsieur le Rédacteur!

Je viens de lire dans votre précieux journal *) une note de M. Kambly, où ce savant professeur démontre la fausseté de trois formules que j'avais proposées comme exercice aux lecteurs des Nouvelles annales. Je n'aurais rien à dire de cet article, beaucoup trop long pour un si mince objèt, si l'auteur ne s'était gravement mépris sur la source de mon erreur. Il suppose que l'accord de mes formules avec les formules correspondantes du triangle sphérique a été pour moi un motif suffisant de les regarder comme vraies et m'en a fait désirer d'en posséder la démonstration. C'est là une assertion tout gratuite et à la quelle je donne le démenti le plus formel.

Cependant cette conjecture plait tellement à M. Kambly qu'il ne peut y renoncer même après avoir vu l'erratum où je m'accuse humblement d'avoir commis une faute de signe. M. Kambly ne veut pas me croire sur parole, parcequ'il ne peut deviner où était cette faute („Was das für ein Fehler sein soll, kann ich nicht ergründen"), mais, ajoute-t-il, il est vraisemblable, que les choses se sont passées comme je l'ai conjecturé dans mon article. Je regrette de ne pouvoir montrer à M. Kambly mon calcul et cette fameuse faute de signe dont il révoque l'existence en doute: malheureusement comme je ne pouvais prévoir qu'une faute de signe pourrait m'être un jour de quelque utilité, j'ai détruit mon calcul depuis long-temps. J'ai cherché vainement à en reprendre le fil. Tout ce que je puis dire c'est que ce calcul était fort long et les transformations assez nombreuses pour qu'une faute de signe s'y soit glissée facilement.

Je vous prie, Monsieur le rédacteur, de vouloir bien insérer ma lettre dans un des prochains numéros de votre estimable publication. Je demande pardon à vos lecteurs de les entretenir d'un sujèt aussi peu instructif; mais ma réputation d'honnête homme y est intéressée. Je n'ai jamais trompé personne et si j'affirme que j'ai commis une faute de signe, on peut m'en croire sur parole.

---

*) Thl. XL. S. 440.

Veuillez agréer, Monsieur le rédacteur, l'assurance de mes sentiments dévoués et respectueux.

E. Prouhet.

Paris le 28 Octobre 1863.

Sehr gern habe ich dem Wunsche des von mir hochgeachteten jetzigen Herausgebers der „Nouvelles Annales de Mathématiques", des Herrn E. Prouhet in Paris, durch sofortigen Abdruck des vorstehenden, gütigst an mich gerichteten Briefes entsprochen, durch welchen die grosse Achtung, die ich dem durch ausgezeichnete Arbeiten schon so vielfach verdienten Herrn Prouhet längst gezollt habe, nur erhöhet werden konnte; denn in Fehler kann Jeder verfallen, und kaum darf sich wohl Jemand rühmen, dass ihm dies niemals begegnet sei. Indem ich mich nur noch für verpflichtet halte, die beiden folgenden, in derselben Angelegenheit schon früher vom Herrn Professor und Director Dr. Strehlke in Danzig gütigst an mich gerichteten Briefe hier abdrucken zu lassen, bemerke ich, dass ich diese Sache jetzt durch den obigen, auf eine in jeder Beziehung höchst achtbare Weise gütigst an mich gerichteten Brief des Herrn Prouhet, als ihren besten und vollkommensten Abschluss erhalten habend betrachte, so dass von derselben fernerhin im Archive keine Rede mehr sein wird und darf.

Danzig den 23. October 1863.

Hochgeehrter Herr Professor!

Es ist mir unbegreiflich, wie die unrichtigen Formeln für das in einen Kreis beschriebene sphärische Viereck (S. 441. des vierten Heftes Thl. 40. Ihres Archivs) sich einschleichen konnten, da die richtigen Lexell'schen durch Ihr Wörterbuch Thl. 5. S. 878. und S. 879. seit längerer Zeit verbreitet sind. Dort ist von Ihnen nachgewiesen, dass

$$\tang\tfrac{1}{4}F=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{s-a}{2}\right).\sin\left(\frac{s-b}{2}\right).\sin\left(\frac{s-c}{2}\right).\sin\left(\frac{s-d}{2}\right)}{\cos\frac{s}{2}\cdot\cos\left(\frac{s'-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{s'-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{s'-c}{2}\right)}},$$

$$a+b+c+d=2s$$

$$s-d=s'.$$

Auf S. 878. stehen die richtigen Formeln für $\sin\frac{1}{2}A$ und $\cos\frac{1}{2}A$.

Ihr ergebenster F. Strehlke.

Danzig den 27. October 1863.

Hochgeehrter Herr Professor!

In Bezug auf mein letztes Schreiben bemerke ich, dass Prouhet's Irrthum im Vorzeichen vielleicht in folgender Weise stattgefunden hat. In meinem Aufsatze über die Fläche des sphärischen Vierecks (Archiv Thl. 35. S. 111.) ist nachgewiesen, dass die Fläche des sphärischen Kreisvierecks folgende Relation bietet:

$$\cos\tfrac{1}{2}F=\frac{\frac{1}{4}(\cos a+\cos b+\cos c+\cos d)}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}}-\operatorname{tg}\frac{a}{2}.\operatorname{tg}\frac{b}{2}.\operatorname{tg}\frac{c}{2}.\operatorname{tg}\frac{d}{2};$$

Setzt man:

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos d=K,$$

$$\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}=M,$$

$$\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}.\sin\frac{c}{2}.\sin\frac{d}{2}=N;$$

so erhält man aus $\cos\frac{1}{2}F=\frac{K-4N}{4M}$:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}F^2=\frac{4M+4N-K}{4M-4N+K}.$$

Aus der unrichtigen Formel für die tg. der Fläche des sphärischen Kreisvierecks, das wir mit F' bezeichnen wollen, ergiebt sich:

$$\cos\tfrac{1}{2}F'=\frac{K}{4M+4N},$$

woraus

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}F'^2=\frac{4M+4N-K}{4M+4N+K}.$$

Man sieht also, dass nur das unrichtige positive Zeichen von $4N$ im Nenner statt des negativen die Formel unrichtig gemacht hat.

Ihr ergebenster F. Strehlke.

Das in dem ersten der beiden vorstehenden Briefe gütigst Erwähnte hat allerdings seine völlige Richtigkeit; dass ich bei Gelegenheit des Kambly'schen Aufsatzes nicht auf meine eigene frühere Arbeit verwies, geschah deshalb, weil Herr Professor Kambly dies nicht gethan hatte, und ich in solchen Fällen weniger gern auf Eigenes hinweise, sondern die Sache lieber ihren

ruhigen weiteren Verlauf nehmen lasse, der meistens am besten zu einem gedeihlichen Ende führt, wie dies ja auch nun bei dieser Angelegenheit der Fall gewesen ist. Daher nur noch Herrn Professor Strehlke meinen besten Dank!

Greifswald, den 14. November 1863. Grunert.

Tetraedrometrie.

Tetraedrometrie, von Dr. Gustav Junghann. Zweiter Theil. Die Eckenfunctionen in Verbindung mit Längen-, Flächen- und Körpergrössen. Mit 2 lithographirten Tafeln. Gotha. E. F. Thienemann. 1863. VII. und 189 S. 8°.

Dem ersten Theile dieser vorzüglichen Arbeit, von der ich im XXXIX. Bande des Archivs eine kurze Anzeige gegeben habe, ist nun der zweite Theil binnen Jahresfrist gefolgt. Während jener die Aufgabe hatte, die Eckenfunctionen in die Rechnung einzuführen, deren Grundeigenschaften und die Beziehungen aufzufinden, welche zwischen den verschiedenen Eckenfunctionen Statt finden, werden in diesem Theile die vielfachen Verbindungen nachgewiesen, in welche sie mit Längen- Flächen- und Körpergrössen gebracht werden können, und die verschiedensten Anwendungen auf die Auflösung von Aufgaben gemacht, denen solche Grössen zu Grunde liegen. Auf diese Weise wird nicht bloss eine noch deutlichere, ich möchte sagen, anschaulichere Einsicht in das Wesen der Eckenfunctionen erhalten, sondern man wird häufig durch die überraschende Einfachheit der Entwickelung und die Durchsichtigkeit der Resultate, die auf anderem Wege nur ein unübersehbares Conglomerat von Formeln darbieten, vollständig überzeugt, dass die Einführung der Eckenfunctionen als selbständigen Rechnungselementes in die gesammte Geometrie dreier Dimensionen ein wesentliches Erforderniss der geometrischen Rechnung gewesen ist, und einen Fortschritt bedingt, den man ganz dem Verfasser zu verdanken hat. Da es an dieser Stelle unmöglich sein dürfte, ohne zu tiefes Eingehen in die Bezeichnungsweise einen auch nur angenäherten Begriff von dem Reichthume der Resultate zu geben, so will ich nur zwei Sätze hervorheben, um nachzuweisen, was ich unter der erwähnten Anschaulichkeit verstehe. Erinnert man sich, dass a, b, c die Seiten, α, β, γ die Winkel eines sphärischen Dreiecks, oder der ihm am Kugelcentrum entsprechenden

Ecke bezeichnen, die Grössen

$$\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha = 2\Pi \quad \text{und} \quad \sin b\sin c\sin a = 2P$$

gesetzt, und resp. Ecken- oder Π-sinus, und polarer Ecken- oder P-sinus genannt worden sind, wobei also $2P$ der Exponent des Verhältnisses einer von dem Eckenraume gleichschenklig abgeschlossenen Pyramide zu der rechtwinkligen gleichschenkligen Pyramide von gleicher Seite, und 2Π dasselbe für die Polarecke bedeutet, so finden sich bereits im ersten Theile p. 44. die beiden höchst eleganten Sätze:

Von vier Strahlen im Raume einen als Bezugsstrahl genommen, ist die algebraische Summe der Producte aus dem P-sinus der Ecke je dreier und dem Cosinus des Winkels, den der Gegenstrahl mit dem Bezugsstrahle macht, Null. In dieser algebraischen Summe haben die P-sinus je zweier gegenliegenden Ecken gleiche, die P-sinus je zweier gleichliegenden Ecken entgegengesetzte Vorzeichen.

Von vier Ebenen, eine als Bezugsebene genommen, ist die algebraische Summe der Producte aus dem Π-sinus der Ecke je dreier und dem Cosinus des Winkels, den die Gegenebene mit der Bezugsebene macht, Null. Es werden dabei diejenigen Ecken und Winkel der Ebenen verstanden, die von einem Punkte bestrahlt werden. In dieser algebraischen Summe haben die Π-sinus je zweier gegenwendigen Ecken gleiche, die Π-sinus je zweier gleichwendigen Ecken entgegengesetzte Vorzeichen.

Und p. 89. und p. 91. des ersten Theils sind zwei ganz ähnliche Sätze hinsichtlich eines Systems von fünf Strahlen und eines Systems von fünf Ebenen aufgestellt, welche auch die beiden angeführten mit umfassen. Diesen Sätzen wird Niemand eine grosse Eleganz absprechen. Aber in viel anschaulicherer Weise tritt uns die Eckenfunction gleich zu Anfang des zweiten Theiles (p. 1.) in dem Satze entgegen: „Am Parallelepipedon verhalten sich eine Diagonale und die drei mit ihm in einem Punkte zusammenstossenden Kanten zu einander, wie die P-sinus der durch die je drei anderen bestimmten Ecken.“ Durch diesen Satz wird es z. B. möglich, die Aufgabe von der Transformation der Coordinaten im Raume, welche auf trigonometrischem Wege bekanntlich nur nach ziemlich weitschweifigen Formeln ausführbar ist, auf die einfachste Weise zu lösen, und man ist sehr erfreut, in den Coëfficienten der ursprünglichen Coordinaten nichts Anderes als Verhältnisse von Eckenfunctionen zu erkennen.

Da es nicht thunlich ist, von allen Untersuchungen dieses zweiten Theiles hier eine Uebersicht zu geben, so will ich nur auf Einzelnes besonders aufmerksam machen. Das 12. und das 13. Capitel (der Verfasser zählt, des bequemen Citirens halber, Capitel und Paragraphen vom ersten Theile weiter) beschäftigen sich in sehr anziehender Weise mit den „Moduln des Tetraeders.“ So wie man nämlich die Verhältnisse $\frac{a}{\sin\alpha}$ und $\frac{\sin a}{\sin\alpha}$ resp. für das ebene und sphärische Dreieck, Verhältnisse also, die für ein und dasselbe Dreieck constant sind, wenn man diese beiden Bestimmungsstücke durch zwei andere derselben Art ersetzt, die zu einander dieselbe Beziehung haben, „Moduln“ jener Dreiecke genannt hat, so nennt der Verfasser „Modulus des Tetraeders“ jede Combination von Bestimmungsstücken desselben, welche ihren Werth nicht ändert, wenn sämmtliche Bestimmungsstücke durch andere ihnen gleichartige, zu einander in derselben Beziehung stehende ersetzt werden. Dass sich am Tetraeder zahlreiche Combinationen von zwei bis fünf Bestimmungsstücken finden, welche in Beziehung auf das Tetraeder ähnliche Eigenschaften haben, wie die Moduln des Dreiecks, lässt sich erwarten. Aus den gegenseitigen Beziehungen und den Eigenschaften der Moduln ergeben sich aber Sätze, welche nicht bloss an sich anziehend sind, sondern auch die Grundeigenschaften der Eckenfunctionen selbst klar darlegen, als worauf der Verfasser mit Recht grösseres Gewicht legt, als auf jene einzelnen Sätze. Beispielshalber will ich folgenden Satz (p. 61.) anführen: „Im Tetraeder verhalten sich die vom Schwerpuncte nach den Eckpuncten gezogenen Linien wie die P-sinus der durch die je drei andern bestimmten Ecken“, woraus dann wieder der Satz folgt: „Vier Kräfte, am Schwerpuncte eines Tetraeders in der Richtung der nach den Eckpuncten gezogenen Linien wirkend, sind im Gleichgewicht, wenn sie den vier Linien proportional sind.“

Zuletzt muss ich noch der Untersuchungen des 14ten Capitels erwähnen. Bekanntlich hat Carnot in seinem „Mémoire sur la relation, qui existe entre les distances respectives de cinq points pris arbitrairement dans l'espace. Paris 1806“ die Aufgabe aufgestellt, durch sechs gegebene Bestimmungsstücke eines Tetraeders jedes geforderte siebente auszudrücken. Er hat darin eine Reihe tetraedrischer Aufgaben ohne Tetraedrometrie gelöst, d. h. er hat Winkelfunctionen, aber nicht Eckenfunctionen benutzt. Hierdurch haben seine Auflösungen zuweilen eine fast unübersehbare Weitläufigkeit erhalten, eine so grosse, dass er selbst es häufig hat aufgeben müssen, die Re-

sultate wirklich darzustellen. Der Verfasser hat nun dieselben Aufgaben, und noch mehrere hierher gehörige dazu, auf seinem tetraedrometrischen Wege gelöst. Vergleicht man nun seine Resultate mit den von Carnot gegebenen, so ist man nicht bloss überrascht, da Einfachheit und Uebersichtlichkeit zu finden, wo man dort durch eine Ueberfülle mathematischer Ausdrücke erdrückt wurde, sondern man wird von Neuem und vollständig überzeugt, dass die hier eingeschlagene Methode die sachgemässe und einzig zulässige ist, da sie die geometrische Bedeutung der gewonnenen Resultate kennen lehrt. Die Carnot'sche Auflösung der XXVI. Aufgabe, z. B.: „Wenn von 10 Linien, die 5 im Raume gegebene Puncte verbinden, 9 gegeben sind, die 10te zu finden", ist in einer Gleichung von 130 Gliedern enthalten. Welcher Herkules kann diese moles bewältigen? Herr Dr. Junghann dagegen hat aus seiner Auflösung das Resultat gezogen: „Für fünf beliebige Puncte im Raume und die dadurch bestimmten fünf Tetraeder ist die doppelte Quadratsumme der Producte aus jedem der fünf Tetraeder und dem Radius seiner umschriebenen Kugel gleich der Summe der Producte aus jedem Tetraeder und der Summe der Producte aus jeder seiner Centralpyramiden und dem Quadrate derjenigen Kante, welche mit derselben keinen Punct gemein hat."

Noch ein Wort! Ich hätte vielleicht billig Anstand nehmen sollen, auch diesen zweiten Theil des Werkes meines Freundes anzuzeigen, da er in der Vorrede dem Danke, den er seinem alten ehemaligen Lehrer schuldig zu sein glaubt, einen so herzlichen und mich allerdings hoch erfreuenden Ausdruck gegeben hat. Wer mich nicht kennt, könnte meinen, ich habe unwillkürlich des Guten und Rühmlichen zu viel von dieser Arbeit gesagt. Aber es giebt ein sehr einfaches Mittel, sich vom Gegentheil zu überzeugen. Man nehme das Buch zur Hand und studire es, und man wird hoffentlich finden, dass mein Urtheil gerecht, ja mein Lob fast zu reservirt gewesen sei *).

Bremen. H. F. Scherk.

---

*) Ich habe den von mir hochgeachteten Herrn Professor Scherk besonders auffordern lassen, sich auch der Anzeige des zweiten Theils der „Tetraedrometrie" gefälligst zu unterziehen, und kann und muss demselben hier nur meinen aufrichtigsten Dank aussprechen, dass er meiner Bitte in freundlichster Weise nachgekommen ist; wenn die Kritik stets und in allen Zeitschriften in die Hände solcher Männer gelegt wäre, so würde sie oft besser berathen sein. Grunert.

Astronomie.

Die Principien der astronomischen Instrumentenkunde von Dr. Philipp Carl, Privatdocenten der Universität München. Mit 15 lithographirten Tafeln Abbildungen. Leipzig. Voigt & Günther. 1863. 8°.

Der Herr Verfasser hat sich in diesem recht sehr zur Beachtung zu empfehlenden Werke die dankenswerthe Aufgabe gestellt, nicht einzelne Instrumente zu beschreiben, wie dies schon in vielen verdienstlichen Schriften geschehen ist, sondern vielmehr die Principien zusammenzustellen, welche sich auf die Construction der astronomischen Instrumente im Allgemeinen und namentlich auf die der einzelnen Theile derselben beziehen. Wir haben diese Aufgabe vorher eine dankenswerthe genannt, und wiederholen dies nochmals, indem wir, was die Ausführung betrifft, derselben nur unseren Beifall zollen können, mit bereitwilliger Anerkennung der mannigfachen Belehrung, welche wir aus dem Werke geschöpft, und des Interesses, mit welchem wir dasselbe gelesen, wobei wir auch seiner sehr schönen äusseren Ausstattung, die bei einem solchen Werke nicht ohne Bedeutung ist, unsere besondere Anerkennung auszusprechen nicht unterlassen können. Sehr gute Sachkenntniss, wie sie namentlich an einem Orte wie München erworben werden konnte, leuchtet überall hervor, und Herrn Professor Lamont gebührt besonderer Dank für die grosse Liberalität, mit welcher er dem Herrn Verfasser sechs Jahre lang den Zutritt zu den Instrumenten der Münchener Sternwarte gestattete und demselben überall mit seinem Rathe und seiner langjährigen Erfahrung zur Seite stand; die Darstellung ist kurz, aber deutlich, und lässt wesentliche Punkte wohl kaum irgendwo unerörtert. Der Hauptinhalt ist folgender: Einleitung. — Erster Abschnitt. Von der Axenbewegung. — Zweiter Abschnitt. Von den Kreisen. — Dritter Abschnitt. Das Fernrohr. — Vierter Abschnitt. Hülfsmittel zur genauen Einstellung des Fernrohrs. — Fünfter Abschnitt. Von der Balancirung einzelner Theile der astronomischen Instrumente zum Behufe der Aufhebung nachtheiliger Wirkungen der Schwere. — Sechster Abschnitt. Von den Libellen. — Siebenter Abschnitt. Von den Mikrometern, welche zur relativen Ortsbestimmung dienen. — Achter Abschnitt. Von den Collimatoren und dem künstlichen Horizonte. — Neunter Abschnitt. Die ganzen Instrumente. — Anhänge. Bemerkungen über die bei den astronomischen Instrumenten vorkommenden Schrauben. Verzeich-

niss der bedeutendsten Verfertiger astronomischer Instrumente. Literatur der Mikrometer nach alphabetischer Reihenfolge der Autoren. — Man sieht aus dieser Inhaltsangabe, wie der Herr Verfasser, seinem Zwecke getreu, sein Augenmerk überall auf das Allgemeine zu richten bemühet war, und, den Werth des Werkes und seine Brauchbarkeit für manchen weniger Kundigen erhöhende, literarische Notizen sind in reichlichem Maasse beigegeben. Die Angabe einer nicht geringen Anzahl praktischer Methoden und Handgriffe machen, ausser seinem Inhalte im Allgemeinen, auch für jeden Verfertiger astronomischer, geodätischer, sowie mathematischer Instrumente überhaupt, das Werk noch besonders interessant und wichtig, welches wir daher nochmals zur allgemeinsten Beachtung recht sehr empfehlen.

Astronomische Preisaufgabe

der k. Akademie der Wissenschaften in Wien.

(Ausgeschrieben am 30. Mai 1863.)

Die sogenannte Eigenbewegung der Fixsterne ist bisher, so schöne Arbeiten wir auch auf diesem Gebiete besitzen, immer nur sporadisch und in Verfolgung specieller Zwecke behandelt worden; wir sind noch weit entfernt von demjenigen Zustande dieses Theiles der praktischen Astronomie, der es auch nur erlauben würde, in der Mehrzahl der vielen Fälle, wo wir eine genaue Fixsternposition aus älteren Beobachtungen abzuleiten nöthig haben, dieselbe mit Sicherheit herzustellen. Da nun andererseits an den Katalogen von Bradley, Piazzi, Argelander, Taylor, Rümker, Santini, Johnson u. a. werthvolle und sehr umfangreiche Materialien für solche Untersuchungen vorliegen, so hat die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften beschlossen, einen Preis von 200 Stück k. k. österreichischen Münz-Ducaten für die Lösung folgender Preisfrage auszuschreiben:

> „Es ist ein möglichst vollständiges Verzeichniss von thunlichst genau bestimmten Eigenbewegungen der Fixsterne in einer für praktische Zwecke angemessenen Anordnung zu verfassen.“

Der Einsendungstermin für die bezüglichen Bewerbungsschriften ist der 31. December 1865. Die Zuerkennung des Preises findet in der feierlichen Sitzung am 30. Mai 1866 statt.

Physik.

Lehrbuch der Physik zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbstunterrichte von Dr. W. Eisenlohr, Grossherzogl. Bad. Geheimerathe und Professor der Physik an der polytechnischen Schule in Carlsruhe u. s. w. Neunte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 709 Holzschnitten. Stuttgart. J. Engelhorn. 1863. 8.

Noch sind nicht ganz drei Jahre verflossen, dass wir das Vergnügen hatten, die achte Auflage dieses ausgezeichneten und weit verbreiteten Lehrbuchs der Physik im Literar. Ber. Nr. CXXXVI. S. 8. anzuzeigen, und es ist dieses so baldige Erscheinen der vorliegenden neunten, wieder vielfach verbesserten und vermehrten Auflage der beste und deutlichste Beweis, dass sich das treffliche Buch nicht bloss in der Gunst des Publikums zu erhalten, sondern dieselbe sich in immer höherem Grade zu erwerben verstanden hat. Was wir a. a. O. zur allgemeineren Charakterisirung des Werkes gesagt haben, gilt von der vorliegenden neunten Auflage natürlich ganz in derselben Weise und braucht hier nicht wiederholt zu werden, wenn wir uns auch nicht versagen können, nochmals hervorzuheben, dass in diesem Buche, — und namentlich auch in dieser neuesten Auflage, — die elementare Mathematik überall, wo es nöthig war, eine sehr zweckentsprechende Anwendung zur Begründung der betreffenden physikalischen Lehren gefunden hat, ohne jedoch in sehr verständiger und umsichtiger Weise die in einem Werke von dieser Tendenz nothwendig zu steckende engere Gränze zu überschreiten. Dass ausserdem das experimentelle Element überall die ausgedehnteste und umfassendste Berücksichtigung mit der ausgebreitetsten, — in dieser Ausdehnung seltenen — Sachkenntniss gefunden hat, bedarf bei einem Buche von solcher Verbreitung natürlich eigentlich gar nicht noch einer besonderen Bemerkung, indem wir jedoch gern hervorheben, dass auch die neue Verlagshandlung durch sehr gute und deutliche Holzschnitte sehr zur wesentlichen Förderung dieser Seite des Werkes beizutragen sich bemühet hat, so wie auch der Druck allen billigen Anforderungen vollständig entspricht.

Wie sehr der Herr Verfasser bemüht gewesen ist, rücksichtlich der Vollständigkeit seines Werkes allen Ansprüchen zu genügen, und den neuesten Fortschritten der Physik nach allen möglichen Seiten und Richtungen hin zu folgen, geht schon daraus sehr in die Augen fallend hervor, dass in der achten Auflage die Zahl der Holzschnitte 665 betrug, in der neunten Auflage dagegen sich

bis zu 709 erhebt, so dass also diese Auflage 44 Holzschnitte mehr als die vorhergehende enthält; und in der That zeigt denn auch dem Kundigen schon ein flüchtiger Blick, dass dem Herrn Verfasser schwerlich irgend eine Thatsache von einiger Bedeutung entgangen sein dürfte, so dass wir nicht anstehen, unser Urtheil dahin auszusprechen, dass dieses Buch als in möglichster Kürze — für die Zwecke des physikalischen Unterrichts, — den Zustand der heutigen Physik repräsentirend betrachtet werden kann, und daher auch in dieser Beziehung jedenfalls die grösste Empfehlung, weiteste Verbreitung und sorgfältigste Beachtung verdient. Viele Einzelnheiten hier anzuführen, gestattet der uns zu Gebote stehende Raum nicht; nur beispielsweise wollen wir etwa auf den bei aller Kürze klaren und genügenden Abschnitt über die Spectral-Analyse (§. 247. ff.) mit deutlichen Abbildungen der nöthigen Apparate, aufmerksam machen, ohne dass wir hiermit irgendwie in Abrede stellen wollen, dass nicht fast auf jeder Seite die bessernde und ergänzende Hand des Herrn Verfassers deutlich erkennbar wäre. Mit einigen von innigster Ergebenheit und Dankbarkeit zeugenden Worten ist diese neunte Auflage dem hochherzigen Grossherzoge Friedrich von Baden, dem die Wissenschaften und das gesammte deutsche Vaterland schon so Vieles verdanken, gewidmet; möge dasselbe noch lange wie bisher fortfahren, gründliche physikalische Bildung immer mehr zu verbreiten. und dadurch dem Herrn Verfasser der reichste und schönste Lohn für die auf die Herausgabe dieser neuen Auflage wieder verwandte grosse Mühe und Arbeit zu Theil werden!

Una Salita al Monviso. Lettera di Quintino Sella a B. Gastaldi, Segretario della Scuola per gli Ingegneri. Torino. 1863. 12°.

Diese Relation über eine im August 1863 von Herrn Quintino Sella mit Anderen unternommene Besteigung des Monte Viso, von welchem an sich bekanntlich die Cottischen Alpen über den Monte Genevre bis zu dem im Hintergrunde des Thales von Maurienne liegenden Mont Cenis erstrecken, bietet in wissenschaftlicher Rücksicht mehrfaches Interesse dar, namentlich auch in Bezug auf barometrische Hypsometrie, und wird daher besonders in dieser Beziehung den Freunden physischer Geographie und solchen, die sich ähnlichen Unternehmungen widmen wollen, zur Beachtung hier von uns empfohlen. Den Reisenden standen drei Barometer nach Fortin's System, verfertigt von Fastré in Paris, zu Gebote, welche dem Conte di S. Robert, dem Herrn B. Gastaldi und Herrn Q. Sella gehörten;

ausserdem aber noch ein von Casella in London verfertigtes Aneroid-Barometer, worauf wir hier besonders hinweisen, und natürlich die erforderlichen Thermometer u. s. w., so dass also Alles, was einem solchen Unternehmen Erfolg verspricht, vorhanden war; alle Barometer waren mit dem Barometer der Turiner Sternwarte sorgfältig verglichen. Rücksichtlich des Näheren müssen wir unsere Leser auf das interessante Schriftchen, in dem auch auf frühere Besteigungen des genannten interessanten Berges Rücksicht genommen ist, selbst verweisen. Auf S. 53. giebt Herr Q. Sella als Resultat der Messungen die Höhe des Monviso über dem Meere 3857^m an. Nach anderen, theils trigonometrischen, theils barometrischen Bestimmungen hat man folgende Resultate:

Coraboeuf	3836^m
Stato maggiore	3840
Mathews	3861
Tuckett	3850
Mittel:	3847

Nimmt man die vorher angegebene neueste Bestimmung hinzu, so erhält man aus allen fünf Bestimmungen im Mittel 3849^m (S. 55). Rücksichtlich des Aneroid-Barometers bemerkt der Herr Verfasser auf S. 59. u. A.: „Solo noterò, che trovammo qui i larici ed i pini cembri aver comune origine ad una altezza, che da una osservazione coll' aneroide apparrebbe di circa 2390 metri invece dei 2374 metri trovati col barometro a mercurio nella fontana dei Gorghi.“ Möge das interessante Schriftchen die verdiente Beachtung finden.

Vermischte Schriften.

Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Anno accademico 1862—1863. Bologna 1863.

Der Bericht über die Arbeiten der genannten berühmten Akademie für 1861—1862 ist von uns im Literar. Ber. Nr. CLIV. S. 7. angezeigt worden; das Programm über die von der Akademie in der Sitzung vom 26. Februar 1863 (S. 73.) gestellte neue Preisaufgabe haben wir bereits im Literar. Ber. Nr. CLVIII. S. 13. ausführlich mitgetheilt, worauf wir daher verweisen. In der Sitzung vom 8. Januar 1863 zeigte der Sekretair den zu Ravenna in der Nacht des 28. December 1862 erfolgten Tod des vielfach verdien-

ten Cavaliere Pietro Callegari an, welcher 34 Jahre lang die Mathematik mit dem grössten Ruhme und seegensreichstem Erfolge gelehrt hat und aus dessen Schule viele ausgezeichnete mathematische Lehrer an den höheren italienischen Unterrichts-Anstalten hervorgegangen sind. Als bemerkenswerthe und bei uns in Deutschland wohl wenig bekannte Schriften desselben werden folgende namhaft gemacht:

In den Schriften der Akademie zu Bologna:

1. De nova solutione problematis Fermatii, nec non aliorum, quae ex iisdem formulis deducuntur. (Novi Commentarii. T. IV. p. 309.)

2. De usu subtractionis et divisionis extendendo ad nonnullas praesertim propositiones demonstrandas Tentamen. (T. VI. p. 513.)

3. Aliae nonnullae applicationes calculi symbolici, quo subtractionis et divisionis usum in doctrina numerorum et aequationum juvari et extendi posse demonstratur. (T. VII. p. 529.)

4. Ricerche spettanti alla correlazione delle Figure di Geometria. (Memorie. T. IV. p. 179.)

Ausserdem:

5. Saggio di Ricerche sulla Poligonometria Analitica. Imola 1839.

6. Equazioni generali ai luoghi geometrici, ed Applicazioni. (Atti dell' Accademia de 'Lincei.)

7. Sulla identità della trattoria colla evolvente della catenaria omogenea, e di questa curva con una curva discussa da Schubert. (N. Opuscoli Scientifici. Bologna 1824.)

Aus den wissenschaftlichen Arbeiten der Akademie heben wir als hierher gehörend die folgenden hervor:

Sessione ordinaria. 5. Febbraio 1863. Prof. Cav. Lorenzo Respighi legge: Sulle oscillazioni diurne del barometro. (p. 61.) — Sessione ordinaria. 12. Marzo 1863. Prof. Eugenio Beltrami legge: una Nota sulle coniche di nove punti, e su alcune quistioni che ne dipendono. (p. 82.) — Sessione ordinaria. 16. Aprile 1863. Prof. P. Domenico Chelini legge una Memoria che intitola: Teoria de' sistemi semplici di coordinate, e discussione dell' equazione generale di 2°. grado in coordinate triangolari o tetraedriche. (p. 89.) — Sessione ordinaria. 7. Maggio 1863. Prof. Cav. Luigi Cremona: Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. (p. 106.) — Sessione ordinaria. 21. Maggio 1863. Prof. Commend. Silvestro Gherardi: Sull' argomento del Magnetismo polare dei mattoni. (p. 107.)

Ueber die genannten Abhandlungen der Herren Chelini und Cremona referirt der nächste Literarische Bericht besonders.

Literarischer Bericht
CLXIII.

Wenn die Hinweisung auf die Jubelfeier des grossen

Galilei,

welche ich im Literar. Bericht Nr. CLX. S. 1. mir zu geben erlaubte, irgendwo Beachtung und Anklang gefunden haben sollte, und man mir darüber gütigst Mittheilungen machen wollte: so würde ich von denselben sehr gern mit besonderem Danke im Archive Notiz nehmen, selbst ausführlicheren betreffenden Aufsätzen gern einen Platz einräumen, und bitte daher um solche Mittheilungen recht sehr. In dem mir bereits gütigst zugesandten „Weimarischen Volks-Kalender auf das Schaltjahr 1864", wofür der Herausgeber des Kalenders besonderen Dank verdient, finde ich S. 3. Folgendes bemerkt:

> „Am 18. Februar sind es dreihundert Jahre, dass Galileo-Galilei, einer der grössten Physiker aller Zeiten, in Pisa geboren ward."

Auch habe ich mit besonderem Vergnügen in der Neuen preussischen Zeitung die Anzeige gefunden, dass der naturwissenschaftliche Verein in Berlin an des grossen, ewig unvergesslichen Mannes Jubeltage eine angemessene und würdige Feier veranstalten wird, was an recht vielen Orten der Fall sein möge.

Ich mache auf folgende Schrift aufmerksam:

Das Leben Galilei's. Gedenkblatt zum 300. Geburtstage desselben am 18. Februar 1864. Von Lina Morgenstern. Berlin. Plahn'sche Buchhandlung. 1864.

Greifswald, im Januar 1864. Der Herausgeber

Der Tod

Dr. Carl Ludwig Rümker's

ist im Literar. Ber. Nr. CLVII. S. 10. angezeigt worden. Ich lasse jetzt eine kurze Lebensschilderung des trefflichen, mir vielfach befreundeten Mannes folgen, die ich den Sitzungsberichten der K. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1863 I. Heft III. S. 344, deren Mitglied R. war, entlehne. In der in der angeführten Nummer des Literar. Ber. mitgetheilten, der schleunigen Mittheilung wegen nur vorläufig aus einer „Zeitung" entlehnten Notiz ist als Todestag der 21ste November 1862 angegeben, wogegen, wie man sehen wird, im Nachfolgenden der 21ste December 1862 als Todestag genannt wird. Dass Letzteres das Richtige sei, muss ich annehmen, weil damit auch die Mittheilung in den „Astronomischen Nachrichten" übereinstimmt, und bitte hiernach die Angabe in der angeführten Nummer des Literar. Ber. zu berichtigen. — „Carl Ludwig Rümker, Director der Sternwarte und Navigations-Schule zu Hamburg. Nur selten hat unsere Akademie Veranlassung, das Leben eines deutschen Seemannes zu feiern, denn selten erprobt sich deutsche Gelehrsamkeit und Forschungstrieb auf dem Weltmeere. Rümker ist am 28. Mai 1788 zu Neubrandenburg geboren, wo sein Vater, Mecklenburg-Strelitz'scher Hofrath, ein angesehener Staatsdiener war. Nach den Gymnasialstudien am grauen Kloster zu Berlin widmete er sich dem Baufache und machte die Prüfung als Preussischer Bauconducteur. Aus Preussen, welches ihm nach dem Tilsiter Frieden keine Aussichten darbot, gieng er nach Hamburg, dann nach England in den Seedienst. Zuerst Midshipman auf einem Schiffe der ostindischen Compagnie, dann im Dienste von Kauffarthei-Schiffen besuchte er fast alle Weltgegenden. 1812 trat er in die k. englische Marine ein; er machte als Offizier der Flotte im Mittelmeere und als Lehrer der Navigation am Bord des Admiral-Schiffes Albion unter Penrose den Schluss des französischen Krieges mit, er war unter Exmouth i. J. 1816 bei dem Bombardement von Algier. Die Bekanntschaft mit Baron v. Zach zu Genua leitete ihn auf literärische Arbeiten, zumal Beobachtungen von Sternbedeckungen und geographische Ortsbestimmungen im Mittel-Meere. Im J. 1817 nahm er den Abschied und wurde Director der Hamburger Seeschule; aber schon 1821 begleitete er General Sir Thomas Brisbane, den neuernannten Gouverneur von New-South-Wales, in diese ferne Colonie, wo er 9 Jahre lang die von seinem Freunde gegründete Sternwarte zu Paramata bei Sydney leitete. Dort beobachtete er die erste vorausberech

nete Wiederkehr des Enckeschen Kometen und constatirte dessen kurze Umlaufszeit; er bestimmte die dortige Länge des einfachen Secunden-Pendels und machte viele Beobachtungen am südlichen Fixsternhimmel. Diese sind theils im Kataloge von Brisbane, theils in dem von ihm selbst 1832 zu Hamburg herausgegebenen enthalten. 1830 war er nach Hamburg zurückgekehrt, das Directorium der Navigationsschule von Neuem zu übernehmen. Sein biederes Seemanns-Wesen, sein ebenso wohlwollender und geduldiger als energischer Charakter, die Klarheit seiner Unterrichtsmethode erwarb jener Anstalt seltenes Ansehen und eine in Deutschland noch nicht erlebte Blüthe. Sie hatte 1836 sechzig Schüler, 1857 zweihundert und fünfzig. Rümkers zuerst 1843 herausgegebenes Handbuch der Schiffahrtskunde hat bereits sechs *) starke Auflagen erlebt. Seine Sternbeobachtungen werden von den Astronomen wegen einer ausserordentlichen Genauigkeit gerühmt. Zahlreiche Beobachtnngen von Kometen und den kleinen Planeten stellte er zumal mit einem fünffüssigen parallaktisch montirten Refractor unseres Fraunhofers an; mit einem Repsoldischen Meridiankreise unternahm er eine sorgfältige Bestimmung aller schwächeren, im Fernrohre desselben noch sichtbaren Fixsterne. Der Rümkersche, 15,000 Sterne aufführende Katalog wurde 1854 mit der goldnen Medaille der Londoner astronomischen Gesellschaft ausgezeichnet. Airy nennt dieses, mit so einfachen Hilfsmitteln geschaffene Werk eines e i n z e l n e n Mannes, der in strengen Nachtwachen beobachtete, bei Tage in den vom Schuldienst freien Stunden rechnete, ein bewunderungswürdiges Muster. Die letzten 6 Jahre lebte Rümker wegen asthmatischer Beschwerden in dem milderen Klima von Lissabon, wo er am 21. Dec. 1862 bei ungeschwächter Geisteskraft das Zeitliche gesegnet hat. Die Offiziere der britischen Station im Tagus haben ihn als ehemaligen Kameraden und Inhaber der britischen Kriegsmedaille auf den Campo Santo der Estrella-Kirche getragen. Unser College ruht neben dem englischen Dichter Fielding, der dort i. J. 1754 gestorben ist."

Am 18ten November 1863 starb in B o n n

Dr. Aug. Beer,

ordentlicher Professor der Mathematik an der dortigen Universität, kaum 38 Jahre alt, dem auch das Archiv einige werthvolle Beiträge verdankt.

*) Die sechste Auflage 1867.

Geometrie.

Ueber einige geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von Dr. am Ende. Langensalza 1863. (Programm der Vorbereitungsschule zu Langensalza von Ostern 1863.) 4°.

Der Unterzeichnete hat in der Abhandlung:

Ueber die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander. Thl. XXXVI. (1861.) Nr. XVIII. S. 325.

gezeigt, zu welchen eleganten Resultaten man bei verschiedenen Untersuchungen über das ebene Dreieck durch die Einführung der drei Winkel des Dreiecks und des Halbmessers des umschriebenen Kreises gelangt; und dasselbe ist neuerlichst in den beiden Abhandlungen:

Neue analytische Behandlung des Kreises der neun Punkte. Thl. XLI. Nr. IX. S. 121. und

Ueber den Kreis, in Bezug auf welchen die Spitzen eines gegebenen Dreiecks die Pole der diesen Spitzen gegenüberstehenden Seiten als Polaren sind. Thl. XLI. Nr. X. S. 132.

von ihm zu zeigen versucht worden.

Es hat ihm daher besondere Freude gemacht, dass in dem obigen zur Beachtung zu empfehlenden Programm: Ueber einige geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks, in welchem der Herr Verfasser gleich am Anfange sagt: „Um gleich am Eingange die Methode näher zu bezeichnen, nach welcher die folgenden Untersuchungen angestellt worden sind, bemerken wir, dass überall die analytische Methode zu Grunde gelegt wurde, und dass die allgemeinen hier zur Anwendung kommenden Ausdrücke durch die Winkel des Dreiecks und den Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises dargestellt wurden. Diese Einführung der Winkel und des Radius des umschriebenen Kreises empfiehlt sich im Allgemeinen dadurch, dass die auf diesem Wege gewonnenen Resultate — wir erinnern hierbei nur an die schönen symmetrischen Ausdrücke für die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks von einander — sich durch grosse Einfachheit und Uebersichtlichkeit auszeichnen" — dieselbe Methode bei einer anderen interessanten elementar-geometrischen Untersuchung über das ebene Dreieck mit Geschick in Anwendung gebracht worden ist, bei welcher es im Allgemeinen darauf ankam, die geometrischen Oerter der

merkwürdigen Punkte des Dreiecks zu bestimmen, wenn gewisse, auf Grösse und Gestalt, oder auf die Lage des Dreiecks sich beziehende Stücke als constant, andere als variabel betrachtet werden. Indem wir daher das obige Programm, aus welchem weitere Auszüge zu geben der Raum hier nicht gestattet, unseren Lesern nochmals zur Beachtung empfehlen, möchten wir uns zugleich erlauben, den geehrten Herrn Verfasser zu ersuchen, seinen analytischen Scharfsinn aus ähnlichen Gesichtspunkten, wie in den vorher namhaft gemachten Abhandlungen, auch dem sphärischen Dreieck, das ja auch merkwürdige Punkte darbietet, und der weiteren Untersuchung der dreiseitigen Pyramide (m. vergl. unsere Abhandlung: Einige merkwürdige Ausdrücke für die dreiseitige Pyramide. Thl. XXXVI. Nr. XIX. S. 356,) zuzuwenden.

Wenn auch auf Einzelnheiten einzugehen, uns der beschränkte Raum dieser literarischen Berichte selten gestattet, und wir die Prüfung der Resultate im Detail meistens den Lesern überlassen müssen: so wollen wir uns doch im vorliegenden Falle rücksichtlich der ersten Gleichung in §. 7. (S. 12.), nämlich der Gleichung:

$$x^2+y^2=4R^2\cos A^2,$$

die Bemerkung erlauben, dass bekanntlich

$$a=2R\sin A,\ 2R=\frac{a}{\sin A};$$

also

$$x^2+y^2=a^2\cot A^2,$$

und nun Alles durch die als constant angenommenen Grössen a, A ausgedrückt ist; wird aber, wie a. a. O.,

$$2R\cos A=a\cot A=E_a,$$

also nach dem Obigen

$$x^2+y^2=E_a^2$$

gesetzt, so ist E_a die doppelte constante Entfernung des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von der Seite a.

Der Herausgeber.

Die italienische mathematische Literatur bietet jetzt eine grosse Fülle wichtiger und interessanter Erscheinungen dar, jedenfalls eine Folge der grossen Förderung und Unterstützung, welche die Königliche italienische Regierung den mathematischen Wissenschaften zu Theil werden lässt, und der grossen

Aufmerksamkeit, welche sie denselben widmet, die namentlich auch auf allen Lehranstalten auf die Heranziehung und Heranbildung tüchtiger jüngerer Kräfte gerichtet ist. Bei der grossen Masse wichtiger Publicationen ist es daher für unsere in ihrem Raum beschränkten literarischen Berichte sehr schwierig, ein auch nur annähernd richtiges Bild von der grossen Regsamkeit zu liefern, welche in Italien auf diesem literarischen Felde gegenwärtig sich kund giebt, so sehr wir auch uns immer mehr und mehr bemühen werden, dies zu thun. Dass aber auch ältere längst bewährte und anerkannte Meister unablässig fortfahren, der jüngeren Generation voranzuschreiten: davon liefern wieder die beiden folgenden, kürzlich uns zugegangenen Schriften, die wir unseren Lesern zur sorgfältigsten Beachtung empfehlen, einen neuen sehr erfreulichen Beweis:

Sulla teoria de' sistemi semplici di coordinate e sulla discussione dell' equazion generale di secondo grado in coordinate triangolari e tetraedriche. Memoria del Prof. **Domenico Chelini.** (Estratta dal Vol. III. Ser. II. delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna Tipografia Gamberini e Parmeggiani. 1863. 4°.

Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota del Prof. **Luigi Cremona.** (Estratta dal tomo II. (serie 2ª) delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna). Bologna. Tipi Gamberini e Parmeggiani. 1863. 4°.

Wie sehr die Geometrie durch die Einführung neuer, sehr verschiedenartiger Coordinatensysteme in neuerer Zeit gefördert worden ist, weiss Jeder, der den Fortschritten dieser herrlichen Wissenschaft stets mit Aufmerksamkeit gefolgt ist; eben so bekannt ist es, zu wie vielen interessanten Resultaten die verschiedenen, oft sehr allgemeinen, neuerlich einer eingehenden Betrachtung unterworfenen Transformationen der Figuren geführt haben. Auf diesen beiden Gebieten der neueren Geometrie bewegen sich die beiden vorliegenden, der Beachtung unserer Leser sehr zu empfehlenden Schriften.

In der zuerst genannten Schrift beschäftigt sich Herr Chelini mit den verschiedenen neueren Coordinatensystemen, aber, was wir besonders hervorheben, aus allgemeineren Gesichtspunkten, als dies bisher geschehen sein dürfte, und unterscheidet in dieser Beziehung „sistemi semplici" und sistemi complessi" von einander, worüber natürlich das Weitere in der Schrift selbst nachgesehen werden muss. Den Hauptzweck seiner

ganzen Untersuchung aber bezeichnet er mit den folgenden Worten: L'oggetto precipuo di questo scritto si è di mettere in chiaro la natura de' sistemi semplici ed i rapporti che hanno col **Principio della Risultante**, cioè della retta, o del l'area, la cui proiezione sopra un asse qualsivoglia, o sopra un piano, è uguale alla somma delle proiezioni omologhe di più rette od aree date, chiamate componenti. Il principio della risultante, contenuto nella proprietà tutta geometrica espressa dalla sua medesima definizione ed in quelle che ne sono le conseguenze immediate, costituisce (secondo che a me pare) un vero metodo, e forse il metodo più semplice e diretto che possa darsi per dimostrare e scoprire le formole fondamentali sia della trigonometria piana e sferica, sia della geometria analitica finita ed infinitesimale." — Von dem Princip der Resultanten hatte Herr Chelini schon in dem „Appendice" zu seinen trefflichen „Elementi di Meccanica razionale" *) gehandelt, so wie überhaupt die vorliegenden Untersuchungen in vielfacher Beziehung zu der Mechanik, insbesondere der sogenannten Kinematik, stehen. — Je schwieriger es ist, auf so geringem Raume wie hier ein einigermassen anschauliches Bild von einer solchen Schrift, wie die vorliegende, zu entwerfen: desto mehr müssen wir unsere Leser wiederholt auf das sorgfältige Studium derselben selbst hinweisen.

In der Anzeige der trefflichen Schrift des Herrn Schiaparelli in Mailand (Literar. Ber. Nr. CLV. S. 5.): „Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica" ist von uns (S. 6.) gezeigt worden, was Herr Schiaparelli im Allgemeinen unter conischer Transformation versteht, worauf wir also des Verständnisses des Folgenden wegen hier uns zu verweisen erlauben. In der zweiten der beiden oben genannten Schriften sagt Herr Cremona nun in Bezug auf diese conische Transformation: „Ma egli è evidente che applicando ad una data figura più trasformazioni coniche successive, dalla composizione di queste nascerà una trasformazione che sarà ancora di primo ordine, benchè in essa alle rette della figura data corrisponderebbero nella trasformata, non già coniche, ma curve d'ordine più elevato." — „In questo breve scritte mi propongo di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato

---

*) Von denen hoffentlich bald die deutsche Uebersetzung, an welcher jetzt gearbeitet wird, erscheinen zu lassen möglich sein wird.

ordine qualsivoglia. Stabilisco dapprima due equazioni che devono aver luogo fra i numeri de' punti semplici e multipli comuni a tutte le curve che corrispondono a rette. Poi dimostro come, per mezzo di raggi appogiati a due linee direttrici, si possano projettare i punti di un piano sopra un secondo piano, e così trasformare una figura data in quello, in un' altra figura situata in questo."

Wir haben geglaubt, den Zweck und Inhalt der vorliegenden, zur Beachtung sehr zu empfehlenden Schrift nicht besser, als mit den vorhergehenden sehr deutlichen eigenen Worten des Herrn Verfassers bezeichnen zu können; es wird in derselben auch Bezug genommen auf des Herrn Verfassers treffliche „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane", von welcher die im Druck sich immer mehr und mehr ihrer Beendigung nahende deutsche Uebersetzung bald bei dem Verleger des Archiv's erscheinen wird. G.

Arithmetik.

Beilage zu den Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren von Professor J. F. W. Gronau. Danzig 1863.

Der Nutzen der cyklisch-trigonometrischen Tafeln ist bekannt und erstreckt sich nicht bloss auf die Trigonometrie. Zum Behuf der leichtern Auflösung des reducibeln Falls der kubischen Gleichungen habe ich in den Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig für das Jahr 1862 hyperbolisch-trigonometrische Tafeln herausgegeben, welche ausser den hyperbolischen Sektoren ($z = Area = Ar.$) nur noch deren Sinus ($Sin\, z$) und Cosinus ($Cos\, z$) enthalten durften. Auch sie können zu andern Zwecken gebraucht werden, namentlich zur leichtern Berechnung gewisser Integrale. Aber selbst wenn diese Tafeln auch noch die hyperbolischen Tangenten (Tg) in sich aufgenommen hätten, so würden sie zwar mehr leisten können als bisher, aber immer wären sie noch ebenso einseitig geblieben, wie die alten cyklischen Tafeln es sind. Sollte allen zeitgemässen Anforderungen entsprochen werden, so musste eine vollständige Verschmelzung beider Tafeln, der cyklischen und der hyperbolischen vollzogen werden, und das ist in den vorliegenden neuen Tafeln geschehen. In dieser naturgemässen Verschmelzung leisten sie mehr als die alten cyklischen

und meine früheren, vervollständigt gedachten hyperbolischen Tafeln zusammengenommen.

Zwar befinden sich schon in der Vorrede zu den neuen Tafeln einige Beispiele in Bezug auf elliptische Transcendenten, welche zeigen, wie man durch die Tafeln sehr leicht $\sin am$, $tg\, am$, $\Delta\, am$ berechnen kann. Doch scheint es zweckmässig, da die Herausgabe des nächsten Heftes der Gesellschaft, welches vielfältige theoretische und praktische Anwendungen der Tafeln enthalten wird, sich noch einige Monate verzögern dürfte, schon hier einige einfache Beispiele zu geben, welche den grossen Nutzen dieser Tafeln werden erkennen lassen.

Zuvor noch ein Paar Worte: So wie ich die cyklisch-trigonometrischen Functionen mit kleinen Anfangsbuchstaben $\sin \omega$, $\cos \omega$, $tg\, \omega \ldots arc = ar.$), die hyperbolischen mit grossen andeute, so bezeichne ich auch die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen mit *Log*, die briggischen, deren Modul $M = 0{,}43429$ ist, mit *log*. So wie ferner in den alten cyklischen Tafeln nicht die Kreissektoren ($ar. = \frac{R^2}{2}\omega$, wo R der Kreisradius ist), oder die ihre Grösse bestimmenden Zahlen oder Bogen (ω) angegeben sind, sondern Winkel von ω Sekunden (ω'', wobei $\omega = \omega'' \Pi$ und $\Pi = \frac{\pi}{180.60.60}$ ist), so enthalten auch meine Tafeln weder die hyperbolischen Sektoren selber $\left(Ar. = \frac{R^2}{2} z\right)$, noch die ihre Grösse bestimmenden Zahlen z, welche natürliche Logarithmen von entsprechenden Asymptotenverhältnissen sind, sondern die dazu gehörigen briggischen Logarithmen $z' = Mz$. Es wird hierbei der Factor $\frac{R^2}{2} = 1$ gesetzt, weil die sogenannte Potenz der Hyperbel als gemeinschaftliches Flächenmass für die hyperbolischen und cyklischen Aren anzusehen ist.

1. **Beispiel.** Es ist

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = Log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = Ar.\, Tg\, x,$$

oder

$$M \int \frac{dx}{1-x^2} = log. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = Ar.'\,(Tg = x),$$

wobei $Ar.' = M.Ar. = z'$ ist und wobei von der Constante abgesehen werden soll. Ist nun etwa $\log x = 9{,}84067$, so geht man mit diesem Argument auf Seite 74 meiner Tafeln in die mit $\log Tg\, z$ überschriebene Columne ein und findet dem entsprechend durch die mit z' bezeichnete Columne:

$$M\int\frac{dx}{1-x^2} \text{ oder } log.\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 0{,}37057 + 10 = 0{,}37067,$$

weil aus der Proportion $13:8=17:p$ sich $p=10$ ergiebt.

2. **Beispiel.** Es ist

$$\int -\frac{dx}{x^2-1} = Log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = Ar.Cotg.\,x.$$

Ist nun $log\,x = 0{,}57893$, so hat man

$$-M\int\frac{dx}{x^2-1} = log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = Ar'.(Cotg = x) = 0{,}11724 + 4$$
$$= 0{,}11728,$$

da (pag. 105) aus der Proportion $47:14 = 14:p$ sich $p=4$ ergiebt.

3. **Beispiel.**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Log\,(\sqrt{x^2+1}+x) = Ar.\,Sin\,x.$$

Für $log\,x = 0{,}57893$ erhält man

$$M.\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = log\,(\sqrt{x^2+1}+x) = Ar'.(Sin = x) = 0{,}88696 + 36$$
$$= 0{,}88732,$$

weil pag. 106 aus der Proportion $51:37 = 51-1:p$ folgt, dass $p=36$ ist.

4. **Beispiel.** Für $log\,x = 0{,}57893$ ist ferner nach pag. 105

$$M\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log(\sqrt{x^2-1}+x) = Ar'.(Cos = x) = 0{,}87187 + 34$$
$$= 0{,}87221, \text{ da } 47:33 = 44:34.$$

5. **Beispiel.** Aus

$$\int\frac{d\omega}{cos\,\omega} = Log\,tg(45^0+\frac{\omega}{2}) = z \text{ folgt für } \omega'' = 43^0 51'\ 36'' \text{ ohne Weiteres}$$

$$z = \frac{0{,}37067}{M}.$$

6. **Beispiel.** Ebenso ist

$$\int\frac{dz}{Cos\,z} = \int\frac{2.dz}{e^z+e^{-z}} = \omega. \text{ Also für}$$

$z' = 0{,}46404$ ist $\omega'' = 52^0\ 4'\ 54''$ und $\omega = 0{,}90897$.

7. **Beispiel.** Montucla giebt in seiner Histoire des Mathématiques, III, pag. 151, für die Länge eines parabolischen Bogens B, dessen Parameter $2p=1$ und dessen Abscisse $x=2$ ist, folgende Formel:

$$B = \int_0^x \frac{dx.\sqrt{2px+4x^2}}{2x} = \frac{x}{2}\sqrt{2p+4x} + \frac{p}{2} \, Log \, \frac{2x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2p+4x}}{\sqrt{2p}}$$
$$= 3 + 0{,}4406964 = 3{,}4406964$$

an. Indessen der erste Theil seines Integrals ist ersichtlich falsch und muss heissen: $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{2p+4x} = 2{,}12132$ statt 3, so dass also $B = 2{,}56202$ ist. Littrow in seiner Anleitung zur Mathematik pag. 349 giebt dafür folgende Formel:

$$B = \tfrac{1}{4}p\left[\frac{sin\,\varphi}{cos\varphi^2} - Log\,tg\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

wo φ aus $x = \frac{p}{2}\,tg\,\varphi^2$ zu berechnen ist und demzufolge $70^0\ 31'\ 44''$ beträgt. Auch sie giebt $B = 2{,}56202$.

Meine Formel lautet

$$B = \frac{t}{2} + \frac{p}{2}A,$$

wo t die Tangente des Parabelpunktes ist, dessen Coordinaten x und y sind, so dass also $t = \sqrt{y^2 + (2x)^2}$ ist, und wo $A = Ar.\,Cotg\,\frac{t}{2x}$ oder $Cotg\,A = \frac{t}{2x}$ is. FürMontucla's Zahlenbeispiel ist $t = \sqrt{18} = 4{,}24264$ und

$$log\frac{t}{2x} = 0{,}02557.6 = (1)2557.6 = log.\ Cotg\ A = log.\ Cotg\ z.$$

Dazu gehört nach pag. 50 meiner Tafeln $z' = Ar'. = 0.76528 + 27 = 0{,}76555$ (weil $4.5:3.3 = 37:27$ ist). Demnach ist $z = \frac{z'}{M} = A = 1.7628$ und wie vorhin $B = 2{,}12132 + 0.44070 = 2{,}56202$.

8. Beispiel. Gudermann in seiner Theorie der Potenzialfunctionen pag. 89 giebt für die u. a. bei der Brückenbaukunst wichtige Kettenlinie folgende einfache Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, wobei die Abscissenlinie um α ($=$ der kleinsten Spannung) von ihrem Scheitel absteht: $y = \alpha.\ Cos\,\frac{x}{\alpha}$. Setzt man nun $\alpha = 1{,}4406$, indem das Gewicht eines Theils der Kette, dessen Länge der Einheit gleich ist, auch gleich 1 angenommen wird, so geben meine Tafeln, wenn successive

$x = 0$	0,5	1	1,5	2	und endlich 2,5 ist,
$y = 1{,}4406$	1,5281	1,8018	2,2946	3,0668	4,2119,

was eine Breite des Flusses oder eine Spannung des Brückenbogens = 5 und die Höhe des Gewölbes oder seine Pfeilhöhe = 2,7713 voraussetzen würde, da 4,2119 — 1,4406 = 2,7713 ist.

9. Beispiel. Dr. Zetzsche giebt in Schlömilchs Zeitschrift V. pag. 169 für das Trägheitsmoment (T) einer Parabellinie, welche sich um die Parabelaxe dreht, mit Uebergehung gewisser Factoren μ und f, welche hier nicht in Betracht kommen, folgenden Ausdruck an:

$$T = p\int_0^z \sqrt{2pz+4z^2}.dz = p\left(\frac{p+4z}{4\sqrt{2}} - \frac{p^2}{16} Log\frac{p+4z+2\sqrt{2pz+4z^2}}{p}\right).$$

Der erste Theil der Klammer ist gewiss nur in Folge eines Druckfehlers falsch angegeben, er muss heissen:

$$\frac{p+4z}{4\sqrt{2}}.\sqrt{pz+2z^2} = \frac{p+4z}{8}\sqrt{2pz+4z^2}.$$

Ich finde dafür folgenden Ausdruck:

$$T = \frac{p^2 z}{4}.Cos\ A.\ Cotg\frac{A}{2} - \frac{p^3}{16}A, \text{ wo } Cos\ A = \frac{p+4z}{p} \text{ ist.}$$

Es sei nun der Halbparameter $p = 8,1479$ und die Grenz-Abscisse $z = 10,9783$. Dann ist

$log\frac{p+4z}{p} = log\ Cos\ A = 0,80546$	$log\frac{p^2 z}{4} = 2,26057$	$A = \frac{A'}{M}$
$A' = 1,10381$	$log\ Cos\ A = 0,80546$	$log\ A = 0,40512$
$\frac{A'}{2} = 0,55190$	$log\ Cotg\frac{A}{2} = 0,06854$	$log\frac{p^3}{16} = 1,52903$
	3,13457	1,93415
	Dazu 1363,2 = Num.	Dazu 85,931.

Also ist $T = 1363,2 - 85,931 = 1277,27$.

10. Beispiel. Man soll für eine hyperbolische Fläche (F) die Entfernung ihres Schwerpunktes (x') von ihrem Mittelpunkte O (dem Mittelpunkte der zugehörigen Ellipse mit den Halbaxen a und b) finden, wenn sich diese Fläche von ihrem Scheitel A bis zur Ordinate $BC = 2y$ erstreckt.

Aus $x'\ F = 2\int ydx.x$ und $F = 2\int ydx$ folgt

$$x' = \frac{\frac{2}{3}a.Sin\ A^3}{-A + \frac{1}{2}Sin 2A}, \text{ wo } Cos\ A = \frac{x}{a} \text{ ist.}$$

Für $x = 2a$ hat man:

$$\begin{array}{r|r|c}
A' = 0{,}57195 & \log \mathrm{Sin}\, 2A = 0{,}84063 & \\
\log \mathrm{Sin}\, A^3 = 0{,}71568 & \frac{1}{2} \mathrm{Sin}\, 2A = 3{,}4642 & \text{Folglich} \\
\log \frac{2}{3} = 9{,}82391 & -A = 1{,}3170 & x' = 1{,}6133 \,.\, a. \\
\log.\, \text{Zähl.} = 0{,}53959 & \log.\, \text{Nenn.} = 0{,}33187 &
\end{array}$$

Danzig, im December 1863.

Gronau.

Die Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren von Prof. Gronau sind gegen Einsendung des Nettopreises von 1 Thlr., oder gegen Postvorschuss, direct zu beziehen von dem unterzeichneten Selbstverlag.

Die naturforschende Gesellschaft
in Danzig.

Astronomie.

Kalender für alle Stände. 1864. Herausgegeben von Karl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Alljährlich haben wir die Liebhaber der Astronomie auf diesen Kalender, dessen Jahrgang 1863 im Literar. Ber. Nr. CLV. S. 9. angezeigt worden ist, als eine sehr brauchbare populäre astronomische Ephemeride aufmerksam gemacht, und thun dies auch in diesem Jahre sehr gern und aus voller Ueberzeugung von Neuem. Da die Einrichtung der astronomischen Ephemeride und des Kalenders ungeändert geblieben ist, so können wir deshalb auf unsere früheren Anzeigen verweisen, und sind auch überzeugt, dass Jeder, wer gewohnt ist, seinen Blick zuweilen nach dem gestirnten Himmel zu richten, um an dessen Pracht sein Herz zu erfreuen und zu erheben, und einmal diesen Kalender kennen gelernt und in demselben bei seiner Beschauung der Sternenpracht des Himmels lehrreiche Unterstützung gefunden hat, immer und in jedem Jahre wieder gern nach demselben greifen wird, auch ohne erneuete Empfehlung von unserer Seite. Die Beilagen enthalten, wie gewöhnlich, eine sehr vollständige Uebersicht des Planetensystems mit Rücksicht auf alle neueren Entdeckungen, und ausserdem einen „die Sonne“ überschriebenen lehrreichen

und interessanten Aufsatz, hauptsächlich über die Erscheinungen des Lichts und der Wärme mit besonderer Rücksicht auf die Spectral-Analyse und deren grosse Bedeutung auch für die Astronomie. Historisch sehr interessant ist uns die Notiz gewesen, dass schon J. Herschel in den Edinburgh Philosophical Transactions von 1822 die Grundzüge der Spectralanalyse und die Vortheile ihrer Anwendung in der Chemie mit klaren Worten angegeben hat, wodurch aber das Verdienst, welches Bunsen und Kirchhoff durch die von ihnen diesem Gegenstande gewordene weitere Entwickelung sich erworben haben, nicht geschmälert werden kann.

Nautik.

Almanach der österreichischen Kriegsmarine für das Jahr 1864. Herausgegeben von der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Dritter Jahrgang. Wien Gerold. 8⁰.

Wir freuen uns sehr über den ungestörten Fortgang dieses sehr verdienstlichen Almanachs, dessen beide ersten Jahrgänge im Literar. Ber. Nr. CXLVIII. S. 10. und Nr. CLVI. S. 10. angezeigt worden sind. Die Einrichtung, namentlich auch der astronomischen Ephemeride, ist im Ganzen vollständig dieselbe geblieben, wie in den beiden ersten Jahrgängen, so dass wir uns also in dieser Rücksicht auf unsere früheren Anzeigen beziehen können. Der neueste Jahrgang enthält aber auch wieder einige interessante nautische Aufsätze, auf die wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen, nämlich die folgenden: Admiral Fitz-Roy'sWitterungsanzeigen und Sturmsignale von Dr. F. Schaub. HerrDirector Schaub theilt in diesem lehrreichen Aufsatze aus des gelehrten und vielerfahrenen Admirals Fitz-Roy neuerlichst erschienenem Werke: „The weather book: a manual of practical meteorology. London 1863" den Abschnitt im Auszuge mit, welcher die Nutzanwendung gleichzeitiger meteorologischer Beobachtungen an mehreren Orten zur Vorausbestimmung der muthmasslichen Witterung bespricht, mit der Bemerkung, dass das in England eingeführte System, die von verschiedenen Nationen einlaufenden Beobachtungen zu sammeln, zu discutiren, die muthmasslich bevorstehenden Aenderungen des Wetters vorauszusagen und bei drohendem Sturme alle wichtigen Häfen des Königreichs durch eigenthümliche Signale zu warnen,

in den weitesten Kreisen bekannt zu werden verdiene, worin wir dem Herrn Verf. aus vollkommenster Ueberzeugung beistimmen. — Einiges über Einzelgefecht von Dampfschiffen mit Berücksichtigung der Panzerschiffe. Von Linienschiffs-Fähnrich Josef Schellander. — Dr. M. A. F. Prestel's „Das geographische System der Winde über dem atlantischen Ocean.“ Von Contre-Admiral Bernhard Freih. v. Wüllerstorf. Herr v. Wüllerstorf empfiehlt sehr die von Dr. Prestel für die Darstellung der Winde während einer bestimmten Zeit, und innerhalb einer ebenso bestimmten Oertlichkeit, gewählte formelartige Ausdrucksweise, welche dadurch anschaulicher und kürzer geworden ist, dass die Winde, welche diametral einander entgegengesetzt sind, der Zahl und Richtung nach in einen Ausdruck zusammengefasst werden.

Das höchst verdienstliche Verzeichniss der Leuchtthürme im mittelländischen, schwarzen und azowschen Meere von Herrn Robert Müller in den Jahrgängen 1862 und 1863 hat in diesem neuesten Jahrgange wieder eine sehr bedeutende Ergänzung erhalten. Ein vollständiges Verzeichniss der Leuchtthürme im Mittelmeere soll im nächsten Jahrgange gegeben werden.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CLVII. S. 14.)

Band XLV. Heft IV. Reitlinger: Ueber Töne und einige Bewegungserscheinungen im Schliessungsbogen des galvanischen Stroms. 453. — v. Littrow: Ueber Luftspiegelungen. S. 547. — Wastler: Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit der Bourdon'schen Metallbarometer. S. 559. — v. Lang: Ueber einen Apparat zum Messen des Winkels der optischen Axen. S. 587. — Sonndorfer: Helligkeitsephemeride und Darstellung des Laufes der Asteroiden im Jahre 1862. S. 589.

Band XLV. Heft V. Haidinger: Ueber Meteorsteinfälle, Meteorsteine, rothen Schnee u. s. w., S. 665. 790. 796.

Band XLVI. Heft I. Czermak: Notiz über die laryngoscopischen Photographien und über das Mikrostereoskop. S. 5.

Stefan: Ueber die Bewegung flüssiger Körper. S. 8. — **Subic**: Grundzüge einer Molecularphysik und einer mechanischen Theorie der Elektricität und des Magnetismus. S. 46. — **Mach**: Ueber die Molecularwirkung der Flüssigkeiten. S. 125.

Band XLVI. Heft II. **Knochenhauer**: Versuche zur Theorie des Condensators. S. 138. — **Mach**: Zur Theorie des Pulswellenzeichners. S. 157.

Band XLVI. Heft III. **Blažek**: Ueber Volumsbestimmungen mit Zuziehung der Schwerpunkts-Theorie. S. 342. — **Reitlinger** und **Žerjau**: Ueber Schichtung durch Entladungsschläge der Leidner Batterie. S. 352.

Band XLVI. Heft IV. und V. **Reitlinger** und **Kraus**: Ueber **Brande's** elektrochemische Untersuchungen. S. 367. — **Haidinger**: Die Octoberfeuermeteore in den Wiener Blättern 1862. S. 393. — **Clausius**: Ueber die Molecularbewegungen in gasförmigen Körpern. S. 402. — **Kammerer**: Die Licht-Intensitätscurven auf krummen Flächen. S. 405. — **Knochenhauer**: Ueber Flüssigkeiten im elektrischen Strome. S. 462. — **Stefan**: Ueber die Bewegung flüssiger Körper, (II. Abhandlung). S. 495. — **Murmann**: Ueber die Bahn der Europa. S. 524. — **Vlacovich**: Sulla Scarica instantanea della bottiglià di Leyda. S. 531.

Band XLVII. Heft I. und II. **Spängler**: Ueber rothen Schnee. S. 3. — **v. Littrow, Otto**: Ueber eine neue Einrichtung des Spectralapparates. S. 26. — **Mach**: Ueber die Gesetze des Mitschwingens. S. 33. — **Friesach**: Ueber die Reduction der grössten Sonnenhöhe auf den Meridian bei veränderlichem Beobachtungsorte. S. 49. — **Mach**: Ueber eine neue Einrichtung des Pulswellenzeichners. S. 53. — **Stefan**: Bemerkungen zur Theorie der Gase. S. 81. — **Mauthner**: Zur Lehre vom entommatischen Sehen. S. 106. — **Scarpellini**: Colpo d'occhio sopra i Terremoti avvenuti in Roma negli Anni 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, relativamente alla influenza della luna. S. 137.

Band XLVII. Heft III. und IV. **Winkler**: Ueber einige Reductionsformeln der Integralrechnung. S. 146. — **Oppolzer**: Bahnbestimmung des Planeten (64). S. 229. — **Friesach**: Ueber Reihenentwickelungen. S. 264. — **v. Littrow**: Physische Zusammenkünfte der Asteroiden im Jahre 1863. S. 317. — **Stefan**: Ueber die Fortpflanzung der Wärme. S. 326. — **Rollett**: Ueber die Wirkung des Entladungsstromes auf das Blut. S. 356.

Berichtigung. Im Literar. Ber. Nr. CLXII. S. 5. Z. 6. muss es nicht „V. edizione“ sondern „2a. edizione“ heissen.

Literarischer Bericht
CLXIV.

Galileifeier.

Und sie bewegt sich doch.

Er ging in finstern Zeiten
Zuerst des Lichtes Spur,
Sein Leben war ein Streiten
Für Licht und Wahrheit nur;
Er sprengte ihre Hülle,
Die Wahrheit leuchtet noch;
„Die Erde steht nicht stille"
„Und sie bewegt sich doch!"

Sie suchten ihn zu schwächen
Durch Qual und Kerkerhaft,
Doch nimmer liess sich brechen
Des Geistes hohe Kraft,
Ob sie mit Hass und Grimme
Ihn beugten unter's Joch,
Laut ruft der Wahrheit Stimme:
„Und sie bewegt sich doch!"

Nun glänzt sein Geist bewundert
Und leuchtet fort und fort,
Nun hallt durch manch Jahrhundert
Sein weltbefreiend Wort;
Die Nebel müssen fallen!
Die fernste Zukunft noch
Wird siegreich wiederhallen:
„Und sie bewegt sich doch!"

Dr. S. Meyer in Breslau.

In Pisa ist die Galileifeier am 18. Februar 1864 auf die glänzendste Weise begangen worden; alle gelehrte Körper-

schaften Italiens waren bei derselben durch Deputationen vertreten. Hoffentlich nächstens mehr darüber.

Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.

In Folge Ihrer Aufforderung im Archiv (Literar. Ber. Nr. CLXIII. S. 1.) Ihnen Mittheilungen über eine etwaige Feier von Galilei's Geburtstag zu machen, erlaube ich mir, Ihnen mitzutheilen, dass ich in einfacher, dem Standpunkte der Schule entsprechenden Weise den Schülern der oberen Klassen eine kurze Lebensbeschreibung dieses berühmten Mannes gegeben, und sodann seine grossen Verdienste um Physik und Astronomie nachgewiesen habe. Wenn auch die Feier nicht mit der in einer grösseren Stadt zu vergleichen ist, wo überhaupt schon mehr Personen vorhanden sind, welche das Verdienst eines solchen Mannes besser zu würdigen verstehen, so ist doch auch diese Feier hier nicht ohne Eindruck auf das heranwachsende Geschlecht geblieben.

Pyritz, den 15ten März 1864.

Dr. Lieber,
Mathematiker des Gymnasiums
zu Pyritz.

Ueber das, was hier in Greifswald geschehen ist, nächstens eine ausführlichere Mittheilung im Archiv selbst. G.

Der Senator Baron Plana.*)

Wenn auch die Lebensgeschichte der Häupter der Intelligenz in ihren Werken geschrieben steht, so erlauben wir uns doch, in der Voraussetzung, dass irgend einer der berühmtesten Mathematiker die Geschichte der Arbeiten des grossen und kräftigen Geistes des Barons Plana liefern werde, so gut als möglich in wenigen Zeilen einige der Hauptzüge seines langen und thätigen socialen Lebenslaufs zu sammeln.

Giovanni Plana wurde in Voghera im November des Jahres 1781 geboren, in demselben Jahre, in welchem der berühmte Physiker P. Beccaria in Turin starb. Als einen merkwürdigen, wir wagen sogar zu sagen providentiellen Zufall, bemerken wir, dass Newton das erste Licht des Tages im Jahre 1642 erblickte, in welchem das Gestirn Galilei's unterging. Bei dem

*) Aus der Gazzetta ufficiale del Regno d'Italia. Torino. Lunedì 25 Gennaio 1864. Num. 21, übersetzt von Herrn M. Curtze.

in **Lyon** für die Aspiranten der polytechnischen Schule in **Paris** eröffneten Concurs wurde er als der achte unter die hundert und zwanzig Zöglinge aufgenommen, welche in diesem berühmten Institute Aufnahme finden, und so hatte der junge **Plana** das Glück, die mathematischen Wissenschaften unter den berühmtesten Meistern seiner Zeit zu studiren. **Legendre** sagte bei'm Eintritt unseres Landsmanns als Professor in die Kaiserliche Artillerieschule zu **Allessandria** zu ihm: **Vous êtes jeune, mais la jeunesse est un défaut dont on se corrige tous les jours!** Und wirklich wusste **Plana**, indem er uns in einem Alter von beinahe 83 Jahren verliess, die Bemerkung seines berühmten Lehrers und Gönners zum Theil zur Wahrheit zu machen. Um das Jahr 1812 an das Athenäum in **Turin** berufen, lehrte er dort den höheren Calcul eine lange Reihe von Jahren hindurch, so dass der Professor **Plana** heute als Senior der Universität begrüsst sein würde. Auch in der Königl. Militairakademie lehrte er die höhere Mathematik, und war einige Zeit Generaldirector der Studien an derselben. Als Königl. Astronom stieg er fast täglich auf das Observatorium bis zum Beginn seiner letzten Krankheit. **Plana** war Präsident der Königl. Akademie der Wissenschaften zu **Turin**, correspondirendes Mitglied der vorzüglichsten wissenschaftlichen Gesellschaften Europa's, geschmückt mit den Orden mehrerer Souveräne. Der berühmte **Jomard** meldete die Wahl **Plana's** zum auswärtigen Mitglied des **Institut de France** mit den Worten: „Sagen Sie unserem gemeinsamen Freunde meine aufrichtigen Glückwünsche. Ich bin einer der Vierzig, die man aus den 36 Millionen Franzosen erwählt, aber **Plana** ist einer der Acht, welche aus der Billion von Menschen, die die Oberfläche der Erde bewohnen, auserlesen werden."

Plana erfreute sich wegen seiner bewundernswürdigen und fast einzigen Leichtigkeit in der Handhabung des höheren Calculs, wie sie seine verschiedenartigen Arbeiten bezeugen, des höchsten Ansehns bei den ersten Mathematikern und Astronomen beider Welten. Seine **mathematische Theorie der Mondbewegung** in drei starken Bänden wurde in **Paris** und **London** mit dem Preise gekrönt. Aus diesem grossen Werke entnahm der bewunderte Britte die **Mondtafeln zum Gebrauche der Schifffahrt**. Im verflossenen Jahre wählten einige gelehrte Engländer **Plana** zu ihrem Richter in einer wissenschaftlichen Streitfrage über den Mond, die durch eine Reihe zweckmässiger Telegramme sich herausgestellt hatte. Der Baron **Plana** war ein grosser Liebling **Carl Alberts**, der ihn mit königlichen Gunstbezeugungen überhäufte. Der berühmte Abbé **Oriani**, sein Lehrer in der

Astronomie, liebte **Plana** wie sein Kind und gab ihm ein ehrenvolles Zeichen seiner innigsten Hochschätzung, als er in seinem Testamente eine würdige Lobrede seines trefflichen Schülers schrieb, und dieselbe mit dem ansehnlichen Geschenk von fünfzig tausend Francs begleitete.

Man könnte ein interessantes Bändchen über die scharfsinnigen Aussprüche und die wirklich originellen Reflexionen schreiben, wegen welcher die Unterhaltung **Plana's** von vielen bedeutenden Persönlichkeiten und fremden Diplomaten so sehr gesucht war. Der Baron **Plana** bewahrte alle seine Fähigkeiten mit Ausnahme des Gehörs. Er veröffentlichte zum Beispiel noch vor wenigen Monaten eine sehr wichtige akademische Arbeit über das Gesetz der Abkühlung der sphärischen Körper und den Ausdruck der Sonnenwärme in den Circumpolarbreiten der Erde. Aus dem ersten Theile dieser Schrift, die vollständig in der strengen Sprache des höheren Calculs geschrieben ist, folgert er die Zeit, welche die Erde gebraucht hat, um vom gasförmigen bis zu dem gegenwärtigen festen Zustand zu gelangen, und aus dem zweiten Theile zieht er den Beweis der Existenz zweier Circumpolarmeere (M. s. d. Gazetta Ufficiale vom 23. October 1863). In den letzten Tagen seiner kurzen Krankheit versuchte **Plana** noch, wenn auch vergeblich, die Berichtigung der Correcturbogen einer anderen Abhandlung.

Der Senator **Plana**, mit einem bewunderswürdigen Gedächtniss begabt, pflegte häufig Verse und Auszüge aus classischen Autoren und vorzugsweise französischen Schriftstellern zu citiren. Seine Augen besassen eine seltene Lebhaftigkeit und einen besonders durchdringenden Blick, und zogen die Aufmerksamkeit seines unsterblichen Oheims und Lehrers **Lagrange** auf sich. Im höchsten Grade freimüthig und Philosoph sprach **Plana** offen seine eigene Meinung sowohl im Rath als in Privatkreisen aus. Gewohnt, fortwährend in der Unermesslichkeit des Himmels sich zu ergehen, versuchte er oft sich von den Wünschen Rechenschaft zu geben, die auf die Ausübung der Herrschaft in einem kleinen Winkel eines der kleinsten Planeten eines so kleinen Theiles des unendlichen Universums gerichtet sind. Seine Familie über Alles liebend, freigebig gegen die Armen und Heruntergekommenen, ein treuer Freund, mit vorzüglicher Gesundheit und den edelsten Gaben des Geistes und Herzens begabt, den politischen Ehren fremd, kann der Baron **Plana** in Wahrheit jenen auserwählten Wesen zugezählt werden, welche unserem gegenwärtigen Zeitalter zur Ehre gereichen. Denjenigen aber, welche einige Fehler an ihm finden wollen, begnügen wir uns den Ausspruch des **Horaz** in's Gedächtniss zu rufen: „**Vitiis quisque**

premitur, optimus ille, qui minimis urgetur." Alessandra Lagrange beglückte ihn mit zwei Kindern. Da ihm der kleine Luigi in den ersten Lebensjahren zu den Engeln entrissen wurde, so concentrirte Plana seine ganze Liebe auf seine Gemahlin und seine vielgeliebte Sophia.

Da uns der knapp zugemessene Raum von der Krankheit und dem Tode dieses Coryphäen der Wissenschaft zu sprechen nicht erlaubt, so müssen wir uns begnügen, zu bemerken, dass sein auserwählter Geist sich am Morgen des 20sten Januars d. J. unter den Thränen seiner verlassenen Familie und seiner Freunde zum Himmel aufschwang, versehen mit den erhabenen Heilsmitteln der Religion.

Die Todesnachricht des Baron Plana wurde dem Senate von seinem hochgeschätzten Präsidenten dem Grafen Sclopis, mit den edelsten und tiefgefühltesten Worten mitgetheilt. Seine Hülle wurde in Mitten einer allgemeinen Versammlung der Stadt mit fast königlichen Ehren nach der Kirche dell' Annunziata geleitet.

Es schien beinahe, als ob die gewählten Classen Turins bei der Begräbnissfeier des Senators Plana einen Triumpf der Wissenschaft ausdrücken wollten, wie Tags vorher das Volk Turins seine Dankbarkeit dem wohlthätigen Marchese di Barolo zu bezeugen versuchte.

Mit dem Tode des Barons Plana verschwindet einer der letzten aus der grossen Schule der berühmten Meister Lagrange, Laplace, Legendre, Poisson ..., die dem ersten Napoleon so theuer war, und die so vielfach die Wissenschaft und das gegenwärtige Jahrhundert verherrlichte.

Mit einem durch einen so grossen Verlust des Vaterlandes tief bewegten Herzen, und der geneigte Leser möge mir hinzuzufügen erlauben, durch den Verlust eines theuren Freundes fast acht Lustren hindurch, lege ich die Feder nieder, indem ich lebhaft den Cultus der auserwählten Geister und unserer Vorfahren anempfehle, welcher die menschliche Erzeugung heiligt, und das stärkste Band zwischen den Generationen bildet, die durch die Jahre sterblich sind, aber unsterblich durch ihre Tugenden.

G. F. Baruffi.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Il Principe Boncompagni e la storia delle scienze matematiche in Italia. Del Professore Giovanni Co-

dazza. Estratto dal Politecnico, Vol. XX. Milano. Editori del Politecnico. 1864. 8°.

Je wichtiger die Arbeiten und Publicationen des Fürsten D. Baldassare Boncompagni in Rom für die Geschichte der Mathematik, und je grösser die Opfer sind, welche dieser ausgezeichnete und hochachtbare Gelehrte fortwährend unserer Wissenschaft bringt, je wärmer und lebhafter die Anerkennung ist, welche diesen auf dem Gebiete der Wissenschaften einzig dastehenden Bemühungen und Bestrebungen von allen Mathematikern mit Recht gezollt wird: desto verdienstlicher ist es, dass Herr Professor Codazza in der vorliegenden höchst interessanten Schrift eine ausführliche Darstellung der bisherigen Arbeiten und Publicationen des hochsinnigen, für die Wissenschaft wahrhaft begeisterten Fürsten, — von dem ja auch schon oft im Archive die Rede gewesen ist — geliefert hat. Mittelst einer unter dem Namen „Tipografia delle scienze matematiche e fisiche" errichteten besonderen Druckerei hat der Fürst Boncompagni bisher in chronologischer Folge die folgenden Schriften und grösseren Werke publicirt:

Della vita e delle opere di Platone Tiburtino, traduttore del secolo XII. Roma 1851. 4°.

Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo XII, e di Gherardo da Sabbionetta, astronomo del secolo XIII, Roma, 1851. 4°. con due fac-simili.

Della vita e delle opere di Guido Bonatti, astrologo ed astronomo del secolo XIII, Roma, 1851, 8°. con giunte e correzioni, estratto dai tomi CXXIII—CXXIV del Giornale arcadico.

Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo XIII, Roma, 1854. 8°. gr. con un fac-simile.

Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo XIII, Roma, 1854. 8°. gr. con un fac-simile.

Intorno alla risoluzione delle equaz. simultanee $x^2+k=y^2$, $x^2-h=z^2$; nota. Roma, Annali di scienze matematiche e fisiche, aprile 1855.

Intorno ad una proprietà dei numeri; nota, Roma, ibid. settembre, 1855.

Tre scritti inediti di Leonardo Pisano, publicati da B. Boncompagni, secondo la lezione di un codice della biblioteca Ambrosiana di Milano. Firenze, 1856. 8°.

Opuscoli di Leonardo Pisano, publicati da B. Boncompagni, secondo la lezione di un codice della biblioteca Ambrosiana di Milano. 2e edizione. Firenze, 1856. 8°.

Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali publicati da B. Boncompagni, seguiti da un' appendice contenente quattro lettere dirette al medesimo P. Cossali ed una nota intorno a queste lettere. Roma, 1857. 4°.

Scritti inediti publicati da B. Boncompagni, vol. I. Leonardi Pisani liber Abbaci, Roma, 1857. 4°.

Trattati d'aritmetica publicati da B. Boncompagni, Roma, 1857. 8°.

1. Algorismi de numero Indorum.
2. Joannis Hispalensis liber Algorismi de pratica Arismetricae.

Scritti inediti publicati da B. Boncompagni, vol. II. Leonardi Pisani Practica Geometriae ed Opuscoli, Roma, 1862. 4°.

La composizione del Mondo di Ristoro d'Arezzo, testo italiano del 1282, publicato per cura di Enrico Narducci, Roma, tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1859, 8° grande.

Welche Masse wichtiger und zum Theil sehr umfangreicher Publicationen, deren weitere überaus interessante Charakterisirung in der verdienstlichen und lehrreichen, literarisch wichtigen Schrift, die wir der Aufmerksamkeit unserer Leser nochmals recht sehr empfehlen, selbst nachgesehen werden muss!

Möge die Vorsehung dem trefflichen Fürsten noch viele Jahre Kraft und dauernde Gesundheit schenken: dann wird die Wissenschaft sich gewiss noch vieler schöner Früchte von seinem edlen und hochherzigen Eifer zu erfreuen haben!

Può la dotta Germania offrire un simile privato?

G.

Passages relatifs a des sommations de séries de cubes extraits de manuscrits arabes inédits et traduits par M. F. Woepke. Rome. Imprimerie de Propaganda fide. 1863. 4°.

Herr Woepke*), der sich bekanntlich schon so viele Verdienste um die Geschichte der mathematischen Wissenschaften erworben

*) Dessen in Paris leider erfolgten Tod ich so eben erfahre. G.

hat, und in seinen rühmlichen Bestrebungen von dem Fürsten Boncompagni kräftigst gefördert wird, liefert in dieser der Beachtung sehr zu empfehlenden Schrift die Uebersetzung von fünf arabischen Manuscripten der kaiserlichen Bibliothek in Paris, aus denen namentlich hervorgeht, dass die Summirung der Reihe

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3, \ldots.\ n^3$$

der Cuben der natürlichen Zahlen schon von Ibn Albannâ, einem marokkanischen Mathematiker des XIII. Jahrhunderts, gegeben worden ist. Aber auch vieles andere für die Geschichte der Mathematik sehr Wichtige enthalten diese marokkanischen Manuscripte, und ihre Uebersetzung wird daher von Keinem, der der Bearbeitung der Geschichte unserer Wissenschaft sich widmet, entbehrt werden können. G.

Arithmetik.

Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet. Herausgegeben von R. Dedekind, Professor am Collegium Carolinum in Braunschweig. Braunschweig. Friedr. Vieweg und Sohn. 1863. 8⁰.

Durch die Herausgabe der Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie hat Herr Prof. Dedekind sich ein nicht genug anzuerkennendes Verdienst erworben, und zwar um so mehr, weil die Arbeit in mehreren Beziehungen als eine selbstständige zu betrachten ist, indem die Hauptgrundlage zwar ein im Winter 1856 bis 1857 geschriebenes Heft bildet, wozu aber von Herrn D. theils nach älteren Heften, theils nach Dirichlet'schen Abhandlungen, endlich ganz nach eigenem Ermessen, Zusätze von nicht unbedeutender Ausdehnung gemacht worden sind. Wir brauchen nicht erst zu sagen, dass wir dieses Buch für einen vortrefflichen Lehrbegriff der Zahlentheorie halten, welcher einem Jeden, der diesem schönen und wichtigen Theile der mathematischen Wissenschaften ein besonderes Studium zuzuwenden beabsichtigt, nicht genug empfohlen werden kann, insbesondere auch deshalb, weil dasselbe von den elementarsten Sätzen über Theilbarkeit der Zahlen im Allgemeinen, gemeinschaftliches Maass, absolute und relative Primzahlen, Zahlencongruenz u. s. w. ausgeht, und nur nach und nach in schöner Stufenfolge in die höheren Lehren einführt. Die folgende Angabe des Hauptinhalts wird dies bestätigen und hoffentlich auch Verfasser mathematischer Lehrbücher veranlassen, sich wenigstens

mit den ersteren, den sogenannten Elementen näher liegenden Abschnitten genau bekannt zu machen, weil ihnen dieselben nicht wenige schöne elementare Darstellungen für ihren Zweck liefern werden: **Erster Abschnitt:** Von der Theilbarkeit der Zahlen. — **Zweiter Abschnitt:** Von der Congruenz der Zahlen. — **Dritter Abschnitt:** Von den quadratischen Resten. — **Vierter Abschnitt:** Von den quadratischen Formen. — **Fünfter Abschnitt:** Bestimmung der Anzahl der Classen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen. — **Supplemente.** I. Ueber einige Sätze von Gauss aus der Theorie der Kreistheilung. — II. Ueber den Grenzwerth einer unendlichen Reihe. — III. Ueber einen geometrischen Satz. — IV. Ueber die Genera, in welche die Classen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zerfallen. — V. Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduli. — VI. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. — VII. Ueber einige Sätze aus der Theorie der Kreistheilung. — VIII. Ueber die Pell'sche Gleichung. — IX. Ueber die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlicher Reihen. — Nochmals sagen wir dem Herrn Herausgeber unseren wärmsten Dank für diese wahrhafte Bereicherung der mathematischen Literatur. Die trefflichste äussere Ausstattung versteht sich bei der berühmten Verlagshandlung von selbst.

Geometrie.

Oeuvres de Desargues reunies et analysées par M. Poudra, Officier supérieur d' état - major en retraite, ancien élève de l'Ecole polytechnique, auteur d'un Traité de Perspective - relief, etc., précedées d'une nouvelle biographie de Desargues, suivies de l'Analyse des ouvrages de Bosse, élève et ami de Desargues; de Notices sur Desargues extraites de la vie de Descartes, par Baillet; de Notices diverses sur Desargues par le P. Colonia, Pernetty, MM. Poncelet et Chasles; de Notices sur la Perspective d'Aleaume et Migon; sur celle de Niceron; sur celle de Grégoire

Huret; et d'un Recueil très-rare de divers libelles publiés contre Desargues. Tome I. Avec Planches. Paris. Leiber, éditeur. 1864. 8°. — Tome II. Avec Planches. Paris. Leiber, éditeur, 1864. 8°.

Man weiss, dass Desargues (Girard) oder, wie sein Name zuweilen, nach Herrn Poudra aber mit Unrecht, geschrieben worden ist, des Argues, welcher zu Lyon im Jahre 1593 geboren worden, und eben daselbst im Jahre 1662 gestorben ist, von Poncelet schon im Jahre 1822 „le Monge de son siècle" genannt worden ist, und zwar in Folge seiner vielen und wichtigen Erfindungen gewiss mit vollem Rechte. Bis dahin war dieser scharfsinnige Mathematiker lange fast ganz unbekannt und unbeachtet geblieben, und von seinen Werken wusste man im Ganzen wenig, bis Chasles durch einen glücklichen Zufall bei einem Buchhändler*) in Paris im Jahre 1845 eine von De la Hire gemachte Abschrift seines Hauptwerks über die Kegelschnitte entdeckte, welches kostbare Manuscript gegenwärtig in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Paris niedergelegt ist, zugleich mit dem seine Authenticität bezeugenden Briefe De la Hire's. Das Werk führt den Titel:

> Brouillon proiect d'une atteinte aus éuénemens des rencontres d'un cone avec un plan, par le sieur G. Desargues Lionais. Paris. 1639.

Ein anderes früheres Werk von Desargues, überhaupt sein erstes Werk, ist:

> Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellemment ou en devis, avec leurs proportions, mesures, eloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage, par. G.D. L.**) à Paris. 1636.

welches sich bei dem Werke von Bosse***) über denselben Gegenstand befindet.

Das dritte Werk von Desargues ist:

---

*) libraire; vielleicht auch „Bücherhändler."

**) Girard, Desargues, Lyonnais.

***) M. s. über Bosse und seine Werke in unserem Werke T. II. p. 1.: „Analyse des ouvrages d'Abraham Bosse, élève et ami de Desargues."

Brovillon project d'exemple d'vne manière vniverselle du S. G. D. L. touchant la practique du trait a preuues pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'esclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en perspective comme en géometral et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil. Paris en aout 1640 avec privilège.

von welchem sich ein Exemplar auch bei der Akademie der Wissenschaften in Paris befindet, unglücklicherweise aber ohne Figuren, die Herr Poudra reconstruirt hat.

Je unzugänglicher alle diese Werke, und noch andere Schriften des scharfsinnigen Desargues bisher waren: desto grösser ist und desto wärmere Anerkennung verdient das Verdienst, welches sich Herr Poudra durch die vorliegende vollständige Publication desselben erworben hat. Dieses Verdienst wird aber durch die von dem Herrn Herausgeber beigegebenen Analysen dieser in der Weise des 17ten Jahrhunderts verfassten, und daher für die an die neueren Darstellungsweisen gewöhnten Mathematiker mannigfache Schwierigkeiten darbietenden Werke, durch welche das Verständniss sehr erleichtert und für Viele erst möglich gemacht wird, noch sehr erhöhet, und fordert zu dem lebhaftesten, dem Herrn Herausgeber zu zollenden Danke auf. Hiezu kommt aber endlich noch, dass Herr Poudra sich keineswegs mit der Herausgabe der oben genannten und anderer Schriften von Desargues begnügt, sondern in den beiden Theilen seines vorliegenden schönen Werkes überhaupt Alles, was von älteren und neueren Mathematikern über und gegen den genannten scharfsinnigen Geometer geschrieben worden ist, gesammelt und Vieles aus dem reichen Schatze eigener mathematischer Kenntnisse beigefügt hat. Der ganze Inhalt ist schon auf dem Titel so vollständig angegeben worden, dass wir uns dadurch weiterer Mittheilungen glauben überhoben halten zu dürfen. Dass dieses Werk auch für die Geschichte der Geometrie von grösster Wichtigkeit ist, wird kaum noch einer besonderen Bemerkung bedürfen; kein Mathematiker wird dasselbe künftig entbehren können, und jeder wird gewiss gern dem lebhaften Danke beistimmen, den wir hier Herrn Poudra für sein schönes Werk, dessen Herausgabe nothwendig vielfachen Schwierigkeiten unterliegen musste, nochmals auszusprechen für unsere Pflicht halten.

Physik.

Anfangsgründe der Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschulen. Von Dr. Jos. Krist, Lehrer der Physik an der k. k. Schottenfelder Ober-Realschule in Wien. Mit 291 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. Braumüller. 1864. 8°.

Aus methodischen Gründen, die wir vollständig billigen, ist in diesem Elementarlehrbuche der Physik von der gewöhnlichen Anordnung des Stoffes insofern abgewichen, dass diejenigen Lehren, welche, wenigstens bei dem Unterrichte auf Schulen, vorzugsweise nur eine Begründung und Erläuterung auf dem Wege des Experiments erfordern und zulassen, — also die Lehren von der Wärme, von den chemischen Erscheinungen, von dem Magnetismus und von der Elektricität — vorangestellt, diesen Lehren selbst jedoch noch die allgemeinsten Begriffe über die Schwere und die einfachsten Gesetze des Hebels voraufgeschickt worden sind, weil ohne die letzteren eine deutliche Einsicht in den Gebrauch der für eine grosse Anzahl der wichtigsten Experimente ganz unentbehrlichen Wage natürlich gar nicht zu erlangen war. Auf diese vorzugsweise das Experiment in Anspruch nehmenden Lehren lässt dann der Herr Verf. die, eine mathematische Begründung erfordernden Theile, bei denen auch die hervortretenden Naturgesetze nur in strenge mathematische Ausdrücke und Formeln gefasst und mittelst derselben zur Anschauung gebracht werden können, also — hauptsächlich die Lehren der Mechanik und Optik, — folgen. Wir billigen, wie schon erinnert, diese Anordnung aus methodischen Gründen vollkommen, und haben, so weit wir mit dem Büchlein uns bekannt gemacht haben, Deutlichkeit und Bestimmtheit nirgends vermisst. Besondere Anerkennung verdient es, dass der ganze auf Mathematik basirende Theil auch wirklich mathematisch gehalten worden, dass nichts, was einen mathematischen Beweis erfordert, ohne einen solchen geblieben ist; und wenn auch der Herr Verf. sich dabei mit Recht möglichster Einfachheit befleissigt hat, so ist es doch auf der anderen Seite sehr erfreulich und erregt ein sehr gutes Vorurtheil für den Zustand des physikalischen Unterrichts auf den österreichischen Mittelschulen, wenn derselbe schon in den unteren Klassen dieser Lehranstalten, für welche das vorliegende Lehrbuch bestimmt ist, in einer so gründlichen mathematischen Weise ertheilt werden kann. Ganz eben so wie auf den preussischen Realschulen erster Ordnung ist mit Recht auch hier auf den mechanischen und optischen Theil vorzügliches Gewicht gelegt worden, was richtigen Ansichten über das Wesen

und die Bedeutung des physikalischen Schulunterrichts vollkommen entspricht. Wir glauben das Büchlein der Beachtung der Lehrer der Physik empfehlen zu dürfen, indem wir nur noch bemerken, dass die äussere Ausstattung, namentlich auch rücksichtlich der 291 in den Text eingedruckten Holzschnitte, nichts zu wünschen übrig lässt. — Mit anerkennungswerther Pietät hat der Herr Verf. die Schrift seinem verdienstvollen Lehrer, Herrn Professor Dr. Aug. Kunzek, Edlem von Lichton, in Wien, gewidmet.

Vermischte Schriften.

Société des sciences naturelles du Grand-Duché de Luxembourg. Tome sixième. Année 1863. Luxembourg. Imprimérie Libraire de V. Buck. 1863. 8°.

Diese, viele werthvolle Abhandlungen enthaltenden Schriften der Société des sciences naturelles du Grand-Duché de Luxembourg verdienen jedenfalls allgemeiner bekannt zu sein, als es bis jetzt der Fall zu sein scheint. Ausser einigen kleineren Aufsätzen naturhistorischen und chemischen Inhalts (S. 108—S. 121.) enthält der vorliegende sechste Band die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden mathematischen und physikalischen Abhandlungen, welche bei Weitem den grössten Theil der verdienstlichen Sammlung (S. 1.—S. 107.) einnehmen.

Détermination de la relation qui existe entre la chaleur rayonnante, la chaleur de conductibilité et la chaleur latente. Par **De Colnet d'Huart**, Docteur en sciences, Professeur à l'Athénée de Luxembourg. p. 1. bis p. 64.

Inhalt und Zweck dieser ganz mathematisch gehaltenen Abhandlung sind durch ihre Ueberschrift mit vollständiger Bestimmtheit bezeichnet. Dieselbe empfiehlt sich durch Deutlichkeit und mathematische Strenge sehr der Aufmerksamkeit unserer Leser. In der Einleitung ist der bei der ganzen Untersuchung eingeschlagene Weg, so wie die leitenden Principien, vollständig angegeben, und am Ende desselben schliesst der Herr Verf. mit den folgenden, das Endergebniss seiner Untersuchungen darlegenden Worten: „C'est en suivant cette marche que nous avons découvert la cause commune de la chaleur rayonnante, de la chaleur de conductibilité et de la chaleur latente. La première est un mouvement périodique de translation et de rotation. La deuxième doit son existence aux déformations des molécules; le déplacement

moléculaire aussi bien que la rotation qui constituent le phénomène diminuent avec le temps, sans devenir jamais rigoureusement nuls. Enfin la chaleur latente provient de ce que la répulsion des molécules déformées augmente rapidement lorsqu'on chauffe le corps, et il doit nécessairement arriver une époque où cette répulsion égale l'action du foyer de la chaleur." Der Herr Verf. hat sich so viel als möglich der von Lamé in der „Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris 1852." gebrauchten Bezeichnungen bedient.

Sur les courbes du second degré par J. P. Michaelis, Professeur à l'Athénée. p. 65. — p. 105.

Der Herausgeber des Archivs hat bereits in einer Reihe von Abhandlungen auf den grossen Nutzen hingewiesen, welchen der Gebrauch der von ihm sogenannten Anomalien (bei der Ellipse nämlich z. B. der Winkel u in den Substitutionsformeln $x = a\cos u$, $y = b\sin u$) in der Theorie der Kegelschnitte und bei der Lösung von vielen, diese Curven betreffenden Aufgaben gewährt. Alle diese Abhandlungen und Aufsätze hier namhaft zu machen, würde zu viel Raum erfordern, weshalb hier nur auf die folgenden hingewiesen werden mag:

Die Theorie der Ellipse und Hyperbel, aus einem neuen Gesichtspunkte dargestellt. Thl. XXIV. 1855. S. 370 — S. 424.

Ueber ein Theorem von Fagnano. Thl. XXVI. 1856. S. 198 — S. 204.

Ueber einen allgemeinen Satz von den Kegelschnitten. Thl. XXIX. 1857. S. 519.

Ueber den Flächeninhalt in oder um eine Ellipse beschriebener Dreiecke und Vierecke. Thl. XXX. 1858. S. 11 — S. 45.

Merkwürdige Construction des grössten in, und des kleinsten um eine Ellipse beschriebenen Vielecks von gegebener Seitenzahl. Thl. XXX. 1858. S. 84 — S. 92.

Der Satz von Cotes, auf die Ellipse erweitert. Thl. XXX. 1858. S. 104 — S. 108.

Der Satz des Ptolemäus (und andere Sätze vom Kreise), auf die Ellipse erweitert. Thl. XXX. 1858. S. 109 — S. 113.

Neue Methode die Ellipse zu rectificiren. Thl. XXX. 1858. S. 213 — S. 228.

Je mehr der Herausgeber, wie aus diesen Angaben deutlich erhellen wird, seit einer längeren Reihe von Jahren seine Aufmerksamkeit unausgesetzt dem in Rede stehenden Gegenstande zugewandt hat, und dadurch zu einer grösseren Anzahl neuer Resultate geführt worden ist: desto mehr ist er erfreuet worden, dass Herr Professor Michaelis in Luxemburg in der oben genannten gründlichen und der Beachtung sehr zu empfehlenden Abhandlung denselben Gedanken gleichfalls aufgenommen und in ganz selbstständiger Weise die Theorie der Kegelschnitte, — und zwar der Ellipse, Hyperbel und Parabel, — mittelst der von dem Herausgeber des Archivs, — der es sich zu ganz besonderer Ehre rechnet, bei diesem Gegenstande mit einem so scharfsinnigen Mathematiker wie Herrn Professor Michaelis zusammengetroffen zu sein, — mit dem Namen Anomalien belegten Hülfswinkel vollständig durchgeführt hat. Ohne weiter auf den Inhalt dieser sehr lehrreichen Abhandlung, die auch verschiedene neue Sätze enthält, die Evoluten der Kegelschnitte besonders berücksichtigt, die allgemeineren durch die Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$$

charakterisirten Curven als zu einer ähnlichen Betrachtung wie die Ellipse und Hyperbel geeignet nachweiset, u. dergl. mehr eingehen zu können, empfehlen wir dieselbe der sorgfältigsten Beachtung unserer Leser, die aus derselben die vielfachste Belehrung schöpfen und an verschiedenen eleganten und interessanten Resultaten sich erfreuen werden, nochmals recht sehr.

Baromètre à cuvette mobile, par M. Jos. Sivering, ingénieur. p. 106—p. 107.

Wegen der Beschreibung dieser neuen Einrichtung des Barometers, welche allerdings manche Vortheile darzubieten scheint, und namentlich die Transportabilität des Gefässbarometers sehr erleichtert, oder vielmehr das Gefässbarometer erst leicht und sicher transportabel macht, müssen wir auf den kurzen Aufsatz selbst verweisen.

Mögen auch in ihren späteren Jahrgängen die Schriften der in sehr verdienstlicher Weise wirkenden Société des sciences naturelles du Grand-Duché de Luxembourg, denen wir einen ungestörten und ununterbrochenen Fortgang im Interesse der Wissenschaft sehr wünschen, der Aufmerksamkeit der Mathematiker und Physiker nicht entgehen!

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akade-

mie der Wissenschaften zu München. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CLX. S. 12.

1863. I. Heft III. Steinheil: Ueber Maasse à bout und deren Vergleichung nach einem neuen Princip. S. 329. — H. v. Schlagintweit: Meteorologische Resultate aus Indien und Hoch-Asien (mit vier Beilagen). S. 341.

1863. I. (Doppel-)Heft IV. Steinheil: Ueber ein neues von ihm construirtes Marinefernrohr von grösserer Helligkeit als die bisherigen. S. 468. — v. Bezold: Ueber das Verhalten der starren Isolatoren gegen Elektricität. S. 563.

1863. II. Heft I. Enthält keine in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze.

1863. II. Heft II. Kenngott: a) der Hessenbergit, eine neue Mineralspecies (mit Holzschnitt). S. 2. b) Ueber die Grundgestalt des Hämatit. S. 234.

1863. II. Heft III. Steinheil: Ueber photographische Triangulation und Vermessung. S. 304. – Seidel: Ueber eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezüglich auf die Schwankungen in den Durchsichtigkeitsverhältnissen der Luft. S. 320. — v. Bezold: Ueber die mathematischen Beziehungen zwischen den krystallographischen Grundgesetzen. S. 350.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi etc.

Die vier ersten Hefte dieses in jeder Beziehung sehr zur Beachtung zu empfehlenden neuen mathematischen Journals sind, mit Angabe des vollständigen Titels, im Literar. Ber. Nr. CLXI. S. 10. angezeigt worden; wir freuen uns, jetzt nachfolgend die Fortsetzung anzeigen zu können.

Anno I. — Maggio 1863. Sull' equazioni differenziali, che si presentano nei problemi di meccanica; nota di Remigio del Grosso p. 129. — Due teoremi di determinanti, di Enrico Ovidio. p. 135. — Teoria delle funzioni ellittiche; per R. Rubini (continuaz. v. pag. 122.) p. 140. — Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogenee; per N. Trudi (continuaz. v. pag. 59.) p. 148. — Soluzioni di alcune questioni proposte nel fascicolo di febbraio 1863 del Giornale di Terquem inviateci da alcuni giovani studenti (Cont. v. pag. 126). p. 159.

Anno I. — Giugno 1863. Teoria elementare delle forme geometriche per G. Battaglini. (cont. v. pag. 97.) p. 161. — Nota sulle serie di curve d'indice qualunque; per G. Battaglini. p. 170. — Teorica dei contravarianti, degl' invarianti e de' covarianti; per G. Janni. p. 174. — Nota sopra un problema di Geometria; per E d'Ovidio. p. 183. — Nota sulle curve di terzo grado; per N. Salvatore Dino. p. 187. — Soluzione delle quistioni proposte dal Professore Trudi alla pag. 91.; per F. Gambardella. p. 190.

Anno I. — Luglio 1863. Teorica dei contravarianti, degl' invarianti e de' covarianti; per G. Janni (cont. v. pag. 174.) p. 194. — Nota sull' equazioni differenziali, che si presèntano nei problemi di meccanica per Remigio del Grosso (continuazione v. pag. 129.) p. 203. — Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti, per Eugenio Beltrami. p. 208. — Teorema sulle curve algebriche per N. Salvatore Dino. p. 217. — Soluzioni delle quistioni 652 e 655 de' Nouvelles Annales per Gaetano Recchia. p. 218. — Altra dimostrazione per Ignazio Maresca. p. 220. — Dimostrazione del teorema 7° proposto dal Prof. E. Fergola nel fascicolo di febbraio del Giornale di Matematica per Giacomo Mola. p. 221. — De' diametri conjugati paralleli nel sistema di due superficie di 2° grado per Vincenzo Janni. p. 223.

Anno I. — Agosto 1863. Sulla Teoria delle coniche, nota di L. Cremona. p. 225. — Teoria elementare delle forme Geometriche per G. Battaglini (continuazione vedi pag. 161.) p. 227. — Teorica de contravarianti, degl' invarianti e de' covarianti; per G. Janni (cont. v. pag. 194.) p. 240. — Dimostrazione del teorema del signor Trudi, per Alessandro Allocati e Gaetano Recchia. p. 254. — Quistioni. p. 256.

Anno I. — Settembre 1863. Nota sull' equazioni differenziali, che si presentano nei problemi di meccanica, per Remigio del Grosso (contin. v. pag. 203.) p. 257. — Alcuni locali per E. d'Ovidio discepolo del professor Sannia. p. 265. — Nota sopra i determinanti minori di un dato determinante per Giuseppe Janni. p. 270. — Teorica di determinanti simmetrici gobbi per Giuseppe Janni. p. 275. — Un teorema sulle cubiche gobbe per L. Cremona. p. 278. — De' diametri conjugati paralleli nel sistema di due superficie di 2° grado per V. Janni (continuazione v. pag. 223.) p. 280. — Sul momento di una forza presa rispetto ad un asse per V. Janni. p. 282. — Dimostrazione di un teorema di Villarceau per Alessandro Allocati, discepolo del professor Sannia. p. 284. — Altra dimostrazione dei teoremi provati a pag. 160.

per E. d'Ovidio. p. 285. — Intorno ai sistemi di 2° ordine e di 2ª classe. Nota per G. Battaglini. p. 287.

Anno I. — Ottobre 1863. Teorica delle funzioni ellitiche per R. Rubini (continuazione v. pag. 147.) p. 291. — Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, nota del prof. Luigi Cremona (estratta dal tomo II. serie 2ª) delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna). p. 305. — Soluzioni delle questioni 16, 17 e 18 per G. Battaglini. p. 311. — Corrispondenza. p. 317. — Questioni. p. 318.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati di Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CLXI. S. 12.)

Tom. V. Nr. 2. Intorno la risoluzione delle equazioni algebriche generali mediante trascendenti. Nota di A. Pievani. p. 57. — Alcune proprietà di una curva trascendente. Nota di M. Azzarelli. p. 72. — Sur les volumes des surfaces polaires. Par T. A. Hirst. p. 79. — Sulla rifrazione di una supposta atmosfera lunare. Nota di F. O. Mossotti. p. 102. — Note relative à la fonction x^x. Par A. Le Cointe. p. 106. — Question sur un jeu de cartes. Par A. Le Cointe. p. 108. — **Rivista bibliografica**, Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane. Napoli 1863. p. 111.

Galilei.

Indem ich diese Nummer des literarischen Berichts zu schliessen im Begriffe bin, macht mir Herr Professor I. Fiedler am Gymnasium zu Leobschütz die erfreuliche Mittheilung, dass von ihm, zunächst veranlasst durch meine Aufforderung in Nr. CLX. des literarischen Berichts, am Vorabend des 18. Februars d. J. eine angemessene, sehr würdige, Festlichkeit zur Feier des Tages, an welchem vor 300 Jahren der grosse Galilei geboren wurde, veranstaltet worden sei, wobei Herr F. zugleich bemerkt, dass er kein Jahr vorübergehen lasse, ohne seinen Schülern ein Bild der grossen Coryphäen der Mathematik und Physik vorzuführen. Ich sage Herrn Professor Fiedler den aufrichtigsten Dank für diese sehr erfreulichen Mittheilungen.

Greifswald, im März 1864.

Grunert.

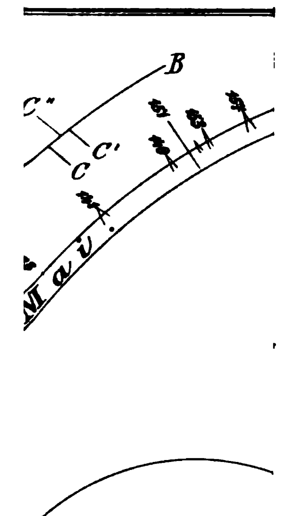
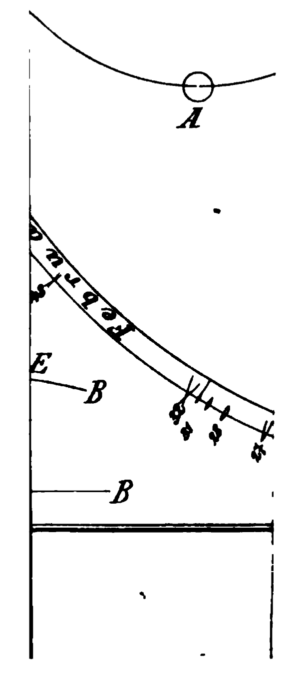


Fig. XIII.



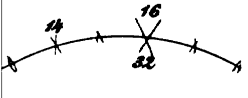
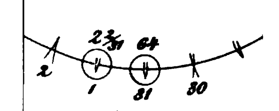
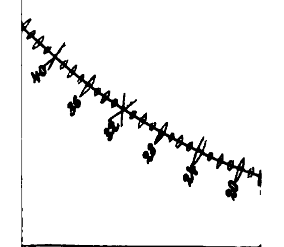
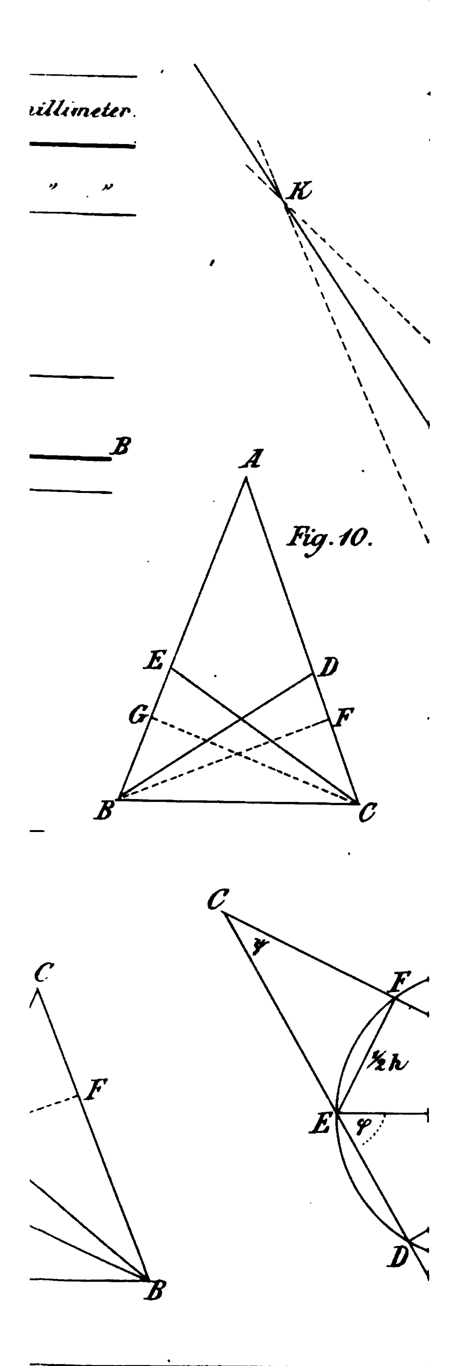
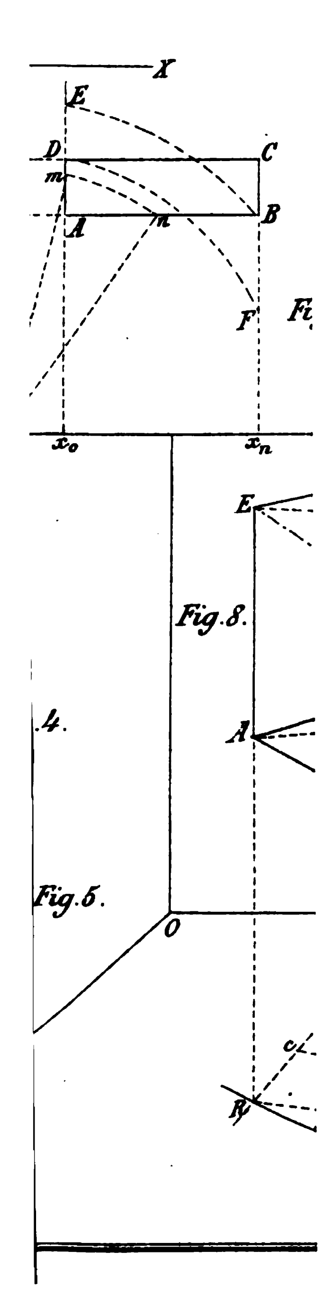


Fig. XIX.






illimeter.
K
B
A
Fig. 10.
E
D
G
F
B
C
C
F
B
C
γ
F
½h
E
φ
D


X
E
D
C
m
A
n
B
F
Fi
x_o
x_n
E
Fig.8.
.4.
A
Fig.5.
O
c
R


Digitized by Google

